Title	戦略的操作不可能な費用分担について
Sub Title	On strategy-proof cost sharing
Author	Moulin, Hervé 岡崎, 哲郎
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1995
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.88, No.1 (1995. 4) ,p.3- 24
JaLC DOI	10.14991/001.19950401-0003
Abstract	
Notes	小特集 : The First Decentralization Conference in Japan
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19950401-0003

「三田学会雑誌」88巻1号（1995年4月）

戦略的操作不可能な費用分担について

エルヴェ・ムーラン
（デューク大学）

1．戦略的操作不可能性と結託による戦略的操作不可能性

戦略的操作不可能な（strategy-proof）社会的選択関数の概念は，稀少資源の配分を意図とした誘因両立的なメカニズムに関する議論において中心的な役割を演じてきた。戦略的操作不可能な社会的選択関数とは，各個人の選好についての情報が（その個人にとっての）私的情報であり，各個人の行動が（特に，各個人が結託を形成して彼らのメッセージを戦略的に協調させることができないといった形で）分権化されているような環境の下で，各個人から真の選好の表明を引き出すものである。戦略的操作不可能性が考案されてから（Hurwicz (1972), Gibbard (1973)）約20年経つが，その間インプリメンテイションに関する数多くの文献は，そのような環境の下では戦略的操作不可能な社会的選択関数のみが実行可能（implementable）であることを示してきた（Barbera and Jakson (1993), Barbera (1994) 参照)。

戦略的操作不可能なメカニズムは各個人が自分の選好以外の情報を持っているいないにかかわらずその個人に対して直接の誘因を与えることから，魅力的である。つまり他人と自分の行動を協調させることができない限り，他人の選好についての情報は彼にとって意味を持たない。しかし，もし一部の個人が相互の選好を知り得て，メカニズムの中で表明するメッセージを協調させることができれば，多くの興味深い戦略的操作不可能なメカニズムが実際には戦略的操作の影響を受けてしまう。このような状況の例として最重要なものは公共的な意志決定に対するピヴォタル・メカニズム（Clarke (1971)）やその一般化されたもの全般であろう（Groves (1973), Green and Laffont (1979) 参照)。これらのメカニズムは典型的には，選ばれた公共事業の費用を賄う以上の税金を集めるため，全ての個人からなる（全体の）結託によって操作されてしまうのである。

結託による戦略的操作不可能な（coalition strategy-proof）社会的選択関数とは，各個人の自分の選好に関する虚偽の表明による操作が不可能である（つまり通常の意味での戦略的操作不可能な社会的選択関数である）だけでなく，個人間の任意の結託の虚偽の表明によっても操作が不可能なもの

である。これを満たすメカニズムは個人の選好についての情報が私的であるないにかかわらず，また個人の行動が分権化されているいないにかかわらず実行可能である。このことから，私は，環境における未知のものが各個人の選好だけの場合，結託による戦略的操作不可能な社会的選択関数が，あらゆる情報についての仮定（特に各個人の選好に関する情報が完全に私的である場合，それが共有知識である場合，またそれらの中間的な場合もすべて含む）の下で，支持し得る形で「立憲的に」設計（"constitutional" design）できる唯一つの資源配分メカニズムであると考えるのである。

この論文では，譲渡可能効用を持つ協力ゲームの標準的なモデルを含む広範囲の費用分担問題に対する，結託による戦略的操作不可能な社会的選択関数の集合の性質を明らかにしたい。

結託による戦略的操作不可能な社会的選択関数の正式な議論は（投票の文脈での）純粋公共財の配分の問題にほとんど限定されてきたが，それは一次元の可能な結果に対する選好が単峰性を満たすような環境の下で（コンドルセ基準を満たす）多数決投票が結託による戦略的操作不可能なメカニズムになるという最初の観察に従ったものである（Barbera (1994) は戦略的操作不可能な投票についての文献の素晴らしいサーベイを与えてくれる)。一方で私的財の配分の文脈における結果はほとんどない。

交換経済（そして／または非生産財の公正な分割）に関しては，最近 Barbera and Jackson (1993) が全ての戦略的操作不可能なメカニズムの性質を明らかにした（彼らは匿名性と個人合理性の仮定を付け加えているが，これらの仮定が二人の主体の場合には必要ないことも示している)。そしてちょうど単峰性を満たす選好の下での投票の場合のように，戦略的操作不可能なメカニズムは同時に結託による戦略的操作不可能であることが示されるのである。

（私的財のみの）生産を伴う経済については，今までのところ戦略的操作不可能なメカニズムについての論文が二つ存在し，この二つともにここでの議論に関係を持っている。Satterthwaite and Sonnenschein (1981) は全ての戦略的操作不可能なメカニズムが局所的に非循環性を示すことを明らかにし，Shenker (1992) は（Moulin and Shenker (1992) の戦略面の分析を敷延しながら）結託による戦略的操作不可能なメカニズムの大域的な構造を導出することに成功した（ここでは匿名性の仮定が加えられている)。これら二つの論文は社会的選択関数自体の正則性（特に連続微分可能性）に強く依存している点に注意が必要である。このような仮定は技術的には仕方のないものであるが，規範的側面からは正当化しにくい。Barbera and Jackson (1993) の注目すべき特徴は（連続性を含めた）正則性の仮定をまったく必要としないことである。

この論文では，正則性や匿名性の仮定を使わずに，結託による戦略的操作不可能な費用分担方法を完全な形で特徴づける。我々のモデルは財が分割不可能な単位に従って生産される点と各主体が一種類のみの財を（何単位か）消費する点で，Satterthwaite and Sonnenschein (1981) や Shenker (1992) よりかなり単純なものとなっている。

次節では具体例を用いて，我々のモデルと（正式には第5節で述べられる）主要定理の直観的内容

を記述する。この定理は**限界貢献メカニズム**（marginal contribution mechanism）の集合を，結託による戦略的操作不可能性の性質および消費者主権と非搾取という二つの副次的な条件によって特徴づけるものである（この前者の条件は，生産物に対する自らの需要が満たされることを主体が常に保証されていることを意味し，後者の条件は，何も手に入れない主体は何も払わないことを意味する）。ここで以下のことを強調したい。 i ）所与の技術の下で数多くの限界貢献メカニズムが存在する（さらにその数は，技術が許す生産の上限が大きくなるに従って急速に増大する）。 ii ）限界貢献メカニズムは匿名性を満たさないという意味で本質的に不平等である（つまりそれは対等な主体を平等に扱わない）。 iii）この不平等性は，技術が許す生産の上限が大きくなるに従って無視し得る程に小さくなる。 iv）匿名性をほとんど満たしている限界貢献メカニズムでさえも，公理論的な費用分担についての多数の文献が推奨する（Shapley-Shubik や Aumann-Shapley の費用分担方法のような）方法とは明らかに異なる。

第 3 節で限界貢献メカニズムの正式な定義が述べられる。そして，これに対応する需要ゲームの戦略面での性質が第 4 節で分析される。第 5 節ではこのような方法を（対応する社会的選択関数の）結託による戦略的操作不可能性の性質によって特徴づける。定理等の証明の詳細は Moulin (1995) を参照せよ。

2．限界貢献メカニズムの具体例

n 個の異なった財を生産する技術を考える。各財は分割不可能な単位に従って生産され，技術が許す財 i の生産の上限を Q_i で表す（$1 \leqq Q_i < +\infty$）。各財 i にはその財のみに興味を持つある一人の主体 i が対応している（彼女はそれ以外の財を全く望まない）。（各主体 i が財 i を q_i 単位消費する）需要の組み合わせ $(q_1, \cdots, q_n)$ に対して，全体の費用 $C(q_1, \cdots, q_n)$ は n 人の参加者によって分担されなければならない。

全ての財が同じである場合は費用関数が $C(q_1 + \cdots + q_n)$ の形に書ける点に注意せよ。このことから我々のモデルは財の間のあらゆる程度の異質性をも考慮に入れることが可能である。

この論文では一貫して以下のことを仮定する。（1） $C(0)=0$ である。（2） 費用 C は各財の需要 q_i とともに増加する。（3） 全ての i と j について，財 j に関する限界費用は q_i とともに増加する。言い換えれば限界費用は逓増し，費用は補完的である。これらの仮定の役割についての議論は注意 5 を参照せよ。

各主体 i は消費の組み合わせ (q_i, x_i) に対する凸で単調な選好を持つ（選好は q_i について非減少，x_i について非増加であり，凸性の仮定については正式には次節で述べられる）。主体 i の選好擬順序を R_i で表す。

我々の目的は**社会的選択関数**（以下では s.c.f. と略記する）を分析することである。ここの文脈で

は，s.c.f. S は各個人の任意の選好の組み合わせ $(R_1, \cdots, R_n)$ に対して実現可能な結果 $S(R_1, \cdots, R_n)=((q_1, x_1), \cdots, (q_n, x_n))$ を対応させるものである（全ての i について $0 \leqq q_i \leqq Q_i$, $0 \leqq x_i$, $\Sigma_i x_i = C(q_i, \cdots, q_n)$ である）。すると，あらゆる戦略的操作不可能な s.c.f. は**費用分担メカニズム**（以下では c.s.m. と略記する）によって記述できることが分かる。ここで c.s.m. とは各個人の任意の需要の組み合わせ $(q_1, \cdots, q_n)$ に対して n 人の技術の利用者に全体の費用 $C(q_1, \cdots, q_n)$ を割り当てるメカニズムであり，主体 i の費用負担は x_i で任意の i について $x_i \geqq 0$ かつ $\Sigma_i x_i = C(q_1, \cdots, q_n)$ を満たすものである。

ここで c.s.m. は選好には依存せず，さまざまな財の各個人の需要にのみ依存する点に注意してもらいたい。s.c.f. と c.s.m. の関係を以下で説明しよう。

ある c.s.m. ξ を所与として，任意の選好の組み合わせ $(R_1, \cdots, R_n)$ に対して**需要ゲーム**を一つずつ対応させる。これは各主体 i が，（他の主体の需要がすでに選ばれたものとして）メカニズム ξ の下で自分の費用負担がどれだけに決められるかを考えながら，戦略的に自分の需要 q_i, $0 \leqq q_i \leqq Q_i$ を選ぶ標準形ゲームである。この標準形ゲームが，全ての（凸で単調な）選好の組み合わせに対して唯一の強均衡（strong equilibrium）の結果 $((q_1, x_1), \cdots, (q_n, x_n))$ を持つものと仮定しよう。すると $(R_1, \cdots, R_n)$ から $((q_1, x_1), \cdots, (q_n, x_n))$ への写像は結託による戦略的操作不可能な s.c.f. になるのである（この結果はよく知られたものである。Dasgupta，Hammond and Maskin (1979) または Shenker (1993) を参照せよ）。その逆に（各個人の選好の同じ領域上で定義された）結託による戦略的操作不可能な任意の s.c.f. は同様の方法である c.s.m. ξ から得られることも分かる。つまりある ξ があって，任意の $(R_1, \cdots, R_n)$ に対して ξ に対応する需要ゲームが唯一の強均衡の結果を持ち，この結果がちょうど $S(R_1, \cdots, R_n)$ となるようにできるのである。この逆命題が第 5 節における我々の主要定理の一部である。

ここで結託による戦略的操作不可能な s.c.f. に対応した「うまく機能する」費用負担メカニズムのいくつかの具体例について述べよう。簡単化のためにこのようなものを結託による戦略的操作不可能な c.s.m. と呼ぶ。生産が許容する上限が各財とも 1（つまり任意の i について $Q_i=1$）である最も単純な場合から始める。この場合には，費用関数 C は 2^n-1 個の実数 $C(T)$，つまり $T \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$ である任意の非空な結託 T 一つ一つに対する $C(T)$ で与えられる。そして，$C(T)$ は T に含まれる全ての主体の需要に応えかつ彼らの需要だけに応える（任意の $i \in T$ に対して $q_i=1$ でそれ以外は $q_i=0$）ための費用と解釈される。ここで，限界費用に関する仮定より協力ゲーム C が優モジュラ性を満たす，つまり $C(T)+C(R) \leqq C(T \cup R)+C(T \cap R)$ となる点に注意してもらいたい。

以上のことから c.s.m. の選択は譲渡可能効用を持つ協力ゲームの**値**（value）の選択と同値となる。協力ゲームの公理的な理論では（Shapley 値や核といった）いくつもの代替的な値を選ぶに当たり，（公平性，整合性，加法性のような）規範的な議論を用いる。しかしここでは我々は全く異なっ

た立場をとる。つまり対応する需要ゲームにおいて各プレイヤーが「正直な」戦略的行動を取るような協力ゲームの値を求めるのである。すると，このような特性を満足する値は，対等な者を平等に扱うという最も基本的な公平性の要求を決して満たさないことが分かる。このことを見るためには，二人プレイヤーの場合を考えれば十分であろう。このときには通常の値が全て一致する。すなわち $n=2$ の場合の標準的な値は，各プレイヤーが別々に負担した場合の費用の差額を二人で均等に分割するようなものとなるのである。

$Q_1=Q_2=1$ とした次の c.s.m. がそれである。

$$q_1=q_2=0: x_1=x_2=0$$
$$q_1=1,\ q_2=0: x_1=C(1,0),\ x_2=0$$
$$q_1=0,\ q_2=1: x_1=0,\ x_2=C(1,0)$$
$$q_1=q_2=1: x_1=\frac{1}{2}\{C(1,1)+C(1,0)-C(0,1)\}$$
$$x_2=\frac{1}{2}\{C(1,1)+C(0,1)-C(1,0)\} \qquad (1)$$

もし目的が公平性であればこれが受け入れざるを得ない費用分担メカニズムとなるが，これが誘因両立性の観点からどの程度うまくいっているかをここで確かめてみよう。全くうまくいっていないことを確認するのはそれほど難しいことではない。そのために次の費用関数を考え，

$$C(1,0)=C(0,1)=10\,;\,C(1,1)=30$$

二人の主体が準線形の効用関数を持ち，自分の財 1 単位の価値を＄13と評価しているとする（主体 i は財 i のみに興味を持つ点に注意せよ）。そして標準的な解（実際には二つの財について対称性を満たす解なら何でもよい）を用いれば，共同費用 $C(1,1)$ は均等に分割されることになる。したがって需要ゲームは以下のように書ける（各成分は初期配分 $q_i=0,\ x_i=0$ からの効用の純増加分を表す）。

主体 2 ＼ 主体 1	$q_1=0$	$q_1=1$
$q_2=1$	3 / 0	−2 / −2
$q_2=0$	0 / 0	0 / 3

このゲームはよく知られた両性の闘いゲームの構造を持っているため，二つの強均衡の結果 $((q_1=0,\ q_2=1)$ と $(q_1=1,\ q_2=0))$ をこれ以上精緻化することはできない。これは不満足な戦略的性質を持つゲームの典型である（特にこれは戦略の支配関係で解を求めることができない）。次に標準的な費用分担メカニズム(1)の代わりに，主体 1 は自分一人で負担した場合の費用を常に支払い，主体 2 は主体 1 のその費用で賄えない分の費用を支払う形の**限界貢献**メカニズムを考えてみる。

$q_1 = q_2 = 0 : x_1 = x_2 = 0$

$q_1 = 1,\ q_2 = 0 : x_1 = C(1, 0),\ x_2 = 0$

$q_1 = 0,\ q_2 = 1 : x_1 = 0,\ x_2 = C(1, 0)$

$$q_1 = q_2 = 1 : x_1 = C(1, 0),\ x_2 = C(1, 1) - C(1, 0) \tag{2}$$

このメカニズムは各個人の選好の任意の組み合わせに対して望ましい戦略的性質を持つ需要ゲームを導出するものである。実際，主体1は支配戦略を持っている（彼の利得は主体2の戦略にまったく依存しない）。そして，もし(2)で決められる価格で財を買うことと何も買わない（そして何も払わない）こととが無差別である主体がいなければ，このゲームは唯一の Nash 均衡を持ち，それが強均衡にもなる。また，もし主体1が（価格 $C(1,0)$ を払って）買うことと何も買わないこととが無差別であれば二つの異なった Nash 均衡が現れるが，その内の一つだけが強均衡となる。それは（$C(1, 1) - C(1, 0)$ という高価格ではなく）$C(0, 1)$ という低価格の恩恵を主体2が受けられるようにするために主体1が需要を控えるという均衡である。もちろん，もし主体2がこの低価格でさえ購入することを望まなければ，均衡が二つ（($q_1=0,\ q_2=0$) と ($q_1=1,\ q_2=0$)）存在することになるが，これらは厚生の観点から見れば同じものである。

$n=2,\ Q_1 = Q_2 = 1$ の場合，我々の主要定理からは，（(2)によって与えられる c.s.m. とそこでの主体1と主体2の役割を逆転させた対称的な c.s.m. の）二つの限界貢献メカニズムが（上述のように各選好の組み合わせに対してその強均衡を対応させる写像を通じて）定義する**二つの s.c.f. だけが**，（消費者主権と非搾取という追加的な条件の下で）結託による戦略的操作不可能な s.c.f. であることが言える。この結果は，戦略的操作不可能な費用分担方式に対する我々の考察の出発点として期待はずれなものである。実際，（ある主体が自分一人で負担した場合の費用を支払い，他の主体はそれを越える分を支払うという形で）一人の主体に対して有利になるようなかなりの不平等を導入することによってのみ誘因両立性を獲得できる。つまり数値例から分かるように，このメカニズムは対等な主体を平等に扱っていないのである。加えて，利用可能なメカニズムは二つしかないので，メカニズム設計者の選択の余地は極めて小さい。

それでは，生産の上限が1である財が三つの場合，つまり $n=3,\ Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1$ の場合に移ろう。この場合，公正な費用分担メカニズムということでいくつかのものが考えられるが，その中では Shapley 値（Shapley (1853)）が最もしばしば支持される（Roth (1988) を参照せよ）。しかし二人の場合と同じ理由により，対等な主体を平等に扱うあらゆる費用分担方式は上述の数値例のように幾つかの均衡が競合する需要ゲームを導き出すのである。

我々の主要定理は（$n=3,\ Q_i=1$ の場合に）結託による戦略的操作不可能な s.c.f. を導き出す費用分担メカニズムをちょうど12個特定化する。主体1が自分一人で負担した場合の費用を支払い，主体2が次の増加分の費用を支払い，主体3が最後の増加分の費用を支払う限界貢献メカニズムを考

えよう。この c.s.m. は図 1 のような二元的なゲームの木で表現すると便利である。ここでプレイヤー i の左への移動が $q_i=0$ を意味し，右への移動が $q_i=1$ を意味している。

図　1

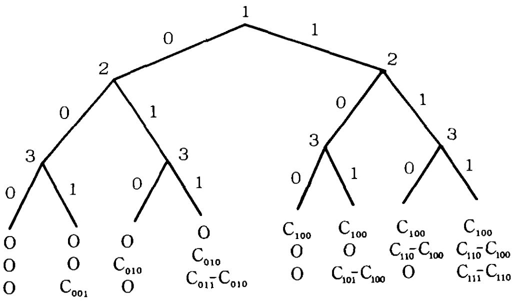
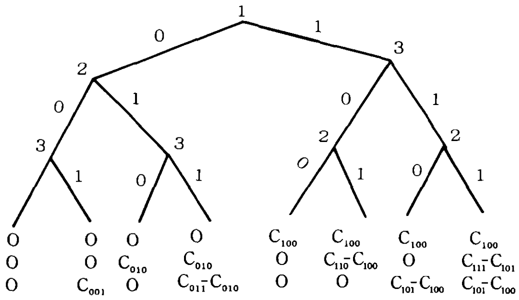


図　2



全ての主体が同時に需要を決める（同時手番の）需要ゲームの唯一の強均衡は，**図 1** で表されるゲームの部分ゲーム完全均衡を計算することによっても得られる（ただし，任意のプレイヤー i について，無差別の時には $q_i=0$ を選択するという仮定が必要である）。

$\{1, 2, 3\}$ に関する 6 種類の順序が図 1 のような c.s.m. を 6 種類作る。さらに，**図 2** を一例とする c.s.m. が 6 種類存在する。この c.s.m. では主体 1 は常に自分一人で負担した場合の費用を支払い，もし彼が $q_1=0$ を選択したならば 2， 3 の順番に主体 2 と主体 3 が限界貢献の分を支払い，もし彼が $q_1=1$ を選択したならば 3， 2 の順番に主体 2 と主体 3 が限界貢献の分を支払うことになる。この 2 と 3 の順番の入れ替えが需要ゲームの均衡を変えるかもしれないが，均衡の性質（強均衡の一意性など）はそのまま維持されることは容易に確認できる。

以上述べたことを繰り返すと，各財の上限が 1 の場合，結託による戦略的操作不可能な費用分担メカニズムはどれも主体間にかなりの非対称性を持ち込んでしまう。つまり一人の主体は（他の主体の選択にかかわらず）常に自分一人で負担した場合の費用を支払う一方，他の全ての主体は自分一人で負担した場合の費用を支払うか（費用の補完性 $\partial_{ij}(C)>0$ 故に）それよりも厳密に高い費用を支払うことになる。よってここでの結果は，対等な主体を平等に扱うという協力ゲームの公理的な理論から得られる規範的な値からは掛け離れたものになっている。さらにメカニズム設計者にとっての裁量の余地はとても限られたものである。

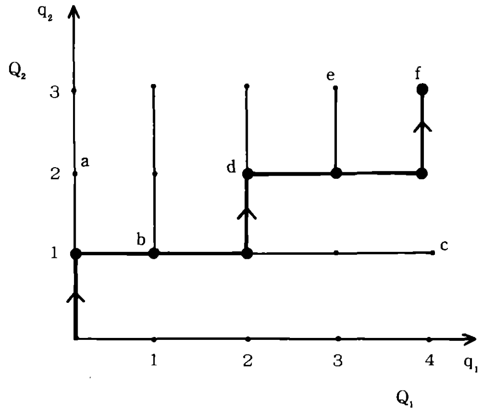
しかしながら，上限 Q_i が大きくなれば結託による戦略的操作不可能な c.s.m. の集合もより大きくなるので，この水を差すような結果も十分に和らげられるのである。つまり，上限 Q_i をすべて十分に大きくすれば，結託による戦略的操作不可能な c.s.m. のうちあるものは対等な主体を「ほとんど」平等に扱うようになる。

2 主体・ 2 財 $(n=2)$ で $Q_1=4$ と $Q_2=3$ の場合を考えよう。**図 3** には，$(0, 0)$ から (Q_1, Q_2) への単調経路 Γ によって特徴づけられた典型的な結託による戦略的操作不可能な c.s.m. が描かれている。経路 Γ 上の（b=(1, 1) や d=(2, 2), f=(4, 3) といった）需要の組み合わせ (q_1, q_2) に対しては，主体

の費用分担はその経路に沿った彼の限界貢献の合計として計算される。例えば次のようである。

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{b}=(1,1): x_1=C(1,1)-C(0,1)\,;\, x_2=C(0,1)\\
&\mathrm{d}=(2,2): x_1=C(2,1)-C(0,1)\,;\, x_2=C(0,1)+(C(2,2)-C(2,1))\\
&\mathrm{f}=(4,3): x_1=(C(2,1)-C(0,1))+(C(4,2)-C(2,2))\\
&\qquad\qquad x_2=C(0,1)+(C(2,2))-C(2,1)+(C(4,3)-C(4,2))
\end{aligned}
\tag{3}
$$

図　3



Γ 上にない需要の組み合わせ (q_1, q_2) に対する費用を計算するためには，Γ の一部を切り詰めて $(0,0)$ から (q_1, q_2) への単調経路を作ればよい。例えば $(0,0)$ から $\mathrm{c}=(4,1)$ への経路は，$(2,1)$ までは Γ に従い，その後は $(3,1)$ そして $(4,1)$ へと進む。これに対応する費用分担は限界貢献を計算することにより次のようになる。

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{c}=(4,1): x_1=C(4,1)-C(0,1)\,;\, x_2=C(0,1)\\
&\mathrm{e}=(3,3): x_1=(C(2,1)-C(0,1))+(C(3,2)-C(2,2))\\
&\qquad\qquad x_2=C(0,1)+(C(2,2)-C(2,1))+(C(3,3)-C(3,2))
\end{aligned}
\tag{4}
$$

この方法があらゆる凸の選好の組み合わせに対して「望ましい」需要ゲームを導き出すことを確かめるために，被支配戦略の逐次的除去を考えよう。プレイヤー2のゼロ単位の需要と1単位の需要に対する費用分担はプレイヤー1の戦略に依存しないことから，プレイヤー2は $q_2=0$ と $q_2=1$ のどちらかを除去できることが分かる。もし彼女が $(q_2=0,\ x_2=0)$ を $(q_2=1,\ x_2=C(0,1))$ よりも選好すれば，選好の凸性から彼女は $(q_2=0, x_2=0)$ をあらゆる $(q_2,\ x_2=C(0,q_2))$ よりも選好する。ここでもしプレイヤー2が q_2 を需要すれば，（費用の補完性 $\partial_{ij}(C)>0$ より）彼女の費用分担は**少なくとも** $C(0,q_2)$ となることに注意せよ。このことから，もし彼女が $(q_2=0,\ x_2=0)$ を $(q_2=1,\ x_2=C(0,1))$ よりも選好すれば，彼女の戦略 $q_2=0$ は（厳密な）支配戦略となる。また，逆に彼女が $(q_2=1,\ x_2=C(0,1))$ を選好するならば，被支配戦略 $q_2=0$ は除去され，$q_2\in\{1,\cdots,Q_2\}$，$q_1\in\{0,1,$

$\cdots, Q_1\}$ である縮小型ゲームが残される。この縮小型ゲームでも同様の議論を繰り返せば，次にプレイヤー1が自分の戦略 $q_1=0$ と $q_1=1$ のどちらかを除去でき，さらに議論を続けていける。このようにして需要ゲームは支配関係で解を求めることができ，（もし各プレイヤーが無差別の時に低い方の需要量を選択すると仮定すれば）その均衡は唯一の強均衡となる。この点については第4節の補題1を参照せよ。

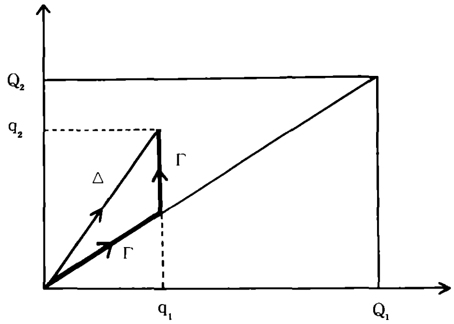
我々の主要定理から，2主体・2財の時の結託による戦略的操作不可能な s.c.f. は，上述の具体例と同じ方法で $(0,0)$ から (Q_1, Q_2) への単調経路によって表現されることが分かる。この場合，メカニズム設計者にとっての裁量の余地はかなり大きくなる（$\binom{Q_1+Q_2}{Q_1}$ 個の異なった経路が存在する）。そして Q_1 と Q_2 が大きくなれば，経路 Γ は $(0,0)$ から (Q_1, Q_2) への直線を近似できるようになる。この「極限」での c.s.m. が**図4**に描かれており，よく知られた Aumann-Shapley の費用分担メカニズムと比較されている（Taumann (1988) を参照せよ）。**図4**には $(0,0)$ から任意の需要の組み合わせ (q_1, q_2) への二つの単調経路 $\varDelta$ と Γ が描かれており，それぞれの費用分担 x_i は次のように計算される。

$$x_i=\int_{\varDelta}\frac{\partial C}{\partial q_i}(q)\,d\,q_i \quad \text{（Aumann-Shapley の c.s.m.）}$$

$$x_i=\int_{\Gamma}\frac{\partial C}{\partial q_i}(q)\,d\,q_i \quad \text{（結託による戦略的操作不可能な c.s.m.）}$$

上述のメカニズムは需要単調性という規範的な性質からも Aumann-Shapley の c.s.m. より望ましいものになりうる点に注意してもらいたい（Moulin (1994) を参照せよ）。

図　4



また，これら二つの方法を比較する数値例を作ることも可能である。

3．限界貢献メカニズムの定義

予備的定義と記号

木（tree）とはサイクルが無く始節と呼ばれる他と区別された節を持つ連結したグラフである。

有限の木 θ に対して，その始節を 0，終節の集合を W，非終節の集合を V で表す（節νは，ν 以外の節 w があって，0 から w への唯一の経路が ν を通過する場合に非終節と呼ばれる）。また，木の任意の二節 ν, ν' に対して，もし 0 からν'への（唯一の）経路がν'に到達する直前に ν に到達するなら，ν' を ν の後続節と呼ぶ。任意の $\nu\in V\cup W$ に対し，0から ν への経路は $P(\nu)=\{0=\nu_0, \nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_K=\nu\}$ で表されるが，ここで各 $k=0, \cdots, K-1$ に対して ν_{k+1} は ν_k の後続節である。

木は，任意の非終節がちょうど二つの後続節を持つ場合に**二元的**（binary）であるという。有限で二元的な木 θ と主体の集合 N が与えられたとき，**二元的なゲームの木**とは，μ を V から N への写像として，(θ, N, μ) のことを指す。ここで $\mu(\nu)=i$ は，節 ν で主体 i が行動をとることを意味している。また，主体 i が行動をとる非終節の集合を $V_i=\mu^{-1}(i)$ で表そう。そして任意の節 $\nu\in V\cup W$ に対して，主体 i が行動をとる節で 0 から ν への経路の上にあるものの集合を $V_i(\nu)=V_i\cap P(\nu)$ と書く。$P(\nu)$ は順序を伴った節の集合なので，$V_i(\nu)$ の中で 0 から最も離れた節を $V_i(\nu)$ の**最終**節と呼ぶ。最後に，二元的な木について，もし Vの任意の節の二つの後続節に「左」,「右」とラベルが付けられていれば，それを**有向**であると呼ぶ。これは正式には $(V\cup W)\backslash\{0\}$ から {左, 右} への写像で表現できる。

定義 1

ある主体の集合 Nと，各 i について Q_i が正の整数であるようなベクトル $(Q_1, \cdots, Q_n)$ を考える。そして，以下に述べる二つの同値な性質によって，有向で二元的な木の集合の部分集合 $\rho(Q_1, \cdots, Q_n)$ を定義する。(θ, N, μ) を有向で二元的な木とする。

性質 a：任意の $q=(q_1, \cdots, q_n)\in\otimes_i[0, Q_i]$ に対して，次のアルゴリズム

主体 i は $\nu\in V_i$ で，もし $|V_i(\nu)|\leqq q_i$ ならば右に移動し，

もし $|V_i(\nu)|\geqq q_i+1$ ならば左に移動する。

を適応すると，それによって 0 から終節 $w(q)$ への一つの経路を得る。このとき，写像 $q\to w(q)$ は $\otimes_i[0, Q_i]$ から Wへの全単写となる。

性質 b：各 $w\in W$ に対して

i. 任意の i について，$|P(w)|\leqq\Sigma_i Q_i$ かつ $1\leqq|V_i(w)|\leqq Q_i$

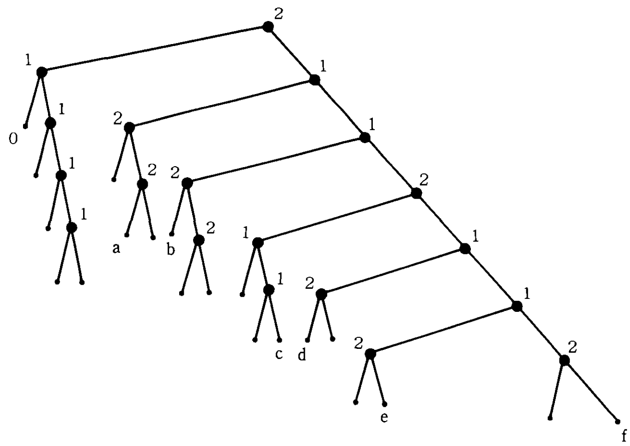
ii. 任意の i と任意の $\nu\in V_i(w)$ について

- もし ν が $V_i(w)$ の最終節でなければ，$P(w)$ 上での ν の後続節は右である。
- もし ν が $V_i(w)$ の最終節で**かつ** $|V_i(w)|\leqq Q_i-1$ であれば，$P(w)$ 上での ν の後続節は左である。

これら二つの性質が同値になることの（平易な）証明は，Moulin (1995) に載っている。図 1 と 2 は $\rho(1,1,1)$ に属する有向で二元的な木の例を表している。図 5 には $\rho(3,4)$ に属する有向で二

元的な木の例が描かれているが，これは図3での費用分担メカニズムに対応したものである（両者の関係は以下で説明される）。

図　5



以下に述べる定義1の重要な帰結について注意してもらいたい。まず，$\rho(Q_1,\cdots,Q_n)$ の任意の木は $(Q_1+1)\cdot\cdots\cdot(Q_n+1)$ 個の終節を持つ。そして，もし w が（性質aのアルゴリズムによって）需要の組み合わせ $(q_1,\cdots,q_n)$ に対応しているならば，

$$\text{任意の } i \text{ について，} |V_i(w)| = \min\{q_i+1,\ Q_i\} \tag{5}$$

となる。特に，全ての主体が常に左に進んだ場合の経路は長さが n（任意の i について $|V_i(w)|=1$）となり，全ての主体が常に右に進んだ場合の経路は長さが $\Sigma_i Q_i$（任意の i について $|V_i(w)|=Q_i$）となる。

それでは，$\rho(Q_1,\cdots,Q_n)$ に属する二元的なゲームの木に対応した費用分担メカニズムを定義しよう。

定義2　限界貢献費用分担メカニズム

$\rho(Q_1,\cdots,Q_n)$ に属する有向で二元的な木と，$\otimes_i[0,Q_i]$ 上で定義された費用関数 C を考える。任意の需要の組み合わせ $q=(q_1,\cdots,q_n)$ に対して，経路 $P(w(q))$ を（定義1の性質a参照），$K=\Sigma_i \min\{q_i+1,Q_i\}$ として

$$P(w(q))=\{0=\nu_0,\nu_1,\cdots,\nu_k,\cdots\nu_K=w(q)\}$$

と表す。そして，$\nu_k\in V_i(w(q))$ となる添字 k の集合を K_i と表記する。$K_1,\cdots,K_n$ が $\{1,2,\cdots,K-1\}$ の分割となっていることに注意してもらいたい。最後に第 i 成分が1でそれ以外が0である $\mathbf{N}^n$ のベクトルを e_i で表す。

ここで$\mathbf{N}^n$上の（つまり需要の組み合わせの空間上の）0からqへの単調経路$\gamma(q)$を次のように定義する。

$$\gamma(q)_0=0\,;\ \gamma(q)_{k+1}=\gamma(q)_k+e_i\ \ (k\in K_i\text{ かつ }\nu_{k+1}\text{ が }\nu_k\text{ の右にある場合})$$
$$=\gamma(q)_k\qquad (\nu_{k+1}\text{ が }\nu_k\text{ の左にある場合})\qquad (6)$$

そして主体i自身の費用分担を

$$x_i=\Sigma_{k\in Ki}\,[C(\gamma(q)_{k+1})-C(\gamma(q)_k)]\qquad (7)$$

と計算する。

この複雑な定義を，図3と5で表現されている費用分担メカニズム($n=2, Q_1=4, Q_2=3$)を用いて説明しよう。図3のdで表されている需要の組み合わせ(2,2)を考えてみる。

この方法の二元的なゲームの木による表現では，対応する終節w(2,2)は図5のdで表されている。そして，性質aのアルゴリズムが木の始節からこの終節への経路を正確に生成することを確認できる。つまり主体2と主体1がともに二度右に進み，それから左に進む。ここで重要なことは，主体iが右に進んだ場合，彼女は財iの需要を1単位増やしたとメカニズムでは解釈され，（上限Q_iに至っていない限り）彼女が後続のある節でさらに自分の需要を増やす機会を与えられるということである。もし彼女が左に進んだならば，彼女の需要は満たされたとメカニズムは解釈する。需要空間上での単調経路$\gamma(2,2)$は図3に描かれたとおりである。それはdまで「主要」経路Γを辿るものである（これは(6)から確認できる)。

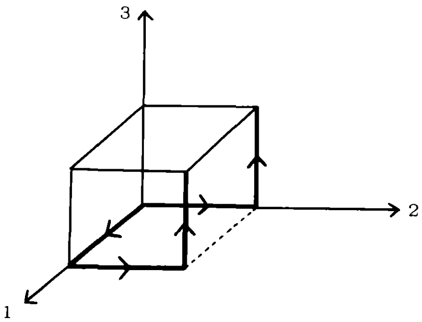
図3と5を見れば，（性質aで定義された）二元的な木の始節からの経路と需要空間上での単調経路との一対一の対応関係がさらに確認できる。ここで需要の組み合わせ(1,2),(1,1),(4,1),(3,3),(4,3)はそれぞれ a,b,c,e,f と記されている。

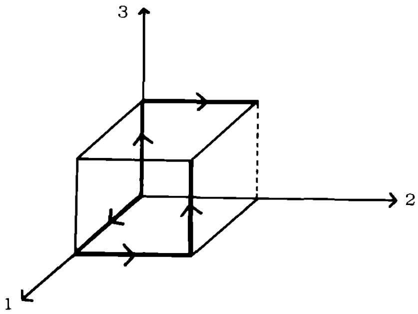
2主体・2財での問題では，限界貢献c.s.m.の表現としては，需要空間上における単調経路を用いることの方が有向で二元的な木を用いるよりも明らかに優れている。ここで，ある一つの((0,0)から(Q_1, Q_2)への）単調経路を決めることだけが必要である点に注意してもらいたい。というのもそれ以外の全ての（任意のqに対する(0,0)から(q_1, q_2)への）経路は後半を切り詰めることによって導き出される。そして（図3のΓで表されている）この主要経路はゲームの木では常に右に進む経路に対応している。

需要空間上での表現の方が有向で二元的な木を用いた表現よりも理解しやすいという事実は3主体・3財の場合でもたぶん真実であろう。これは図6と7で例示されており，それぞれ図1と2の二つのメカニズムを需要空間で表現したものである。しかし4主体・4財もしくはそれ以上の場合には，二元的なゲームの木だけが直観的な理解の助けとなる。

ここで，$\rho(Q_1, \cdots, Q_n)$に属する有向で二元的な木(θ, N, μ)をその任意の部分的木に関係づける，縮小的性質について述べる。まず，非終節$\nu\in V$に対して次のものを定義する。

図　6　　　　図　7





$\overline{q_i}=|V_i(\nu)|$ ($\nu\notin V_i$ の場合)；$\overline{q_i}=|V_i(\nu)|-1$ ($\nu\in V_i$ の場合)

$T=\{i\in N|$ 任意の $\nu_k\in V_i(\nu)$ に対して $\nu_k=\nu$ または ν_{k+1} が ν_k の右にある$\}$

ここで T は，節 ν において依然として「活動的な」(つまり，節 ν で需要している以上に需要を増やすかもしれない) 主体の集合と解釈できる。始節を ν とする部分ゲームの木が $\rho(Q_i-\overline{q_i}\,;i\in T)$ に含まれることを確認してもらいたい。

そして定義域を $\otimes_i[0,Q_i]$ とする費用関数 C に対して，定義域を $\otimes_T[0,Q_i-\overline{q_i}]$ とする費用関数 $\overline{C}$ を以下のように定義する。

任意の $q'\in\otimes_T[0,Q_i-\overline{q_i}]$ に対して，$\overline{C}(q')=C(\overline{q}+q')-C(\overline{q})$

すると，始節を ν とする部分ゲームの木を通じて $\otimes_T[0,Q_i-\overline{q_i}]$ 上で定義される限界貢献 c.s.m. $\overline{\xi}$ が，(7)によって定義されるもともとの $\otimes_i[0,Q_i]$ 上の c.s.m. ξ から次のようにして直接計算される。

$\overline{x}_i(q';\overline{C})=x_i(\overline{q}+q';C)-x_i(\overline{q};C)$

この証明は容易にできるので省略する。

注意 1

定義 2 より，限界貢献メカニズムの二つの単純な性質がすぐに分かる。まず，このメカニズムは非搾取を満足する。つまり $q_i=0$ なら $x_i=0$ となる。さらに需要単調性も満足する。つまりもし C が全ての財についての厳密な増加関数であれば，x_i も q_i についての増加関数となる。

注意 2

限界費用逓増と費用の補完性を仮定した場合でも，一般的な限界貢献方式においては，主体 i の

費用分担は $q_j(j\neq i)$ についての増加関数となるとは限らない。このことは，図 2 の c.s.m. と次の費用関数を考えてみればよい。

$$c_{000}=0;\ c_{100}=c_{010}=c_{001}=1;\ c_{101}=0;\ c_{110}=c_{101}=3;\ c_{011}=4;\ c_{111}=7$$

計算すると，$x_3(1,1,1)=3-1=2$ であるが，$x_3(0,1,1)=4-1=3$ である。

$\partial x_i/\partial q_j\geqq 0$ の性質（主体 i の費用分担が主体 j の需要について増加関数となること）は，限界貢献方式全体の中で我々の興味を引くある一群のものについては保証される。例として，$\rho(Q_1,\cdots,Q_n)$ に属する有向で二元的な木で，全ての主体が右に進む経路で完全に記述されるものを考えよう。すなわち，あらゆる経路 $P(w)$ が，全ての主体が常に右に進む標準的経路 $P(w^*)$（つまり需要 $(Q_1,\cdots,Q_n)$ に対応する経路）から，主体 i が左に進んだ場合にそれ以降の主体 i の $P(w^*)$ での行動をすべて削除することを繰り返すことから得られるものである。特に，定義 2 で示された単調経路 $\gamma(q)$ の需要空間上での像は，経路 $\gamma(Q)$ $(Q=(Q_1,\cdots,Q_n))$ の標準的射影によって得られることが分かる。このようにして得られる方式の集合を**簡潔な**限界貢献方式の集合と呼ぶ。2 主体・2 財の場合の貢献方法は全て簡潔であることに注意してもらいたい。

注意 3　限界貢献方式の数

（定義 1 と 2 で与えられる）限界貢献方法の数は，メカニズム設計者にとっての裁量の余地の指標となる。この数を $\lambda(Q_1,\cdots,Q_n)$ で表す。つまりこれは（定義 1 の）$\rho(Q_1,\cdots,Q_n)$ の濃度である。

(θ,N,μ) を $\rho(Q_1,\cdots,Q_n)$ の要素として，最初に行動をとる主体を i と呼び $(0\in V_i)$，左の枝以降および右の枝以降のそれぞれの部分的木を θ_l と θ_r としよう。つまり $\theta_l(\theta_r)$ の始節は 0 の左（右）側の後続節である。このとき定義 1 より，$(\theta_l, N\backslash\{i\},\mu)$ は $\rho(Q_{-1})$ に属し，(θ_r,N,μ) は $\rho(Q|^i Q_i-1)$ に属する（ここで Q_{-i} は $j\neq i$ であるような Q_j の組み合わせを意味し，$(z|^i y_i)$ は第 i 成分を y_i で置き換えたベクトル $(z_1,\cdots,z_n)$ を意味している）。

こうすると $\lambda(Q_1,\cdots,Q_n)$ の帰納的計算式が直ちに

$$\lambda(Q_1,\cdots,Q_n)=\sum_{i=1}^{n}\lambda(Q_{-1})\cdot\lambda(Q|^i Q_i-1) \tag{8}$$

のように得られる。そして，全ての Q_1 に対して $\lambda(Q_1)=1$ なので，(8) より

$$\lambda(Q_1,Q_2)=\binom{Q_1+Q_2}{Q_1}$$

$$\lambda(1,1,\cdots,1)=n(n-1)^2(n-2)^{2^2}\cdots(2)^{2^{n-2}} \tag{9}$$

となる。n が増加するにしたがってこれらの数は天文学的に増大して行く。例えば，任意の i について $Q_i=1$ の場合（「協力ゲーム」の場合：前節の議論参照）

$$\lambda(1,1)=2;\ \lambda(1,1,1)=12;\ \lambda(1,1,1,1)=576;\ \lambda(1,1,1,1,1)=1,658,880$$

となる。さらに

$$\lambda(2,1,1)=42;\ \lambda(2,2,1)=288;\ \lambda(2,2,2)=5,184$$
$$\lambda(2,1,1,1)=12,204;\ \lambda(2,2,1,1)=1,191,024;\ \lambda(2,2,2,1)\simeq 10^9;\ \lambda(2,2,2,2)\simeq 3\times 10^{13}$$

と計算できる。

$\rho(Q_1,\cdots,Q_n)$ に属する簡潔な限界貢献 c.s.m. の集合（注意 2 参照）はより小さくなる点に注意してもらいたい。その濃度は

$$\lambda_0(Q_1,\cdots,Q_n)=\frac{(\Sigma_i Q_i)!}{Q_1!\cdots Q_n!}$$

である。例えば $\lambda_0(1,1,\cdots,1)=n!$, $\lambda_0(2,2,2,2)=2,520$ と計算できる。

4．限界貢献方式の需要ゲーム

以下の議論では，費用関数 C が与えられており，それが，e_i を $\mathbf{N}^n$ 上の第 i 単位ベクトルとして

$$\text{任意の } i,j=1,\cdots,n \text{ について } C(q)<C(q+e_i) \text{ かつ}$$
$$C(q+e_i)+C(q+e_j)<C(q)+C(q+e_i+e_j) \qquad (9)$$

という性質を満足すると仮定する。この性質は，$i=j$ のときには財 i の限界費用逓増を，$i\neq j$ のときには財 i と財 j が費用補完的であることを意味している。

個人の選好についての仮定：主体 i の選好は $(q_i,x_i)\in[0,Q_i]\cdot[0,\omega_i)$ に対して定義される。ここで一番目の区間は $\mathbf{N}$ 上にあり，二番目の区間は $\mathbf{R}$ 上で，ω_i は主体 i の初期保有の貨幣を表している。主体 i の選好擬順序 R_i は，q_i に関して厳密に増加的，x_i に関して厳密に減少的であると常に仮定する。また $[0,Q_i-1]\cdot[0,\omega_i)$ に属する (q_i,x_i) に対して，財 i をさらに 1 単位増やす時に主体 i が最大限払ってもかまわない費用は，q_i について非増加的である。つまりもし（I_i を主体 i の無差別関係として）

$$(q_i,x_i)\,I_i(q_i+1,x_i')\,I_i(q_i+2,x_i'')$$

が成り立つなら

$$x_i''-x_i'\leqq x_i'-x_i\ \left(\Leftrightarrow \frac{x_i+x_i''}{2}\leqq x_i'\right)$$

が成立する。これが個人の選好の凸性の仮定である。

上の仮定を満足する主体 i の選好の集合を Δ_i と表記する。

（定義１の）$\rho(Q_1, \cdots, Q_n)$ に属するゲームの木 (θ, N, μ)，費用関数 C，選好の組み合わせ $(R_1, \cdots, R_n)$ に対して，二つの戦略的ゲームを考える。第一のものは，ゲームの木 (θ, N, μ) 上での**逐次的費用分担ゲーム**であり，これは完全情報の下での展開型ゲームである。ゲームのプレイは θ の 0 から終節への経路を決定し，それが（定義１により）需要の組み合わせ $(q_1, \cdots q_n)$ を，そして（定義２により）費用分担の組み合わせ $(x_1, \cdots, x_n)$ を決める。

第二のゲームは，プレイヤー i が財 i を q_i の量だけ需要する（同時手番の）標準型ゲームである。ここでは需要の組み合わせ $(q_1, \cdots q_n)$ に対して，定義２（(7)式）のようにして費用分担を計算する。これを**需要ゲーム**と呼ぼう。

この二つのゲームの戦略面での主要な特徴は，i が行動をとる任意の非終節 ν を考えることによって理解できる。$q_i = |V_i(\nu)| - 1$ としよう。$V_i(\nu)$ に属する ν 以前の各節では（定義１の性質ｂより）主体 i は右に進んできたので，彼女は少なくとも q_i の需要をすでに言明している。同様に，この節において主体 $j(j \neq i)$ は少なくとも $q_j = |V_j(\nu)|$ だけの需要を言明している（もし主体 j が $V_j(\nu)$ の最終節で左に進んだのであれば，彼の q_j の需要は最終的なものである）。$q = (q_1, \cdots q_n)$ と表記する。

もし ν において主体 i が左に進むならば，彼女の需要は最終的に q_i となり，（それ以降の他の主体の行動にかかわらず）彼女の費用分担 x_i も決定される。もし主体 i が右に進むならば，彼女は少なくとも $q_i + 1$ の需要を言明することになる。そして，これによる彼女の追加費用は $C(q + e_i) - C(q)$ となる。実際，$q_i + 1 \leqq q_i' \leqq Q_i$ である q_i' を彼女が需要すれば，彼女の追加費用は，費用補完性と(7)式より，少なくとも $C(q|^i q_i') - C(q)$ である（他の主体が q_j より多く需要したならば，彼女の追加費用はそれ以上になるであろうが，それ以下になることはありえない）。よって二つの状況のみが可能である。

状況１　$(q_i, x_i)\, R_i (q_i + 1,\ x_i + C(q + e_i) - C(q))$

選好の凸性と C の q_i に関する厳密な凸性より，これは

$$\text{任意の } q_i' \geqq q_i + 1 \text{ に対して，} (q_i, x_i)\, R_i\, (q_i', x_i')$$

を意味する。ここで x_i' は，彼女が q_i' を需要したときの，（他の主体が q_j 以上の可能な需要を任意に選んだとして）任意の可能な費用分担を表している。

この場合，逐次的ゲームにおいては左へ進むことが右へ進むことを（弱い意味で）支配する。需要ゲームにおいては，戦略 q_i が，$q_i' \geqq q_i + 1$ である任意の戦略 q_i' を（弱い意味で）支配する。

状況２　$(q_i+1,\ x_i+C(q+e_i)-C(q))\ P_i(q_i, x_i)$

この場合，逐次的ゲームにおいては左へ進むことが右へ進むことによって厳密に支配され，需要ゲームにおいては需要 q_i は需要 q_i+1 によって厳密に支配される。

このことが，これら二つの戦略ゲームを分かりいいものにしているのだが，なぜかと言えば我々は部分ゲーム完全均衡を**前向き**の帰納法により求めることができるのである。つまりあらゆる節において，そこで行動をとる主体はそれ以降の他の主体の行動にかかわらず（左に進むかまたは右に進むかの）弱い意味での支配戦略を持つ。そしてどの節 ν においても，主体が右に進むのと左に進むのに関して無差別（(q_i, x_i) と $(q_i+1, x_i+C(q+e_i)-C(q))$ に関して無差別）でなければ，すぐに次のことが言える。

i）逐次的費用分担ゲームは唯一の部分ゲーム完全均衡の結果を持ち，それは上の状況１と２で述べた議論を辿ることによって求められる。

ii）標準型ゲームは（上の部分ゲーム完全均衡の結果と同じ）唯一の Nash 均衡の結果を持つ。

iii）均衡需要の組み合わせは強均衡でもある。つまりこれは結託による Stackelberg 均衡でもある。

一般に，状況１において無差別があり得る場合，逐次的ゲームには複数の部分ゲーム完全均衡の結果が，また需要ゲームには複数の Nash 均衡や強均衡の結果が現れる。これら複数の均衡から一つを選び出すために，**無差別のときには，どのプレイヤーも常に低い方を需要するという仮定を付け加えることにする。**個人の需要が増えるにつれて常に限界費用が増加することから，この仮定はパレート効率的な方の選択を意味している。性質(9)を参照せよ（ただし注意２で述べたように，主体 i の需要の増加の結果，主体 j の費用分担は減少するかもしれないという事実にも留意せよ)。

定義３

定義１と２で求まる限界貢献 c.s.m. を一つ固定する。

逐次的ゲームの部分ゲーム完全均衡*を，無差別の時にプレイヤーは常に左に進むと仮定したときのこのゲームの部分ゲーム完全均衡と定義する。

選好の組み合わせ $(R_1, \cdots, R_n)$ が与えられたとき，需要ゲームによって誘導される $\otimes_i [0, Q_i]$ 上の選好関係，つまり

$$\text{任意の}\ q, q' \in \otimes_i [0, Q_i]\ \text{に対して，}\ q\,\tilde{R}_i\,q' \Leftrightarrow (q_i, x_i(q))\,R_i\,(q_i', x_i(q'))$$

によって定義される選好関係を $\tilde{R}_i$ と表記する（ここで $x_i(q)$ は(7)式によって与えられるものである)。

また，もし需要の組み合わせ q^* が需要ゲームの Nash 均衡で，さらに $\tilde{P}_i$ を $\tilde{R}_i$ に対応する厳密な選好関係として

任意の i と任意の q_i について，$\{q_i < q^*{}_i\} \Rightarrow \{q^* \tilde{P}_i (q^* |^i q_i)\}$

が成り立つならば，q^* を Nash 均衡*と呼ぶ。

さらに，需要の組み合わせ q^* について，もし任意の結託 T，$T \subseteq N$, に対して次のような需要の組み合わせ q が存在しないならば，q^* を強均衡*と呼ぶ。

{任意の $j \in N \backslash T$ について $q_j = q_j^*$} かつ {任意の $j \in T$ について $q \tilde{R}_i q^*$} かつ
{(ある $j \in T$ について $q_i \geqq q_i^*$ かつ $q \tilde{P}_i q^*$) かつ/または (ある $j \in T$ について $q_i < q_i^*$)}

結託による Stackelberg 均衡 も同様に定義できる。

補題 1

N，生産の上限 $(Q_1, \cdots, Q_n)$，(9) を満たす費用関数 C，および（定義 1 と 2 で与えられる）限界貢献 c.s.m. を一つ固定する。そして，任意の選好の組み合わせ $(R_1, \cdots, R_n)$ に対して，ゲームの木の終節までの経路を（したがって需要の組み合わせ $(q_1^*, \cdots, q_n^*)$ も）次のように帰納的に定義する。

まず，$i = \mu(0)$ とする。そして，もし $(0, 0)\, R_i (1, C(e_i))$ ならば主体 i は左の後続節に進む。それ以外の場合，主体 i は右の後続節に進む。次に，アルゴリズムが節 ν に到達して，$i = \mu(\nu)$ であるとする。$q_i = |V_i(\nu)| - 1$ および任意の $j \neq i$ について $q_j = |V_j(\nu)|$ と表記し，$\tilde{x}_i = x_i(q)$ を節 ν までの主体 i の費用分担としよう。このとき，もし $(q_i, \tilde{x}_i)\, R_i (q_{i+1}, \tilde{x}_i + C(q + e_i) - C(q))$ ならば主体 i は左に進み，それ以外の場合主体 i は右に進む。すると，このアルゴリズムによって以下の均衡の結果が得られる。

i ）逐次的ゲームの唯一の部分ゲーム完全均衡*の結果。

ii ）需要ゲームの唯一の Nash 均衡*の結果。

iii）需要ゲームの唯一の強均衡*の結果。

iv）需要ゲームの唯一の結託による Stackelberg 均衡*の結果。

注意 4

もし（注意 2 で説明された「簡潔な」限界貢献 c.s.m. の場合のように）限界貢献 c.s.m. が $\partial x_i / \partial q_j \geqq 0$ 満足するならば，強均衡*は強均衡でもある。加えて，全ての強均衡は厚生面から見れば等しくなる（証明は容易である）。しかし，ある主体の費用分担が，他のある主体の需要が増えた時に減少するような限界貢献 c.s.m. では，需要ゲームが強均衡を持たないような選好の組み合わせを見い出すことができる。この例としては，図 2 の c.s.m. と注意 2 での C の数値例を考えればよい。そして，以下のような個人の選好を考える。

・プレイヤー 1 は $q_1 = 1$ を需要することと $q_1 = 0$ を需要することが無差別である。

・プレイヤー 2 と 3 は二人とも常に $q_i=1$ を需要したがる。

このとき，プレイヤー 1 が $q_1=0$ から $q_1=1$ へ需要を変更すると，プレイヤー 3 は厳密に正の利益を得るがプレイヤー 2 は損失を被る。したがって強均衡は存在しない。この問題点を克服するには二つの方法がある。その一つは定義 3 のように，（無差別な主体が）低い方の需要を常に望むように仮定することによって，強均衡の定義を変更することである。もう一つは以下で見るように，ほとんど全ての選好を含む選好の領域に話を限ることである。

我々の最初の分析結果は，あらゆる費用分担メカニズムの中から，対応する需要ゲームが唯一の均衡を持つという性質を用いて，限界貢献方式を一つ選び出そうというものである。

この結果については次の二つのやり方で述べることができる。一つ目は（第 4 節の最初で定義された）$\otimes_i \Delta_i$ の全領域上で話を進めるもので，均衡*の概念に依存している。もう一つは通常の均衡概念を用いるが，Δ_iの「ほとんど全て」の選好を含むような個人の選好の部分領域に話を限るものである。

我々は Δ_i の部分集合 $\Delta^*{}_i$ が以下の条件を満足する場合，$\Delta^*{}_i$ は Δ_i のほとんど全ての選好を含むと言う。それは

$$\{R_i \in \Delta_i \text{ であり，かつどの } t=1,\cdots,\gamma \text{ に対しても } [(q_i^t, x_i^t)\ I_i(q_i^t+1, y_i^t)] \text{ とならない}\} \Rightarrow \{R_i \in \Delta_i^*\}$$

を満たすような，有限な指数の集合 $t=1,\cdots,\gamma$ と，各 t に対して $[0, Q_i-1]$ に属する整数 q_i^t および $0 \leqq x_i^t < y_i^t \leqq \omega_i$ となる x_i^t と y_i^t が存在する場合である。換言すれば，Δ_i^* は，Δ_i に属する選好のうち，配分の組み合わせのある有限な集合上で無差別に決してならないもの全てを含んでいる。もしどの i についても Δ_i^* が Δ_i のほとんど全ての選好を含むなら，領域 $\otimes_i \Delta_i^*$ は $\otimes_i \Delta_i$ のほとんど全ての選好の組み合わせを含むと言う。

定理 1

N，生産の上限 $(Q_1, \cdots, Q_n)$，および(9)を満たす費用関数 C を一つ固定する。さらに非搾取の条件（任意の i について，$q_i=0 \Rightarrow x_i=0$）を満足する c.s.m. ξ を考える。このとき以下の 4 つの主張は同値となる。

i）ξ は（定義 1 と 2 で与えられる）限界貢献 c.s.m. である。

ii）$\otimes_i \Delta_i$ に属するあらゆる選好の組み合わせに対して，需要ゲームは（定義 3 で与えられる）唯一の Nash 均衡*の結果を持つ。

iii）$\otimes_i \Delta_i$ のほとんど全ての選好を含み，その領域上では需要ゲームが唯一の Nash 均衡の結果を持つ領域 $\otimes_i \Delta_i^*$ が存在する。

iv）$\otimes_i \Delta_i$ のほとんど全ての選好を含み，その領域上では需要ゲームが唯一の強均衡の結果を持つ領域 $\otimes_i \Delta_i^*$ が存在する。

証明）Moulin（1995）を参照せよ。

5．限界貢献方式の社会的選択関数

第２節で説明されたように，補題１によって，我々はあらゆる限界貢献 c.s.m. を，ある社会的選択関数に対応させることができる。そして $\otimes_i \Delta_i$ に属する任意の選好の組み合わせに対して，このs.c.f. は（補題１で示された４つの均衡概念の内の任意の）均衡*の結果を選び出すことができる。これを，$\rho(Q_1, \cdots, Q_n)$ に属するゲームの木 (θ, N, μ) に対応した**限界貢献** s.c.f. と呼ぶことにする。このs.c.f. の定義域は $\otimes_i \Delta_i$ である点に注意してもらいたい。

需要ゲームで強均衡が存在しないかもしれないという理由と全く同じ理由によって，$\rho(Q_1, \cdots, Q_n)$ に属する任意のゲームの木についても，対応する s.c.f. が結託による戦略的操作不可能性を満たさないかもしれない。これを示すには，注意４の例をそのまま用いればよい。同様に，限界貢献方式が $\partial x_i / \partial q_j \geqq 0$ を満足するならば（例えば，注意２で定義した「簡潔性」をそれが満たせば），対応する s.c.f. は結託による戦略的操作が不可能となる。また，（以下の分析結果におけるように）限界貢献方式の全集合を扱おうとすれば，前節と同じく二つの方法が可能である。つまり均衡の定義を弱めるか（定義４参照），またはほとんど全ての選好を含む領域に限って考える。

定義４

S を，定義域を $\otimes_i \Delta_i$ とする社会的選択関数とする。そして，各選好の組み合わせ $R=(R_1, \cdots, R_n)$ に対して，このs.c.f. が，$z_i=(q_i, x_i)$ を主体 i の消費とする，配分 $S(R)=(z_1, \cdots, z_n)$ を対応させるものとしよう。このとき S が以下の条件を満足するなら，S は結託による戦略的操作不可能*であると言う。その条件とは，任意の選好の組み合わせ R と任意の結託 T, $T \subseteq N$, に対して，（$z_i=S_i(R)$ と $z_i'=S_i(R')$ として）

$$\{\text{任意の } j \in N \backslash T \text{ について } R_j=R_j'\} \text{ かつ } \{\text{任意の } j \in T \text{ について } z_i' R_i z_i\} \text{ かつ}$$
$$\{(\text{ある } i \in T \text{ について } q_i' \geqq q_i \text{ かつ } z_i' P_i z_i) \text{ かつ/または } (\text{ある } i \in T \text{ について } q_i' < q_i)\}$$

を満たすような選好の組み合わせ R' が存在しない，というものである。

補題２

生産の上限 $(Q_1, \cdots, Q_n)$，(9)を満たす費用関数 C，および（補題１で示された均衡*の結果を通じて限界貢献 c.s.m. に対応させられた）限界貢献 s.c.f. を考える。するとこの s.c.f. は結託による戦略的操作不可能*である

定理 2

N，生産の上限 $(Q_1, \cdots, Q_n)$，(9)を満たす費用関数 C，および定義域を $\otimes_i \Delta_i$ とする社会的選択関数 S を考える。ここで S は

非搾取　：(任意の選好の組み合わせ R と任意の i について) もし $S_i(R)=(q_i, x_i)$ で $q_i=0$ ならば $x_i=0$ である。

消費者主権：任意の i と $[0, Q_i]$ に属する任意の $\bar{q}_i$ について，Δ_i に属するある $\bar{R}_i$ が存在して，どんな R に対しても，$R_i=\bar{R}_i \Rightarrow S_i(R)=(\bar{q}_i, x_i)$ という性質を満たす。

の二条件を満足すると仮定する。すると以下の 3 つの主張は同値となる。

i）S は（$\otimes_i \Delta_i$ 上の）限界貢献 s.c.f. である。

ii）S は $\otimes_i \Delta_i$ 上で結託による戦略的操作不可能*となる。

iii）$\otimes_i \Delta_i$ のほとんど全ての選好を含み，その領域上では S が結託による戦略的操作不可能となる領域が存在する。

証明）Moulin (1995) を参照せよ。

注意 5　仮定(9)の役割について

仮定(9)の不等号を等号付きのものに置き換えても，我々の結果のほとんどは明らかに成立する。しかし各主張を精確にどのように直したらよいかは，まだよく分からない。反対に，もし二つ目の不等式の向きを逆にして費用補完性を費用代替性（財 i の限界費用が財 j の需要に関して減少すること）に変えたならば，不可能性の帰結が現れる。すなわち（少なくとも二人の主体が 2 以上の生産の上限を持つならば）領域 $\otimes_i \Delta_i$ 上で定義された結託による戦略的操作不可能な s.c.f. は存在しない。

参考文献

Barbera, S., 1994, "Notes on Strategy-Proof Social Choice Functions," forthcoming in *Advances in Social Choice Theory,* proceedings of a conference of the International Economic Association.

Barbera, S and M. Jackson, 1994, "Strategy-Proof Exchange," mimeo, Northwestern University.

Clarke, E. H., 1971, "Multipart Pricing of Public Goods, *Public Choice,*" 11, 17-33.

Dasgupta, P., Hammond, P. and E. Maskin, 1979, "The Implementarion of Social Choice Rules," *Review of Economic Studies,* 46, 185-216.

Gibbard, A., 1973, "Manipulation of Voting Schemes: a General Result," *Econometrica* 45, 665-81.

Green, J. and J. J. Laffont, 1979, "Incentives in Public Decision Making," North-Holland, Amsterdam.

Groves, T., 1973, "Incentives in Teams" *Econometrica* 41, 617-663.

Hurwicz, L., 1972, "On Informationally Decentralized Systems" in *Decision and Organization,*

Editoes, B. McGuire and R. Radner, Amsterdam, North-Holland.
Moulin, H., 1944, "On Additive Methods to Share Joint Costs," mimeo, Duke University.
Moulin, H., 1995, "On strategy-Proof Cost Sharing," mimeo.
Moulin, H. and S. Shenker, 1992, "Serial Cost Sharing," *Econometrica,* 60, 1009-1037.
Moulin, H. and S. Shenker, 1994, "Average Cost Pricing Versus Serial Cost Sharing: an axiomatic comparison," forthcoming, *Journal of Economic Theory*.
Roth, A., 1988, *The Shapley Value: Essays in Honor of Lloyd S. Shapley,* Cambridge, Cambridge University Press.
Satterthwaite, M. and H. Sonnenschein, 1981, "Strategy-Proof Allocation Mechanisms at Differentiable Points," *Review of Econmic Studies,* 48, 587-597.
Shapley, L., 1953. "A Value for N-person Games" in *Contributions to the Theory of Games* II, H. W. Kuhn and W. Tucker, Eds., *Annals of Mathematical Studies,* 28, Princeton University Press.
Shenker, S., 1992, "On the Strategy-Proof and Smooth Allocation of Private Goods in Production Economies," mimeo, Xerox Palo Alto Research Center.
Shenker, S., 1993, "Some Technical Results on Continuity, Strategy-Proofness and Related Strategic Concepts, mimeo, Xerox Palo Alto Research Center.
Tauman, Y., 1988, "The Aumann-Shapley Prices: a Survey," in *The Shapley Value; Essays in Honor of Lloyd Shapley, A.* Roth Editor, Cambridge University Press, Cambridge.

翻訳：**岡　崎　哲　郎**
（千葉商科大学専任講師）