Title	比較静学と経済均衡のアルゴリズム
Sub Title	Comparative statics and algorithms for finding economic equilibria
Author	Smale, Stephen 丸山, 徹
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1995
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.87, No.4 (1995. 1) ,p.509(1)- 512(4)
JaLC DOI	10.14991/001.19950101-0001
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19950101-0001

「三田学会雑誌」87巻4号（1995年1月）

比較静学と経済均衡のアルゴリズム

スティーヴン・スメール
（カリフォルニア大学・バークレー）

I．静　学

超過需要函数　$Z:\mathbb{R}^l_+ \longrightarrow \mathbb{R}^l$，$p \longrightarrow Z(p)$を考えることにしよう。ここで$\mathbb{R}^l_+$は価格ベクトル$p=(p_1, \cdots, p_l)$，$p_i \geq 0$の集合であり，函数$Z$は商品空間$\mathbb{R}^l$に値をとるものとする。たとえば$Z$は需要マイナス供給，すなわち$Z=D-S$として表わされ，$D$や$S$はミクロ経済学的な設定から導出されるのである。これが［Smale］において採用されたアプローチで，この覚え書の若干の背景をなす考え方が，そこに見出されるであろう。

さてZについてはある種の微分可能性の条件と次の公準が満たされると想定するのが自然である。

a）すべての$\lambda > 0$と$p \in \mathbb{R}^l_+$について　$Z(\lambda p)=Z(p)$（同次性），

b）$p \cdot Z(p)=0$（すなわち$\Sigma p_i Z_i(p)=0$）（ワルラス法則）。

適当な境界条件の下で均衡価格ベクトル，すなわち$Z(p^*)=0$を満たす価格ベクトルp^*の存在を示すことができる。これについてはたとえば上に引用した文献を見ていただきたい。（ただし，証明に必要とされるのはZの連続性だけである。）

条件a）とb）とを除去することが便利であるが，そのために$\Delta_1=\{p \in \mathbb{R}^l_+ \mid \Sigma p_i=1\}$，$\Delta_0=\{z \in \mathbb{R}^l \mid \Sigma z_i=0\}$とおく。すると各$p \in \Delta_1$に対して

$$\Phi(p)=Z(p)-(\Sigma Z_i(p))p$$

と定義される函数Φの値はΔ_0に属することが確かめられるから，Φは$\Phi:\Delta_1 \longrightarrow \Delta_0$の形式をもつ。さらにa）とb）とを用いれば，次の命題も容易に示すことができる。

命題　$p \in \Delta_1$に対して，$Z(p)=0$であるためには，$\Phi(p)=0$であることが必要十分である。

＊）この論文は1993年7月，東京において開催されたT.I.Tec/K.E.S.数理経済学国際会議のために執筆されたものである。

＊＊）この研究の一部はNSF基金の助成を受けている。

Φという函数を導入することには次のような効果がある。つまり経済均衡の問題を，ユークリッド空間のある領域で定義され，次元が等しい第二のユークリッド空間に値をとる写像の零点を研究するという筋立てで組み立てることができること，これである。

さてわれわれの問題に，たとえば初期保有量ベクトルの如きパラメータを取り入れることとし，これを$e \in E$と表記する。こうすることによって，問題は方程式（のシステム）

$$F(e,\ p)=0,\quad F: E \times \Delta_1 \longrightarrow \Delta_0$$

の解を分析するという形式で把握されるにいたる。

パラメータが十分に潤沢であれば，$\Sigma=\{(e,\ p)\mid F(e,\ p)=0\}$ は直積空間$E \times \Delta_1$の滑らかな部分多様体となる。これを**均衡多様体**（equilibrium manifold）と呼ぶことにしよう。

pについての導函数$\mathrm{D}_p F(e,\ p): \bar{\Delta}_1 \longrightarrow \Delta_0$は線形写像である。ここで$\bar{\Delta}_1$は$\Delta_1$を含む線形空間である。この導函数は，ひと組の座標軸を選べば，偏導函数から成る行列の形式で表現することができる。$(e^*,\ p^*) \in \Sigma$において$\mathrm{D}_p F(e^*,\ p^*)$が正則ならば，陰函数定理により，$e^*$のある近傍において定義され，値を$\Delta_1$の中にとる写像$G(e)$で，次の条件を満たすものが存在する：

$$G(e^*)=p^*,\quad F(e,\ G(e))=0。$$

このようにして$G(e)$はパラメータeに対応する経済均衡であることがわかる。実際，もしp^*が唯一の均衡価格ベクトルならば，$G(e)$は「唯一の自然な」均衡である。

ポール・サミュエルソン［Samuelson］の着想により，導函数

$$\mathrm{D}G(e^*): E \longrightarrow \bar{\Delta}_1$$

を**比較静学の行列**（matrix of comparative statics）と呼ぶ。つまり$\mathrm{D}G(e^*)$は，（たとえば）初期保有量ベクトルの微小量変化に対応する価格の微小量変化の大きさを表わしているのである。$G(e)$は陰伏的に定義されるだけだが，他方$\mathrm{D}G(e^*)$はFの$(e^*,\ p^*)$における導函数から計算することができる。これは注目すべき重要な点である。

その計算はいかにして遂行されるか。

$(\bar{e},\ \bar{p})$ を $(e^*,\ p^*)$ におけるΣの接ベクトルとすれば，

$$\mathrm{D}_p F(e^*,\ p^*)(\bar{p})+\mathrm{D}_e F(e^*,\ p^*)(\bar{e})=0$$

である。したがって

$$\bar{p}=-\mathrm{D}_p F(e^*,\ p^*)^{-1}\mathrm{D}_e F(e^*,\ p^*)\,\bar{e}=\mathrm{D}G(e^*)\,\bar{e}$$

を得る。

[Wilkinson] にならって，数値解析の枠組で考えるときは，D $G(e^*)$を**条件行列**（condition matrix）と呼ぶのが適当かもしれない。こうすると，$\mu(e^*,\ p^*)=\|\mathrm{D}G(e^*)\|$（作用素ノルム）が**条件数**（condition number）にあたるものとなる。シャブ＝スメール [Shub-Smale] I-Vの論文では，この観点が詳しく展開されている。またこれらの論文の一部は，上記の如き陰函数定理の筋立てで構成されている。

II. アルゴリズム（逐次計算）

1970年の半頃，ハーバート・スカーフやカーティス・イーヴスとともに，私は経済均衡を計算するためのアルゴリズムに深い関心を寄せていた。その頃に比べると，現在の私の着眼点には少し変化が生じた。つまり私はそのアルゴリズムをもっと歴史的な過程という枠組の中で捉えるようになったといってよかろう。これは比較静学と動学との一種の混合物である。大雑把ないい方をすれば，経済の履歴がそれを継続延長するアルゴリズムの出発点を与えるのである。

いま$e(0)=e^*$を満たすEの中の径路$e(t)$，$0\leqq t\leqq 1$を考え，$(e^*,\ p^*)$は均衡多様体上の既知の点としよう。当面，陰函数定理の仮説が成り立っていることを想定すると，

$$p(0)=p^*,\quad F(e(t),\ p(t))\equiv 0$$

を満たす一意的な径路$p(t)$が陰伏的に定まる。$p(t)$を近似するアルゴリズムは次のように進行する。

まずt_0，……，t_kは[0, 1]の分割で，$t_0=0$，$t_k=1$，$t_i<t_{i+1}$とする。するとこの構成に合うようにニュートン法を書き直せば，

$$p_{i+1}=p_i-\mathrm{D}_pF(e_{i+1},\ p_i)^{-1}F(e_{i+1},\ p_i),$$
$$p_0=p^* \text{ および } e_i=e(t_i)$$

である。

$\max_i(t_{i+1}-t_i)=\Delta t$が十分に小さければ，$p_i$が$p(t_i)$に一様に接近することは容易にわかる。他方，アルゴリズムのスピードは$1/\Delta t$に比例する。こうして分点の数を表わす最良のkが，この問題の計算量（complexity）になっていると考えてよいであろう。さまざまな問題設定の中で，Δtの最適な選択方法を見出すことが計算量理論の基本問題なのである。

最近15年間にわたり，私は多くの努力をこの問題に注いできたのであるが，そのまた多くの部分がマイク・シャブとの共同研究によるものである。

[Shub＝Smale] I-Vにおける計算量の分析をつうじて，条件数$\mu(e(t),\ p(t))$が重要な役割を果たすことが判明した。複素多項式の方程式系を解くという理想的な状況を考えると，条件数

はさらに一層その重要度を増す。つまりこの場合，条件数は（e, p）からΣの特異点集合への距離の逆数になることを主張する**条件数定理**（condition number theorem）が証明されるのである。ここでいう特異点集合とは，線形写像$D_pF(e, p)$が特異となるような（e, p）の集合にほかならない。

以上，この覚え書は［Smale(Berkeley)］，［Smale-Shub］Ⅰ-Ⅴ等の論文への序説としてご覧いただければ幸いである。

参考文献

Samuelson, P.[1971], *Foundations of Economic Analysis,* Atheneum, NY.

Shub,M. and Smale,S., Ⅰ-Ⅴ [1993], *Complexity of Bezout's Theorem* Ⅰ *: Geometric Aspects,* J. of the Amer. Math. Soc. 6, 459-501.

——, [1993], *Complexity of Bezout's Theorem* Ⅱ *: Volumes and Probabilities,* Computational Algebraic Geometry (F.Eyssette and A. Galligo, Eds.) Progress in Mathematics, Vol.109, Birkhäuser, 267-285.

——, [1993], Complexity of Bezout's Theorem Ⅲ : Condition Number and Packing, J.of Complexity 9, 4-14.

——, [1993], *Complexity of Bezout's Theorem* Ⅳ *: Probability of Success, Extension,* to appear in SIAM J. on Numerical Analysis.

——, [1993], *Complexity of Bezout's Theorem* Ⅴ : *Polynomial Time,* to appear in Theoretical Computer Science 133 (1994).

Smale, S., (1981), *Global Analysis and Economics,* in Handbook of Math. Economics, Vol.1, Arrow, K., Intrilligator, M., Eds., North Holland, NY(1981).

——, [1986], *Algorithms for Solving Equations,* Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Berkeley, CA, American Mathematical Society, Providence, RI, pp.172-195 (referred to as Berkeley).

Wilkinson, J., [1963], *Rounding Errors in Algebraic Processes,* Prentice Hall, Englewood Hills, NJ.

翻訳：**丸　山　　徹**

（経済学部教授）