Title	最善のベイズ的私有化メカニズム
Sub Title	First best Bayesian privatization mechanisms
Author	Kim, Taesung Ledyard, John O. 吉岡, 忠昭
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1995
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.88, No.1 (1995. 4) ,p.25- 44
JaLC DOI	10.14991/001.19950401-0025
Abstract	
Notes	小特集 : The First Decentralization Conference in Japan
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19950401-0025

「三田学会雑誌」88巻1号（1995年4月）

最善のベイズ的私有化メカニズム

タイスン・キム
（ソウル国立大学）
ジョン・O.レジャード
（カリフォルニア工科大学）

1．序

ひとつの分割できない物件（“賞品”）を一人の経済主体に配分することに関与しているプランナーを考える。それぞれの主体はその物件に対する自らの評価は知っていても，他の主体の評価についてはその分布しか知らない。プランナーの目標は事後的に効率的なメカニズムを見つけることである。言い換えると，その物件を最も高く評価する主体に常に割り当てるメカニズムであり，それは主体間の移転をバランスさせるのでプランナーへの支払いもプランナーからの補助もない。そのメカニズムはまた個人合理的でなければならない。すなわち，各主体はメカニズムに参加することで非負の利得を保証されるのである。

本論文では私有化メカニズムについての二つの主要なタイプの問題が考察される。第一のタイプの問題は，多くの応用において，メカニズムに参加する主体を補償することが違法であるかまたは不可能であるという事実によって動機づけられる。主体間の移転が許されないという極端な場合を考えよう。プランナーは主体間の移転なしに物件を配分する，事後的に効率的で，ベイズ的誘因両立なメカニズムを設計できるのか。この問に対する答は否定的であることがわかるだろう（第3節定理1）。そこで移転のないベイズ的誘因両立なメカニズムのうちでどのメカニズムが最善のパフォーマンスをもつのかを問題にする。この問題に答えるために，移転のないベイズ的誘因両立なメカニズムには各主体について平等な獲得のチャンスがある単純くじを一時的パレート優越するようなものがないことを示す（第3節定理2）。

第二のタイプの問題は，主体間での移転は許されるが，バランスしなければならない（すなわち，プランナーへのあるいはプランナーからの別払いが許されない）メカニズムに関するものである。とくに，個人合理的で，事後的に効率的な，移転がバランスしているベイズ的誘因両立なメカニズムをプランナーが設計できるか？という問題を考える。答えは肯定的であることがわかる。この問題に答えるために，二つの異なる個人合理性の概念，すなわち，一時的個人合理性と事後的個人合理性

を満たすメカニズムを考察する。第4節では，移転がバランスし，事後的に効率的で，一時的個人合理的な配分をインプリメントする単純なベイズ・メカニズムを提示する。さらに，それぞれの主体の評価が同一の分布から引き出されるならば，このメカニズムは平等にチャンスのある単純なくじを厳密に一時的パレート優越する（第4節定理3）。

この肯定的な結果は，事後的個人合理性を要求しても同様の肯定的な結果を得られるかというさらなる問題を提出する。第5節では，それぞれの主体の評価の集合が有限であるならば，事後的に効率的で，事後的に個人合理的かつ移転がバランスしているベイズ・メカニズムを設計することが実は可能であるということを示す（第5節定理4）。有限なタイプの場合，事後的効率性とともに事後的個人合理性とベイズ的誘因両立性を要求することが一つの一次不等式体系として簡潔に表現されうる。このとき二者択一の定理にもとづく証明を容易に与えることができる。

メカニズム・デザインの研究にベイズ・アプローチを用いる文献は多い。公共財のある経済の文脈で，D'Aspremont and Gerard-Varet (1979) は事後的効率性と予算のバランス性を達成するベイズ・メカニズムを示唆した。しかしながら，D'Aspremont and Gerad-Varet のメカニズムは一時的に個人合理的でない。Laffont and Maskin (1979) は，一般に，事後的効率性と一時的個人合理性は予算のバランスしたベイズ的公共財メカニズムと両立しないことを示した。さらに，Mailath and Postlewaite (1990), Ledyard and Palfrey (1994) ならびに Rob (1989) は，それぞれ，ラージ・エコノミーでは一時的個人合理性はそれだけで公共財がけっして生産されないことを含意するということを示している。

他方，一人の売り手と一人の買い手の間における単一の分割できない物件の双方的取引という文脈で，Myerson and Satterthwaite (1983) は，事後的に効率的で，一時的に個人合理的かつ別払いのないベイズ・メカニズムの不可能性を証明した。しかしながら，より最近には，Makowski and Mezzetti (1933) は，もし一人の売り手に加えて同一の分布から独立してその評価が引き出される潜在的な買い手が少なくとも二人存在するなら，ある評価の分布にたいして，その分割できない物件を取り引きするための，事後的に効率的で，一時的に個人合理的なベイズ・メカニズムが存在することを示した。

文献において不可能性定理が優勢であることを考えると，我々の可能性の帰結はむしろ驚くべきである。我々の可能性の帰結は二つの主要な要因に依存している。第一に，我々の問題は，Laffont and Maskin (1979) のような公共財というよりむしろ単一の分割できない物件を割り当てるというものである。第二に，より重要なのであるが，双方的取引に関する文献（Myerson and Satterthwaite (1983), Makowski and Mezzetti (1993)）ではその物件は一人の経済主体すなわち売り手によって所有されているが，我々のモデルではプランナーによって所有されている。我々の可能性の帰結が示唆するのは，所有権とは，双方的取引のモデルで個人合理性条件が満たされることを困難にし，ベイズ・メカニズムで事後的効率性を達成することの主要な障害であるということだ。

我々の帰結はもう一つの肯定的な Cramton, Gibbons and Klemperer (1987) といくらか整合的であり，これは，もしそれぞれの主体の評価が同一の分布から独立に引き出され，どのパートナーも大きすぎるシェアーをもたないならば，パートナーシップが事後的に効率的な，一時的に個人合理的な方法で解消されうるということを示す。しかしながら，我々のモデルでは，それぞれの主体の評価は同一の分布から引き出される必要がなく考案される問題はかなり異なっている。さらに，我々は一時的個人合理性よりもむしろ事後的個人合理性を達成するので，我々の結論は彼らのものより強い。

完全情報のインプリメンテイションの文脈では，物件についての主体の評価は主体間での共通の知識であり，Glazer and Ma (1989) は均衡において主体間の貨幣の移転がなく，最大の評価をする主体にその物件を割り当てる多段階メカニズムを導入した。しかしながら，我々は不完全情報下では事後的に効率的なベイズ・メカニズムはいずれも均衡では主体間の非ゼロの貨幣移転を含まなければならないことを示す（第3節定理1）。それゆえ，我々のメカニズムは（プランナーから主体と主体からプランナーを除いて）主体間の貨幣移転を許すとしても，我々の結果は Glazer and Ma の結果の不完全情報バージョンであると見なされうる。

以下この論文は次のように整理される。第2節ではフォーマルなモデルが与えられる。第3節では移転のないベイズ的誘因両立なメカニズムを議論する。第4節では，事後的に効率的で，一時的に個人合理的であり，しかも移転がバランスするベイズ的誘因両立なメカニズムを提示する。そして第5節では，有限なタイプの場合に，事後的に効率的で，事後的に個人合理的であり，しかも移転がバランスするベイズ・メカニズムの存在を示す。

2. モ デ ル

一つの分割できない物件（“賞品”）を二人（あるいはそれ以上）の経済主体のうちの一人にプランナーが割り当てるという問題を考える。この物件についての主体 i の評価 t_i は主体 i だけに知られているが，この t_i は T_i 上の分布関数 F_i をもつ独立な確率変数であることは共通の知識である。ただし，$T_i(\subset R_+)$ は主体 i の可能な評価の集合である。それぞれの経済主体はプランナーにとってのその物件の価値 $c(\geq 0)$ を知っている。本論文の結論は任意の正の c に容易に一般化できるから $c=0$ と仮定する。（第4節注意4.2と第5節系5.2を見よ。）また二人の経済主体を仮定するが，これもまた任意の有限人数に容易に一般化できる。（第4節注意4.3を見よ。）

これらの二人の主体はその物件を誰が受け取り，いくらの貨幣が主体間で移転されるべきかを決めるためにメカニズムに参加する。直接メカニズムでは，すべての主体は自らの評価を同時にプランナーに報告し，プランナーはその物件の受け取り人と主体間での貨幣移転の額を決定する。このようなメカニズムは $T_1\times T_2$ 上の結果関数 (p, x) で記述される。ここで，

$$p(t_1, t_2)=(p_1(t_1, t_2), p_2(t_1, t_2)) \quad ただし \quad \sum_{i=1}^{2} p_i(t_1, t_2)=1, \quad p_i(t_1, t_2) \geq 0$$

は物件が主体1と2に与えられる確率であり，

$$x(t_1, t_2)=(x_1(t_1, t_2), x_2(t_1, t_2))$$

は主体1が t_1 を主体2が t_2 を報告するときの主体1と2への貨幣移転である。

直接メカニズム (p, x) がベイズ的誘因両立であるとは，他人が正直に報告するとき各タイプの各プレイヤーが正直に報告したいということである。すなわち，

$$U_1(t_1; t_1) \geq U_1(t_1; \hat{t}_1) \quad \forall t_1, \hat{t}_1 \in T_1$$

$$U_2(t_2; t_2) \geq U_2(t_2; \hat{t}_2) \quad \forall t_2, \hat{t}_2 \in T_2$$

ということである。ただし，

$$U_1(t_1; \hat{t}_1)=t_1\int_{s\in T_2} p_1(\hat{t}_1, s)\, dF_2(s)+\int_{s\in T_2} x_1(\hat{t}_1, s)\, dF_2(s)$$

$$U_2(t_2; \hat{t}_2)=t_2\int_{s\in T_1} p_2(s, \hat{t}_2)\, dF_1(s)+\int_{s\in T_1} x_2(s, \hat{t}_2)\, dF_1(s)$$

である。$U_i(t_i; \hat{t}_i)$ とは主体 i が $\hat{t}_i$ を報告するときの i の一時的期待効用である。表面原理（たとえば，Gibbard (1973), Myerson (1979), Dasgupta, Hammond and Maskin (1979)）により，ベイズ的誘因両立な直接メカニズムに注意を限定することで，一般性をまったく失わない。そのメカニズムをこれからは単にベイズ・メカニズムと呼ぶ。

それぞれの主体がメカニズムに参加するのを促進するには，そうすることでどの主体もある意味でよりよくならなければならない。二つの異なる個人合理性の概念がこの論文では用いられる。メカニズムが一時的に個人合理的であるとは，すべての i と $t_i \in T_i$ にたいして

$$U_i(t_i; t_i) \geq 0$$

となることである。つまり，主体が自らの評価を知るが他人の評価を知らないときに，その主体の期待効用は非負でなければならないということである。

メカニズムが事後的に個人合理的であるとは，すべての i と $(t_1, t_2) \in T_1 \times T_2$ たいして，

$$t_i p_i(t_1, t_2)+x_i(t_1, t_2) \geq 0$$

となることである。つまり，どのようなタイプ t_1, t_2 が実現してもそれぞれの主体は非負の効用を受け取るということである。

事後的効率性が要求するのは，どのようなタイプが実現しても，物件はより評価の高い主体に与えられるということである。こうして，メカニズムが事後的に効率的であるとは，

$$p_1(t_1, t_2)=\begin{cases} 1 & (t_1 > t_2 \text{ のとき}) \\ 0 & (t_1 < t_2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となることである。

主体とプランナーの間での貨幣移転にたいして二つの異なるタイプの制約を導入する。メカニズムが移転なしであるとは，すべての t_1, t_2 と i について

$$x_i(t_1, t_2)=0$$

となることである。

メカニズムは移転がバランスしているといわれるのは，すべての t_1 と t_2 について

$$x_1(t_1, t_2)+x_2(t_1, t_2)=0$$

となることである。移転がバランスしているメカニズムでは，移転は主体間で許されるがプランナーは主体の集合から少しの貨幣をも集めることもできないし補助金を与えることもできない。

3．移転のない最善のメカニズムの不可能性

この節では移転なしのメカニズムに関して二つの問題が扱われる。第一は，貨幣移転のないメカニズムで事後的効率性を達成できるか？というものである。このタイプの問題は完全情報のフレームワークでは Glazer and Ma (1989) によって持ち出され肯定的に答えられた。しかしながら，我々のような不完全情報のフレームワークでは答は否である。

定理 1　主体 1 の物件にたいする評価をそれぞれ½の確率で u 又は w とし，主体 2 の評価を確率 1 で ν とする。ただし，$u<\nu<w$ である。このとき，移転のない事後的に効率的なベイズ・メカニズムは存在しない。

証明：　(p, x) を移転のない事後的に効率的なベイズ・メカニズムとする。このメカニズムは移転がないので，すべての t_1, t_2 について $x(t_1, t_2)=0$ である。このメカニズムがベイズ的誘因両立であるためには

$$U_1(u; u)=u\cdot p_1(u, \nu)\geq u\cdot p_1(w, \nu)=U_1(u; w)$$

かつ

$$U_1(w; w)=w\cdot p_1(w, \nu)\geq w\cdot p_1(u, \nu)=U_1(w; u)$$

である。それゆえに

$$p_1(u, \nu)=p_1(w, \nu) \tag{1}$$

である。しかしながら，メカニズムの事後的効率性は

$$p_1(u, \nu)=0 \text{ かつ } p_1(w, \nu)=1$$

を要求するが，これは(1)と矛盾する。 ∎

第二の問題は，移転がないならば最善のパフォーマンスを与えるのはどのメカニズムか？という

ものである。答えは，各主体に平等なチャンスのあるくじがプランナーの設計できる最善の移転のないベイズ・メカニズムである。メカニズムが平等にチャンスのあるくじメカニズムであるとは，すべての t_1, t_2 について

$$p_1(t_1, t_2)=p_2(t_1, t_2)=1/2 \text{ かつ } x_1(t_1, t_2)=x_2(t_1, t_2)=0$$

となることである。平等にチャンスのあるくじメカニズムは明らかにベイズ的誘因両立であり事後的に個人合理的である。それは事後的に効率的でないのであるが，次のような意味で最善である。

定理 2　$T_1=T_2=[a, b]$ であり $(t_1, t_2)\in T_1\times T_2$ とする。このとき，平等にチャンスのあるくじメカニズムを一時的パレート優越する移転のないベイズ・メカニズムは存在しない。

証明：メカニズム (p, x) が主体1についてベイズ的誘因両立性を満たすので，すべての $t_1, \hat{t}_1$ にたいして

$$U_1(t_1; t_1)=t_1\int_a^b p_1(t_1, s_2)f_2(s_2)\,ds_2 \geq t_1\int_a^b p_1(\hat{t}_1, s_2)f_2(s_2)\,ds_2$$

である。だから，すべての $t_1, \hat{t}_1$ について，

$$\int_a^b p_1(t_1, s_2)f_2(s_2)\,ds_2=\int_a^b p_1(\hat{t}_1, s_2)f_2(s_2)\,ds_2$$

である。同様にして，主体2については，すべての $t_2, \hat{t}_2$ にたいして

$$\int_a^b p_2(s_1, t_2)f_1(s_1)\,ds_1=\int_a^b p_2(\hat{t}_1, s_2)f_1(s_1)\,ds_1$$

が従う。それゆえ，

$$\begin{aligned}U_1(t_1; t_1)&=t_1\int_a^b p_1(t_1, s_2)f_2(s_2)\,ds_2\\&=t_1\int_a^b\left(\int_a^b p_1(t_1, s_2)f_2(s_2)\,ds_2\right)f_1(t_1)\,dt_1\end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}U_2(t_2; t_2)&=t_2\int_a^b p_2(s_1, t_2)f_1(s_1)\,ds_1\\&=t_2\int_a^b\left(\int_a^b p_2(s_1, t_2)f_1(s_1)\,ds_1\right)f_2(t_2)\,dt_2\end{aligned}$$

である。もしメカニズム (p, x) が (t_1, t_2) において平等にチャンスのあるくじメカニズムを一時的パレート優越するならば，一般性を失うことなく

$$U_1(t_1; t_1)>\frac{1}{2}t_1 \text{ かつ } U_2(t_2; t_2)\geq\frac{1}{2}t_2$$

となる。このとき，

$$\int_a^b \int_a^b p_1(s_1, s_2) f_2(s_2) f_1(s_1)\, ds_1\, ds_2 > \frac{1}{2} \quad \text{かつ}$$
$$\int_a^b \int_a^b p_2(s_1, s_2) f_1(s_1) f_2(s_2)\, ds_1\, ds_2 \geq \frac{1}{2}$$
となり，すべての s_1, s_2 にたいして $p_1(s_1, s_2)+p_2(s_1, s_2)=1$ であるから，これは矛盾である。 ∎

注意3.1 定理2における性質をもつベイズ・メカニズムは Holmstrom and Myerson (1983) で一時的に誘因効率的と呼ばれている。

主体間の移転は許されるがバランスしていることを要するならば，次の節で示すように，事後的効率性と一時的個人合理性がともに達成される。さらに，各主体の評価の分布が同一（すなわち，$F_1=F_2$）であるならば，我々の提案するメカニズムは事後的個人合理性を満たすだけでなく平等にチャンスのあるくじメカニズムを一時的にパレート優越する。

4．一時的に個人合理的で，最善のメカニズム

この節では，事後的に効率的で一時的に個人合理的な配分をインプリメントする，簡潔で移転のバランスしたベイズ・メカニズムを導入する。プランナーの側の移転のバランスを要求するので，売り手が買い手から貨幣を引き出す，セカンド・プライス・オークションのようなオークション・メカニズムは候補とは考えられない。しかしながら，我々は次のような簡潔なメカニズムを提案する。

定理 3 $T_1=T_2=[a, b]$ ただし $b \geq a \geq 0$ とする。メカニズム

$$p_1(t_1, t_2)=1 \qquad t_1>t_2 \text{ のとき}$$
$$\qquad =0 \qquad t_1 \leq t_2 \text{ のとき}$$
$$x_1(t_1, t_2)=-\int_a^{t_1} s\, dF_2(s)+\int_a^{t_2} s\, dF_1(s)$$
$$x_2(t_1, t_2)=-x_1(t_1, t_2)$$

はベイズ的誘因両立で，移転がバランスし，事後的に効率的かつ一時的に個人合理的である。

さらに，すべての i について $F_i=F$ であり，F が厳密に増加であるならば，このメカニズムは事後的に個人合理的であり，かつ，平等にチャンスのあるくじメカニズムを一時的パレート優越する。すなわち，すべての t_1, t_2 について

$$U_1(t_1; t_1)>\frac{1}{2} t_1 \text{ かつ } U_2(t_2; t_2)>\frac{1}{2} t_2$$

である。

証明： このメカニズムは

$$
\begin{aligned}
&U_1(t_1;\, t_1) - U_1(t_1;\, \hat{t}_1) \\
&\quad = t_1 \int_a^b p_1(t_1,\, t_2)\, dF_2(t_2) + \int_a^b x_1(t_1,\, t_2)\, dF_2(t_2) \\
&\qquad - t_1 \int_a^b p_1(\hat{t}_1,\, t_2)\, dF_2(t_2) - \int_a^b x_1(\hat{t}_1,\, t_2)\, dF_2(t_2) \\
&\quad = t_1 \int_a^{t_1} dF_2(s) - \int_a^{t_1} s\, dF_2(s) + \int_a^b \int_a^{t_2} s\, dF_1(s)\, dF_2(t_2) \\
&\qquad - t_1 \int_a^{\hat{t}_1} dF_2(s) + \int_a^{\hat{t}_1} s\, dF_2(s) - \int_a^b \int_a^{t_2} s\, dF_1(s)\, dF_2(t_2) \\
&\quad = \int_{\hat{t}_1}^{t_1} (t_1 - s)\, dF_2(s) \geq 0
\end{aligned}
$$

より主体1について誘因両立である。

主体2についての誘因両立性の証明は同様である。(p, x) の定義によりメカニズムは事後的に効率的であり移転がバランスしている。

メカニズムは

$$
\begin{aligned}
U_1(t_1;\, t_1) &= t_1 \int_a^{t_1} dF_2(s) - \int_a^{t_1} s\, dF_2(s) + \int_a^b \int_a^{t_2} s\, dF_1(s)\, dF_2(t_2) \\
&= \int_a^{t_1} (t_1 - s)\, dF_2(s) + \int_a^b \int_a^{t_2} s\, dF_1(s)\, dF_2(t_2) \geq 0
\end{aligned}
$$

より一時的に個人合理的である。

次に，各 $i=1, 2$ について $F_i = F$ ならば，x_1, x_2 の定義によってメカニズムの事後的合理性は直ちに得られる。最後に，各 $i=1, 2$ について $F_i = F$ で F が厳密に増加的であるならば，

$$
U_1(t_1;\, t_1) > \frac{1}{2}\, t_1
$$

となることを示すために，

$$
\begin{aligned}
G_1(t_1) &\equiv U_1(t_1;\, t_1) - \frac{1}{2}\, t_1 \\
&= \int_a^{t_1} (t_1 - s)\, dF(s) + \int_a^b \int_a^s u\, dF(u)\, dF(s) - \frac{1}{2}\, t_1
\end{aligned}
$$

とおく。すべての $t_1 \in T_1$ について $G_1(t_1) > 0$ であることを示す必要がある。$G_1'(t_1) = F(t_1) - \dfrac{1}{2}$ と F は厳密に増加的であるので，G は厳密に凸である。だから G は $F(t_1^*) = \dfrac{1}{2}$ とするとき t_1^* で最小値となる。それゆえに，$G_1(t_1^*) > 0$ を示せば十分である。F^{-1} が厳密に増加的であるから，

$$
\begin{aligned}
G_1(t_1^*) &= \int_a^{t_1^*} (t_1^* - s)\, dF(s) - \frac{1}{2}\, t_1^* + \int_a^b \int_a^s u\, dF(u)\, dF(s) \\
&= t_1^*\, F(t_1^*) - \int_a^{t_1^*} s\, dF(s) - \frac{1}{2}\, t_1^* + \int_a^b \int_a^s u\, dF(u)\, dF(s) \\
&= \int_a^b \int_a^s u\, dF(u)\, dF(s) - \int_a^{t_1^*} s\, dF(s) \\
&= \int_a^b s\, (1 - F(s))\, dF(s) - \int_a^{t_1^*} s\, dF(s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_0^1 (1-t)\,F^{-1}(t)\,dt-\int_0^{1/2} F^{-1}(t)\,dt \quad （ここで\ t=F(s)\ とおく）\\
&=\int_{1/2}^1 (1-t)\,F^{-1}(t)\,dt-\int_0^{1/2} tF^{-1}(t)\,dt\\
&=\int_0^{1/2} sF^{-1}(1-s)\,ds-\int_0^{1/2} sF^{-1}(s)\,ds\\
&=\int_0^{1/2} s\,[F^{-1}(1-s)-F^{-1}(s)]\,ds\\
&>0
\end{aligned}
$$

である。 ■

注意4.1　物件を初期に保有する一人の売り手と一人の買い手の間での事後的に効率的で，個人合理的な取引メカニズムの不可能性という Myerson and Satterthwaite (1983) の結果と比較すると，我々の可能性の帰結は物件に対する所有権が一人の主体には与えられておらず外部のプランナーに与えられているという事実に依存している。それゆえ，主体の個人合理性は我々のフレームワークにおいては満たされやすい。

注意4.2　プランナーが主体から c という額を徴収することによって移転をバランスさせることにのみ関心があるならば，プランナーにとっての物件 c が 0 という仮定は害にならない。$c\geq 0$ にたいして定理 3 のメカニズムを次のように修正する。

i．

$p_1(t_1, t_2)=1$　　$t_1>t_2,\ t_1\geq c$　のとき

$p_2(t_1, t_2)=1$　　$t_1<t_2,\ t_2\geq c$　のとき

プランナーが物件を保持　$t_1\leq c,\ t_2\leq c$　のとき

ii．

$x_1(t_1, t_2)=-\int_c^{\max\{t_1, c\}}(s-c)\,dF_2(s)+\int_c^{\max\{t_2, c\}}(s-c)\,dF_1(s)$

$x_2(t_1, t_2)=-x_1(t_1, t_2)$

iii．獲得者がいれば獲得者からプランナーが c を徴収

このとき，誘因両立性，一時的個人合理性ならびに移転のバランスの証明は定理 3 のそれと同様である。$c>0$ について，事後的効率性とは，いずれかの主体の評価が c より高いならばより高く評価する主体がその物件を獲得し，かつ，両方の主体の評価が c より低いならプランナーがそれを保持するということを意味している。それゆえ条件 i はベイズ・メカニズムの事後的効率性を保証している。

注意4.3　定理 3 は結果関数を次のように修正することで任意の $I(\geq 2)$ 人の主体に一般化され

うる。

$$p_i(t)=1 \quad (\text{すべての } k \neq i \text{ について } t_i > t_k \text{ のとき})$$
$$\quad =0 \quad (\text{上記以外のとき})$$
$$x_i(t)=-\int_a^{t_i}\cdots\int_a^{t_i} t^m_{-i}\, dF_1(t_1)\cdots dF_{i-1}(t_{i-1})\, dF_{i+1}(t_{i+1})\cdots dF_I(t_I)$$
$$+\frac{1}{I-1}\sum_{j\neq i}\int_a^{t_j}\cdots\int_a^{t_j} t^m_{-j}\, dF_1(t_1)\cdots dF_{j-1}(t_{j-1})\, dF_{j+1}(t_{j+1})\cdots dF_I(t_I)$$

ただし，$t=(t_1, \cdots, t_I)$ と $t^m_{-i}=\max\{t_1, \cdots, t_{i-1}, t_{i+1}, \cdots, t_I\}$ である。もし $I=2$ ならば，この結果関数は定理3のそれと同一であることに注意せよ。

5．事後的に個人合理的で，最善のメカニズム

第4節では事後的に効率的で一時的に個人合理的な配分をインプリメントする移転がバランスしたメカニズムを提示した。さらに，それぞれの主体の評価が同一の分布から引き出されるならば，そのメカニズムは事後的に個人合理的でもある。しかしながら，$F_1 \neq F_2$ ならば定理3に与えられたメカニズムは事後的に個人合理的でないことを容易に示せる。それゆえ，この節では，事後的効率性と移転のバランスに加えて事後的個人合理性を満たすベイズ・メカニズムを設計できるかということを調べる。

本節の分析のために T_i は有限であると仮定する。このとき，一般性を失うことなく，必要ならば確率ゼロの評価を加えることで T_i を各主体 i について同一の集合と仮定できる。そこで，すべての i にたいして，

$$T_i=\{\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n\} \quad \text{ただし} \quad 0\leq \nu_1<\nu_2<\cdots<\nu_n$$

とおくことができる。また二人の主体1と2のみが存在すると仮定する。主体1（あるいは主体2）にとっての評価 ν_i の確率を p_i（主体2については q_i）と書く。

この文脈では直接メカニズムは

$$(\pi_{ij}, \pi_{ij})^n_{i,j=1}$$

と定義されうる。ただし，主体1が ν_i を主体2が ν_j を報告するとき，主体1は確率 π_{ij} で主体2は確率 $1-\pi_{ij}$ でその物件を受け取り，x_{ij} は受け取る側から受け取らない側への貨幣移転である。

直接メカニズムが事後的に効率的であるとは，

$$\pi_{ij}=\begin{cases}1 & i>j \text{ のとき}\\ 0 & i\leq j \text{ のとき}\end{cases}$$

となることである。ここでの事後的効率性の定義の下では，両者が同じ評価を報告すると，物件は主体2のものとなることに注意する。明らかに，タイの場合には，主体1が物件を得るかまたはくじが使われる事後的に効率的な他のメカニズムが存在する。しかしながら，付加的な性質をもつ事後的に効率的なメカニズムの存在を示すことに関心があるので，ここでの効率性の定義を満たすメカニズムに注意を限定しよう。

事後的な効率的な直接メカニズムに対しては，主体1についてのベイズ的誘因両立性条件は次のように書くことができる。すなわち，すべての $i, k=1, \cdots, n$ に対して

$$\mathrm{IC}^1(i,k):\sum_{j=1}^{i-1}(v_i-x_{ij})\,q_j+\sum_{j=i}^{n}x_{ij}\,q_j\geq\sum_{j=1}^{k-1}(v_i-x_{kj})\,q_j+\sum_{j=k}^{n}x_{kj}\,q_j$$

である。$\mathrm{IC}^1(i,k)$ の不等式は，タイプ v_i の主体1について，正直に報告することが v_k を報告することと少なくとも同じ大きさの期待効用を与えるということを意味する。誘因両立性の不等式のうちのいくつかは過多であることがわかる。たとえば，$\mathrm{IC}^1(i, i+2)$ は $\mathrm{IC}^1(i, i+1)$，$\mathrm{IC}^1(i+1, i+2)$ と $v_i<v_{i+1}$ という事実から直ちに従う結果である。一般に，各タイプが隣のタイプを模倣するインセンティブを持たないなら，より遠いタイプを模倣するインセンティブを持たない。

それゆえに，過多な不等式を取り除くと，次の $2(n-1)$ 本の不等式が主体1についての事後的に効率的なメカニズムの誘因両立性にとって必要なすべてである。すなわち，すべての $i=1, 2, \cdots, n-1$ について，

$$\mathrm{IC}^1(i,i+1):\sum_{j=1}^{i-1}(v_i-x_{ij})\,q_j+\sum_{j=i}^{n}x_{ij}\,q_j\geq\sum_{j=1}^{i}(v_i-x_{i+1,j})\,q_j+\sum_{j=i+1}^{n}x_{i+1,j}\,q_j$$

$$\mathrm{IC}^1(i+1,i):\sum_{j=1}^{i}(v_{i+1}-x_{i+1,j})\,q_j+\sum_{j=i+1}^{n}x_{i+1,j}\,q_j\geq\sum_{j=1}^{i-1}(v_{i+1}-x_{ij})\,q_j+\sum_{j=i}^{n}x_{ij}\,q_j$$

である。

等価には，$i=1, 2, \cdots, n-1$ について

$$\mathrm{IC}^1(i,i+1):\sum_{j=1}^{i-1}(x_{ij}-x_{i+1,j})\,q_j+(-x_{ii}-x_{i+1,i})+\sum_{j=i+1}^{n}(-x_{ij}+x_{i+1,j})\,q_j\leq q_iv_i$$

$$\mathrm{IC}^1(i+1,i):\sum_{j=1}^{i-1}(x_{i+1,j}-x_{ij})\,q_j+(x_{i+1,i}+x_{ii})\,q_i+\sum_{j=i+1}^{n}(-x_{i+1,j}+x_{ij})\,q_j\leq -q_iv_{i+1}$$

である。

同様にして，主体2については，次の $2(n-1)$ 本の不等式が誘因両立性の条件である。すなわち，$j=1, 2, \cdots, n-1$ について，

$$\mathrm{IC}^2(j,j+1):\sum_{i=1}^{j}(\nu_j-x_{ij})\,p_i+\sum_{i=j+1}^{n}x_{ij}\,p_j\geq\sum_{i=1}^{j+1}(\nu_j-x_{i,j+1})\,p_i+\sum_{i=j+2}^{n}x_{i,j+1}\,p_i$$

$$\mathrm{IC}^2(j+1,j):\sum_{i=1}^{j+1}(\nu_{j+1}-x_{i,j+1})\,p_i+\sum_{j+2}^{n}x_{i,j+1}\,p_i\geq\sum_{i=1}^{j}(\nu_{j+1}-x_{ij})\,p_i+\sum_{i=j+1}^{n}x_{ij}\,p_j$$

である。$\mathrm{IC}^2(j,k)$ の不等式は，タイプ ν_j の主体 2 について，正直に報告することが ν_k を報告することと少なくとも同じ大きさの期待効用を与えるということを意味する。

等価には，$j=1,2,\cdots,n-1$ にたいして，

$$\mathrm{IC}^2(j,j+1):\sum_{i=1}^{j}(x_{ij}-x_{i,j+1})\,p_i+(-x_{j+1,j}-x_{j+1,j+1})\,p_{j+1}+\sum_{i=j+2}^{n}(-x_{ij}+x_{i,j+1})\,p_i\leq-p_{i+1}\nu_j$$

$$\mathrm{IC}^2(j+1,j):\sum_{i=1}^{j}(x_{i,j+1}-x_{ij})\,p_i+(x_{j+1,j+1}+x_{j+1,j})\,p_{j+1}+\sum_{i=j+2}^{n}(-x_{i,j+1}+x_{ij})\,p_i\leq-p_{i+1}\nu_{j+1}$$

である。

事後的に効率的なメカニズムでは高い評価をする主体が物件を受け取るから，事後的に効率的なメカニズムが事後的に個人合理的であるといわれるのは，すべての $i,j=1,2,\cdots,n$ について

$$0\leq x_{ij}\leq\max\{\nu_i,\nu_j\}$$

となることである。この不等式はどのタイプが実現しても物件を受け取る側は受け取らない側へゼロよりも大きいが受け取らない側よりも小さい額を支払わなければならないことを意味する。

次に，より強い形式の事後的個人合理性，すなわち，すべての i,j について

$$\mathrm{IR}(i,j):0\leq x_{ij}\leq\nu_i$$

という条件を満たすメカニズムが存在することを実際に示す。

事後的に個人合理的で，事後的に効率的かつ移転のバランスするメカニズムの存在を示すためには，次の不等式

$$\left(\mathrm{IC}^1(i,i+1),\mathrm{IC}^1(i+1,i)\right)_{i=1}^{n-1},\ \left(\mathrm{IC}^2(j,j+1),\mathrm{IC}^2(j+1,j)\right)_{j=1}^{n-1},\ (\mathrm{IR}(i,j))_{i,j=1}^{n}$$

を満たす $(x_{ij})_{i,j=1}^{n}$ の存在を示すことだけが必要である。

定理 4　事後的に効率的で，事後的に個人合理的でかつ移転がバランスするベイズ的誘因両立なメカニズムが存在する。

証明は二者択一の定理の適用であるから，それは付録におかれる。

第 4 節のように，プランナーが物件にたいして c という価値を持つとき，次の系が定理 4 の一

般化となる。$c(\geq 0)$ について，事後的効率性は，いずれかの主体の評価が c より高いならばより高く評価する主体がその物件を獲得し，かつ，両方の主体の評価が c より低いならプランナーがそれを保持するということを意味している。また，この文脈では，移転のバランスはプランナーが主体から正確に c を徴収することを要求する。

系 5　$c \geq 0$ にたいして，事後的に効率的で，事後的に個人合理的でかつ移転がバランスするベイズ的誘因両立なメカニズムが存在する。

証明はまた付録におく。

注意5.1　公共財のある経済では，事後的に効率的で，予算がバランスするベイズ・メカニズムは必ずしも一時的に個人合理的とは限らないことはよく知られている（Laffont and Maskin (1979)）。我々のモデルでプランナーの価値 c を物件をつくるコストと解せば，単一の分割できない私的財を配分するという状況は公共財を配分する状況とは劇的に異なる。系 5 は事後的に効率的で，事後的に個人合理的でかつ予算のバランスする，私的財を配分するベイズ・メカニズムを設計できることを示す。

Groves and ledyard (1987) は，有限な主体が存在する古典的な経済では，誘因両立性の概念が完全情報ナッシュ均衡あるいは支配戦略均衡のどちらであっても，誘因両立で事後的に効率的でかつ個人合理的なメカニズムを設計するときには私的財と公共財には差異がないことを示した。しかしながら，我々の結果は，有限な主体の場合，ベイズ的誘因両立で事後的に効率的でかつ個人合理的なメカニズムを設計するときには私的財と公共財には差異があることを示している。

A　付録

定理 4 の証明：　非負の実数 $(x_{ij})^n_{i,j=1}$ のうちで，$i=1,2,\cdots,n-1$ について

$$\mathrm{IC}^1(i,i+1): \sum_{j=1}^{i-1}(x_{ij}-x_{i+1,j})\,q_j+(-x_{ii}-x_{i+1,i})+\sum_{j=i+1}^{n}(-x_{ij}+x_{i+1,j})\,q_j \leq -q_i\nu_i$$

$$\mathrm{IC}^1(i+1,i): \sum_{j=1}^{i-1}(x_{i+1,j}-x_{ij})\,q_j+(x_{i+1,i}+x_{ii})\,q_i+\sum_{j=i+1}^{n}(-x_{i+1,j}+x_{ij})\,q_j \leq -q_i\nu_{i+1}$$

となり，$j=1,2,\cdots,n-1$ について，

$$\mathrm{IC}^2(j,j+1): \sum_{i=1}^{j}(x_{ij}-x_{i,j+1})\,p_i+(-x_{j+1,j}-x_{j+1,j+1})\,p_{j+1}+\sum_{i=j+2}^{n}(-x_{ij}+x_{i,j+1})\,p_i \leq -p_{j+1}\nu_j$$

$$\mathrm{IC}^2(j+1,j): \sum_{i=1}^{j}(x_{i,j+1}-x_{ij})\,p_i+(x_{j+1,j+1}+x_{j+1,j})\,p_{j+1}+\sum_{i=j+2}^{n}(-x_{i,j+1}+x_{ij})\,p_i \leq -p_{j+1}\nu_{j+1}$$

となり，かつ，

$$\mathrm{IR}(1,\, j):\quad x_{1j} \le v_1 \ \text{ for } j=1, 2, \cdots, n$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{IR}(n,\, j):\quad x_{nj} \le v_n \ \text{ for } j=1, 2, \cdots, n$$

となるものをさがす。

これを

$$Ax \le b \tag{2}$$

のように書くことができる。ただし，$x=(x_{11}, \cdots, x_{1n}, \cdots, x_{n1}, \cdots, x_{nn})$ であり，A と b は $4(n-1)+n^2$ の列を持ち A は n^2 の行を持つ。(行列 A とベクトル b の例は以下に従う。証明を読むあいだその例を参照するのが役に立つだろう。)

A の最初の $2(n-1)$ 列は $(\mathrm{IC}^1(i, i+1), \mathrm{IC}^1(i+1, i))_{i=1}^{n-1}$ の左辺に相当する。A の次の $2(n-1)$ 列は $(\mathrm{IC}^2(j, j+1), \mathrm{IC}^2(j+1, j))_{i=1}^{n-1}$ の左辺に相当し，最後の n^2 列は $(\mathrm{IR}(1, j))_{j=1}^{n}, \cdots, (\mathrm{IR}(n, j))_{j=1}^{n}$ に相当する。ベクトル b は同様に配列されている。

一つの例として $n=4$ のときの行列 A とベクトル b は次のようである。

$$b'=(-q_1v_1,\ q_1v_2, -q_2v_2,\ q_2v_3, -q_3v_3,\ q_3v_4, -p_2v_1,\ p_2v_2, -p_3v_2,\ p_3v_3, -p_4v_3,\ p_4v_4,\\ v_1,\ v_1,\ v_1,\ v_1,\ v_2,\ v_2,\ v_2,\ v_2,\ v_3,\ v_3,\ v_3,\ v_3,\ v_4,\ v_4,\ v_4,\ v_4,\ )$$

$$A=\left[\begin{array}{cccccccccccccccc}
-q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_4 & -q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & & & & & & & & \\
q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_4 & & & & & & & & \\
 & & & & q_1 & -q_2 & -q_3 & -q_4 & -q_1 & -q_2 & q_3 & q_4 & & & & \\
 & & & & -q_1 & q_2 & q_3 & q_4 & q_1 & q_2 & -q_3 & -q_4 & & & & \\
 & & & & & & & & q_1 & q_2 & -q_3 & -q_4 & -q_1 & -q_2 & -q_3 & q_4 \\
 & & & & & & & & -q_1 & -q_2 & q_3 & q_4 & q_1 & q_2 & q_3 & -q_4 \\
p_1 & -p_1 & 0 & 0 & -p_2 & -p_2 & 0 & 0 & -p_3 & p_3 & 0 & 0 & -p_4 & p_4 & 0 & 0 \\
-p_1 & p_1 & 0 & 0 & p_2 & p_2 & 0 & 0 & p_3 & -p_3 & 0 & 0 & p_4 & -p_4 & 0 & 0 \\
0 & p_1 & -p_1 & 0 & 0 & p_2 & -p_2 & 0 & 0 & -p_3 & -p_3 & 0 & 0 & -p_4 & p_4 & 0 \\
0 & -p_1 & p_1 & 0 & 0 & -p_2 & p_2 & 0 & 0 & p_3 & p_3 & 0 & 0 & p_4 & -p_4 & 0 \\
0 & 0 & p_1 & -p_1 & 0 & 0 & p_2 & -p_2 & 0 & 0 & p_3 & -p_3 & 0 & 0 & -p_4 & -p_4 \\
0 & 0 & -p_1 & p_1 & 0 & 0 & -p_2 & p_2 & 0 & 0 & -p_3 & p_3 & 0 & 0 & p_4 & p_4 \\
1 & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & 1 & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right]$$

ただし空欄となっているすべての要素は 0 である。

(2)について非負の解ベクトル x が存在することを証明するために，そうでないとしてみよう。このとき次のような矛盾を得る。そのような x が存在しないのであるから，二者択一の定理（たとえば Gale (1960, p.47の定理2.8) を参照）により，

$$yA \geq 0 \text{ かつ } yb < 0 \tag{3}$$

を満たす非負の $(4(n-1)+n^2)$-ベクトル $y=((\lambda_i^1, \mu_i^1)_{i=1}^{n-1}, (\lambda_i^2, \mu_i^2)_{i=1}^{n-1}, (\delta_{1j})_{j=1}^n, \cdots, (\delta_{nj})_{j=1}^n)$ が存在する。

不等式 $yA \geq 0$ は，すべての $i, j=1, \cdots, n$ について

$$\mathrm{E}(i,j): \begin{array}{ll} \delta_{ij} \geq q_j(\lambda_{i-1}^1 - \mu_{i-1}^1 - \lambda_i^1 + \mu_i^1) + p_i(-\lambda_{j-1}^2 + \mu_{j-1}^2 + \lambda_j^2 - \mu_j^2) & i > j \text{ のとき} \\ \delta_{ij} \geq q_j(-\lambda_{i-1}^1 + \mu_{i-1}^1 + \lambda_i^1 - \mu_i^1) + p_i(\lambda_{j-1}^2 - \mu_{j-1}^2 - \lambda_j^2 + \mu_j^2) & i \leq j \text{ のとき} \end{array}$$

と同値である。ただし，$k=1, 2$ について $\lambda_0^k = \mu_0^k = \lambda_n^k = \mu_n^k = 0$ である。

次に，

$$\begin{aligned} yb &= \sum_{i=2}^n \left[q_{i-1}(-\lambda_{i-1}^1 \nu_{i-1} + \mu_{i-1}^1 \nu_i) + p_i(-\lambda_{i-1}^2 \nu_{i-1} + \mu_{i-1}^2 \nu_i) + \left(\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \right) \nu_i \right] + \left(\sum_{j=1}^n \delta_{1j} \right) \nu_1 \\ &\geq \sum_{i=2}^n \left[q_{i-1}(-\lambda_{i-1}^1 + \mu_{i-1}^1) \nu_i + p_i(-\lambda_{i-1}^2 + \mu_{i-1}^2) \nu_i + \left(\sum_{j=1}^n \delta_{i+1,j} \right) \nu_{j+1} \right] + \delta_{21} \nu_2 \\ &\geq \sum_{i=3}^n \left[q_{i-1}(-\lambda_{i-1}^1 + \mu_{i-1}^1) \nu_i + p_i(-\lambda_{i-1}^2 + \mu_{i-1}^2) \nu_i + \left(\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \right) \nu_i \right] \\ &\quad + q_1(-\lambda_1^1 + \mu_1^1) \nu_2 + p_2(-\lambda_1^2 + \mu_1^2) \nu_2 + q_1(\lambda_1^1 - \mu_1^1 - \lambda_2^1 + \mu_2^1) \nu_2 + p_2(\lambda_1^2 - \mu_1^2) \nu_2 \\ &\qquad \text{（不等式 E(2, 1) を用いる）} \\ &\geq \sum_{i=3}^n \left[q_{i-1}(-\lambda_{i-1}^1 + \mu_{i-1}^1) \nu_i + p_i(-\lambda_{i-1}^2 + \mu_{i-1}^2) \nu_i + \left(\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \right) \nu_i \right] + q_1(-\lambda_2^1 + \mu_2^1) \nu_2 \\ &\geq 0 \qquad \text{（補助定理 7 による）} \end{aligned}$$

であることに注目する。これは(3)との矛盾である。これで証明は完了である。 ∎

$3 \leq k \leq n$ について

$$\alpha_k = \sum_{i=3}^k \left[q_{i-1}(-\lambda_{i-1}^1 + \mu_{i-1}^1) \nu_i + p_i(-\lambda_{i-1}^2 + \mu_{i-1}^2) \nu_i + \left(\sum_{j=1}^n \delta_{ij} \right) \nu_i \right] + q_1(-\lambda_2^1 + \mu_2^1) \nu_2$$

とおく。

補助定理 6　すべての $i, j=1, 2, \cdots, n$ について $\mathrm{E}(i,j)$ が成り立つとする。このとき，$3 \leq k \leq n$ にたいして

$$\alpha_k \geq \left(\sum_{i=1}^{k-1} q_i\right)(-\lambda_k^1+\mu_k^1)\nu_k \qquad \lambda_{k-1}^1 \geq \mu_{k-1}^1 \text{ のとき}$$

$$\alpha_k \geq \left(\sum_{i=k}^{n} q_i\right)(\lambda_k^1-\mu_k^1)\nu_k \qquad \lambda_{k-1}^1 < \mu_{k-1}^1 \text{ のとき}$$

である。

証明： 帰納法で証明する。$k=3$ のとき，$\lambda_2^1 \geq \mu_2^1$ とすれば，$\nu_3 \geq \nu_2$ より，

$$\begin{aligned}
\alpha_3 &\geq [q_2(-\lambda_2^1+\mu_2^1)+p_3(-\lambda_2^2+\mu_2^2)+\delta_{31}+\delta_{32}]\nu_3+q_1(-\lambda_2^1+\mu_2^1)\nu_2 \\
&\geq [q_2(-\lambda_2^1+\mu_2^1)+p_3(-\lambda_2^2+\mu_2^2)+(q_1+q_2)(\lambda_2^1-\mu_2^1-\lambda_3^1+\mu_3^1) \\
&\quad +p_3(\lambda_1^2-\mu_1^2)+p_3(-\lambda_1^2+\mu_1^2+\lambda_2^2-\mu_2^2)]\nu_3+q_1(-\lambda_2^1+\mu_2^1)\nu_2 \\
&= (q_1+q_2)(-\lambda_3^1+\mu_3^1)+q_1(\lambda_2^1-\mu_2^1)(\nu_3-\nu_2) \\
&\geq (q_1+q_2)(-\lambda_3^1+\mu_3^1)
\end{aligned}$$

である。$\lambda_2^1 < \mu_2^1$ ならば，

$$\begin{aligned}
\alpha_3 &\geq \left[q_2(-\lambda_2^1+\mu_2^1)+p_3(-\lambda_2^2+\mu_2^2)+\left(\sum_{j=3}^{n}\delta_{3j}\right)\right]\nu_3+q_1(-\lambda_2^1+\mu_2^1)\nu_2 \\
&\geq \left[q_2(-\lambda_2^1+\mu_2^1)+p_3(-\lambda_2^2+\mu_2^2)+\left(\sum_{j=3}^{n} q_j\right)(-\lambda_2^1+\mu_2^1+\lambda_3^1-\mu_3^1)\right. \\
&\quad \left.+p_3\sum_{j=3}^{n}(\lambda_{j-1}^2-\mu_{j-1}^2-\lambda_j^2+\mu_j^2)\right]\nu_3+q_1(-\lambda_2^1+\mu_2^1)\nu_2 \\
&\geq \left(\sum_{j=3}^{n} q_j\right)(\lambda_3^1-\mu_3^1)
\end{aligned}$$

である。よって $k=3$ のとき，命題は正しい。

$k-1$ について命題が正しいものとしよう。k について命題が正しいことを示す。はじめに $\alpha_k = \alpha_{k-1}+\beta_k$ に注意する。ただし，

$$\beta_k = \left[q_{k-1}(-\lambda_{k-1}^1+\mu_{k-1}^1)+p_k(-\lambda_{k-1}^2+\mu_{k-1}^2)+\left(\sum_{j=1}^{n}\delta_{kj}\right)\right]\nu_k$$

である。k についての命題の最初の不等式を示すために，$\lambda_{k-1}^1 \geq \mu_{k-1}^1$ と仮定する。このとき，

$$\begin{aligned}
\beta_k &\geq \left[q_{k-1}(-\lambda_{k-1}^1+\mu_{k-1}^1)+p_k(-\lambda_{k-1}^2+\mu_{k-1}^2)+\sum_{j=1}^{k-1}\delta_{ij}\right]\nu_k \\
&= \left[q_{k-1}(-\lambda_{k-1}^1+\mu_{k-1}^1)+p_k(-\lambda_{k-1}^2+\mu_{k-1}^2)\right. \\
&\quad \left.+\left(\sum_{i=1}^{k-1} q_i\right)(\lambda_{k-1}^1-\mu_{k-1}^1-\lambda_k^1+\mu_k^1)+p_k\sum_{j=1}^{k-1}(-\lambda_{j-1}^2+\mu_{j-1}^2+\lambda_j^2-\mu_j^2)\right]\nu_k \\
&= \left(\sum_{i=1}^{k-2} q_i\right)(\lambda_{k-1}^1-\mu_{k-1}^1)\nu_k+\left(\sum_{i=1}^{k-1} q_i\right)(-\lambda_k^1+\mu_k^1)\nu_k
\end{aligned}$$

である。考察するべき二つのケースがある。

1） $\lambda^1_{k-2} \geq \mu^1_{k-2}$ ならば，$\lambda^1_{k-1} \geq \mu^1_{k-1}$ かつ $\nu_k \geq \nu_{k-1}$ より

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \alpha_{k-1}+\beta_k \\ &\geq \left(\sum_{i=1}^{k-2} q_i\right)(-\lambda^1_{k-1}+\mu^1_{k-1})\nu_{k-1}+\left(\sum_{i=1}^{k-2} q_i\right)(\lambda^1_{k-1}-\mu^1_{k-1})\nu_k \\ &\quad +\left(\sum_{i=1}^{k-1} q_i\right)(-\lambda^1_k+\mu^1_k)\nu_k \qquad \text{命題が } k-1 \text{ について正しいことより} \\ &\geq \left(\sum_{i=1}^{k-1} q_i\right)(-\lambda^1_k+\mu^1_k)\nu_k\end{aligned}$$

である。

2） $\lambda^1_{k-2} < \mu^1_{k-2}$ ならば，$\lambda^1_{k-1} \geq \mu^1_{k-1}$ かつ ν_k，$\nu_{k-1} \geq 0$ であるから，

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \alpha_{k-1}+\beta_k \\ &\geq \left(\sum_{i=k-1}^{n} q_i\right)(\lambda^1_{k-1}-\mu^1_{k-1})\nu_{k-1}+\left(\sum_{i=1}^{k-2} q_i\right)(\lambda^1_{k-1}-\mu^1_{k-1})\nu_k \\ &\quad +\left(\sum_{i=1}^{k-1} q_i\right)(-\lambda^1_k+\mu^1_k)\nu_k \qquad \text{命題が } k-1 \text{ について正しいことより} \\ &\geq \left(\sum_{i=1}^{k-1} q_i\right)(-\lambda^1_k+\mu^1_k)\nu_k\end{aligned}$$

である。よってどちらのケースでも $\lambda^1_{k-1} \geq \mu^1_{k-1}$ ならば

$$\alpha_k \geq \left(\sum_{i=1}^{k-1} q_i\right)(-\lambda^1_k+\mu^1_k)\nu_k \tag{4}$$

である。

k についての命題の二番目の不等式を示すために，$\lambda^1_{k-1} < \mu^1_{k-1}$ と仮定する。

$$\begin{aligned}\beta_k &\geq \left[q_{k-1}(-\lambda^1_{k-1}+\mu^1_{k-1})+p_k(-\lambda^2_{k-1}+\mu^2_{k-1})+\sum_{j=k}^{n}\delta_{kj}\right]\nu_k \\ &= \Bigg[q_{k-1}(-\lambda^1_{k-1}+\mu^1_{k-1})+p_k(-\lambda^2_{k-1}+\mu^2_{k-1}) \\ &\quad +\left(\sum_{i=k}^{n} q_i\right)(-\lambda^1_{k-1}+\mu^1_{k-1}+\lambda^1_k-\mu^1_k)+p_k\sum_{j=k}^{n}(\lambda^2_{j-1}-\mu^2_{j-1}-\lambda^2_j+\mu^2_j)\Bigg]\nu_k \\ &= \left(\sum_{i=k-1}^{n} q_i\right)(-\lambda^1_{k-1}+\mu^1_{k-1})\nu_k+\left(\sum_{i=k}^{n} q_i\right)(\lambda^1_k-\mu^1_k)\nu_k\end{aligned}$$

に注意する。再び，考察するべき二つのケースが存在する。

1） $\lambda^1_{k-2} \geq \mu^1_{k-2}$ ならば，$\lambda^1_{k-1} < \mu^1_{k-1}$ かつ ν_k，$\nu_{k-1} \geq 0$ より，

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \alpha_{k-1}+\beta_k \\ &\geq \left(\sum_{i=1}^{k-2} q_i\right)(-\lambda_{k-1}^1+\mu_{k-1}^1)\nu_{k-1}+\left(\sum_{i=k-1}^{n} q_i\right)(-\lambda_{k-1}^1+\mu_{k-1}^1)\nu_k \\ &\quad +\left(\sum_{i=k}^{n} q_i\right)(\lambda_k^1-\mu_k^1)\nu_k \qquad \text{命題が } k-1 \text{ について正しいことより} \\ &\geq \left(\sum_{i=k}^{n} q_i\right)(\lambda_k^1-\mu_k^1)\nu_k\end{aligned}$$

である。

2) $\lambda_{k-2}^1<\mu_{k-2}^1$ ならば，$\lambda_{k-1}^1<\mu_{k-1}^1$ かつ $\nu_k \geq \nu_{k-1}$ より

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \alpha_{k-1}+\beta_k \\ &\geq \left(\sum_{i=k-1}^{n} q_i\right)(\lambda_{k-1}^1-\mu_{k-1}^1)\nu_{k-1}+\left(\sum_{i=k-1}^{n} q_i\right)(-\lambda_{k-1}^1+\mu_{k-1}^1)\nu_k \\ &\quad +\left(\sum_{i=k}^{n} q_i\right)(\lambda_k^1-\mu_k^1)\nu_k \qquad \text{命題が } k-1 \text{ について正しいことより} \\ &\geq \left(\sum_{i=k}^{n} q_i\right)(\lambda_k^1-\mu_k^1)\nu_k\end{aligned}$$

である。よってどちらのケースでも $\lambda_{k-1}^1<\mu_{k-1}^1$ ならば

$$\alpha_k \geq \left(\sum_{i=k}^{n} q_i\right)(\lambda_k^1-\mu_k^1)\nu_k \tag{5}$$

である。ゆえに，(4)と(5)により命題は k について正しい。 ∎

補助定理 7　すべての $i, j=1, 2, \cdots, n$ について $\mathrm{E}(i, j)$ が成り立つとする。このとき $\alpha_n \geq 0$ である。

証明：$\lambda_n^1=\mu_n^1=0$ であるから，補助定理 6 より $\alpha_n \geq 0$ である。 ∎

系 5 の証明：はじめに次の修正された問題を考える。

$i=1, \cdots, n$ について $w_i=\nu_i-c$，$i^*=\min\{i: w_i \geq 0\}$ とおき，

$$T_1'=T_2'=\{w_{i^*}, w_{i^*+1}, \cdots, w_n\}$$

とする。このとき，定理 4 により，T_1' と T_2' に関するベイズ的誘因両立性，事後的効率性，事後的個人合理性を満足するような獲得する側から獲得しない側への非負の移転 $\{x_{ij}\}_{i,j=i^*}^{n}$ を得る。

主体 1 が ν_i を主体 2 が ν_j を報告するとき，主体 k に物件が与えられる確率を π_{ij}^k であらわし，z_{ij} を獲得する側からしない側への移転としよう。いま，メカニズム

$$(\pi^1_{ij}, \pi^2_{ij}, z_{ij})^n_{i,j=1}$$

を

i．$i^* = \min\{i : v_i \geq c\}$

ii．$\pi^1_{ij}=1$　　　　　$i \geq i^*, i > j$ のとき

$\pi^2_{ij}=1$　　　　　$j \geq i^*, i \leq j$ のとき

プランナーが物件を保持　$i < i^*, j < i^*$ のとき

iii．プランナーはもし存在すれば獲得する主体から c を徴収

iv．

$$z_{ij}=\begin{cases} x_{ij} & i \geq i^*,\ j \geq i^* \text{ のとき} \\ x_{i,i^*} & i \geq i^*,\ j < i^* \text{ のとき} \\ x_{i^*,i} & i < i^*,\ j \geq i^* \text{ のとき} \\ 0 & i < i^*,\ j < i^* \text{ のとき} \end{cases}$$

のように定義する。v_{i^*} は物件を受け取ることによって利益を得られる最小の評価のタイプである。獲得する主体が v_{i^*} より高い評価を報告し，獲得しない主体が v_{i^*} より低い評価を報告するなら，z_{ij} の定義より，メカニズムは獲得しない主体をその評価が v_{i^*} であるかのように扱う。

タイプ v_i についてのベイズ的誘因両立性条件は，$v_i \geq v_{i^*}$ ならば，$\{x_{ij}\}^n_{i,j=i^*}$ の選び方から直に従う。他方，v_{i^*} より低いタイプ v_i については，v_{i^*} より低い評価を報告することが同一の結果を与える。$\{x_{ij}\}^n_{i,j=i^*}$ の選択により，タイプ v_{i^*} は自らよりも高い評価を報告するインセンティブを持たないし，v_{i^*} よりも低いタイプも v_{i^*} より高い評価を報告するインセンティブを持たない。よって，v_{i^*} より低いタイプ v_i も正直に報告することを望む。したがってこのメカニズムはベイズ的誘因両立である。

最後に，メカニズムがベイズ的誘因両立であるから，iiより事後的効率性が従い，iiとivより事後的個人合理性が従う。移転のバランスもiiiより従う。これで証明完了である。 ∎

参考文献

(1) Cramoton, P., Gibbons R. and Klemperer, P. 1987. Dissolving a partnership efficiently. *Econometrica* 55: 615-632.

(2) D'Aspremont, C., and Gerard-Varet, L.A. 1979. Incentives and incomplete information. *Journal of Public Economics* 11: 25-45.

(3) Gale, D. 1960. Theory of Linear Economic Models. New York: McGraw-Hill.（和田貞夫，山谷恵俊訳『線型経済学』，1964年，紀伊国屋書店）.

(4) Gibbard, A. 1973. Manipulation of voting schemes. *Econometrica* 41: 587-602.

(5) Glazer, J. and Ma, C. A. 1989. Efficint allocation of a "prize"- King Solomon's dilemma. *Games and Economic Behavior* 1: 222-233.

(6) Groves, T. and Ledyard, J. O. 1987. Incentive compatibility since 1972, in *Information, Incentives and Economic Mechanisms*. T. Groves, R. Radner and S. Reiter Eds. University of

Minnesota Press.
(7) Guler, K., Plott, C. and Vuong, Q. 1994. A study of zero-out auctions: testbed experiments of a process of allocating private rights to the use of public property. *Economic Theory* 4: 67-104.
(8) Holmstrom, B. and Myerson, R. 1983. Efficient and durable decision rules with incomplete information. *Econometrica* 51: 1799-1819.
(9) Laffont, J.-J. and Maskin, E. 1979. A differential approach to expected utility maximizing mechanisms, in *Aggregation and Revelation of Preferences*. J.-J Laffont Ed. North-Holland, Amsterdam.
(10) Ledyard, J. and Palfrey, T. 1994. Voting and lottery draft as efficient public goods mechanisms. *Review of Economic Studies* 61: 327-355.
(11) Mailath, G. and Postlewaite, A. 1990. Asymmetric information bargaining problems with many agents. *Review of Economic Studies* 57: 351-367.
(12) Makowski, L. and Mezzetti, C. 1993. The Possibility of effcient mechanisms for trading an indivisible object. *Journal of Economic Theory* 59: 451-465.
(13) Myerson, R. 1979. Incentive compatibility and the bargaining problem. *Econometrica* 47: 61-73.
(14) Myerson, R., and Satterthwaite, M. 1983. Efficient mechanisms for bilateral trading. *Journal of Economic Theory* 28: 265-281.
(15) Rob, R. 1989. Pollution claim settlements with private information. *Journal of Economic Theory* 47: 307-333.

翻訳：**吉　岡　忠　昭**
(神奈川大学経済学部専任講師)