Title	経済学における正の非線形システム
Sub Title	Positive nonlinear systems in economics
Author	Krause, U. 中村, 慎助
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1994
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.87, No.1 (1994. 4) ,p.85- 97
JaLC DOI	10.14991/001.19940401-0085
Abstract	
Notes	小特集 : 数理経済学国際会議
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19940401-0085

「三田学会雑誌」87巻1号（1994年4月）

経済学における正の非線形システム

ウルリッヒ・クラウス
（ブレーメン大学）

1．序　論

多くの場合，経済システムはある時点における経済システムの状態から次期のシステムの状態へ変換する写像としてモデル化することができる。もし取り扱う変換が線形であると仮定してかまわなければ，よく知られた線形作用素の理論を用いることができる；それ故，正行列と正線形作用素に対するペロン・フロベニウスの理論を含むスペクトラル理論が非常に重要である。しかしながら，線形性を仮定することはしばしば適当な理想化ではなく，その場合には厳密な議論が難しくなり，時には不可能となってしまう。この状態においてこそ，正の非線形システムが重要な役割を負うこととなる。このことは経済学以外においても当てはまる。経済学においては正符号性及びそれに関係する数学的な性質はきわめて自然な仮定である。状態の空間はしばしば，例えば状態が数量と価格によって表されるような場合に，ユークリッド空間の正象限（あるいはより一般的には凸錐）として与えられる。状態上の変換は，さらに種々の単調性の形での正符号性を持つことがあるかもしれない。これが本論文で取り扱われる2つの経済問題のケースである：すなわち，非線形多部門モデルの均整成長の問題，及び技術的に互いに依存しあう複数の生産主体間の価格設定の問題である。凸錐である状態空間 K からそれ自身へ値を取る変換 T を所与として，果たして均衡が一意に存在するか，すなわち不動点方程式 $Tx^*=x^*$ が（正数倍を除いて）一意な解 $x^*\in K$ を持つか，が問題として提起される。さらにもし均衡 x^* が存在するなら，それは大域的に安定であろうか，すなわち離散的な動学システム $x_{n+1}=Tx_n$ によって生じる点列 $(x_n)_{n\geq 0}$ は全ての初期点 $0\neq x_0\in K$ に対して x^* に収束するであろうか。成長の問題においてさらに興味深い問題は，非線形固有値問題 $Tx^*=\lambda^* x^*$ が（正数倍を除いて）一意な解 $x^*\in K$ を持つ場合に，$\lambda^*\geq 0$ かどうかである。もしそうならば，基準化された状態の点列 $\frac{x_n}{\|x_n\|}$（但し，$\|\cdot\|$ はある種のヴェクトル空間ノルム）が x^* に収束するであろうか。上記の問題の解答は成長問題については第2節及び3節において与えられる。

第4節及び第5節においては価格設定の文脈で，同じ問題がより複雑な形で取り扱われる。その理由は離散的な動学システムがもはや自律的ではなく変換 T 自身が時間に依存するからである。従って反復 T^n の漸近的な動きではなく，$n\to\infty$ の場合の非同次的な反復 $T_n\circ T_{n-1}\circ\cdots\circ T_1$ が分析されなければならない。結果的には，状態の安定性はもはや期待できず，そのかわりに，全ての経路がある種の条件の下である種の安定的な動きをすることになる。非線形なシステムを取り扱う場合に，本論文では「非線形」という単語は線形な場合をスペシャルケースとして含むこととする。線形で有限次元のスペシャルケースでは，本稿の結論は「動学的」ペロン・フロベニウスの理論と呼べるものに帰着する。

2. 均整成長：相対的安定性

n 時点における投入ヴェクトル $x_n\in K$ を $n+1$ 期における産出ヴェクトル $x_{n+1}\in K$ （但し，$n\in\mathbb{N}=\{0,1,2,\cdots\}$）に変換する T を生産技術として考えるような閉生産モデルを考えよう。有限種類の財の場合には K は有限次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ の正象限 $\mathbb{R}$ となり，無限種類の財の場合には K は数列の空間 l_1 の正象限 $(l_1)_+$ と考えられるかもしれない。均整成長経路とは非線形固有値問題 $Tx^*=\lambda^*x^*$ によって与えられる初期投入量 $x_0^*=x^*\in K$ と成長率 $\lambda^*\geq 0$ を用いて，$x_n^*=\lambda^{*n}x^*$ for $n\in\mathbb{N}$ として表現される。均整成長経路が相対的に安定であるとは，任意のゼロでない初期投入 $x_0=x$ に対して $x_{n+1}=Tx_n,\ n\in\mathbb{N}$ によって与えられる経路が最終的には均整成長経路として行動する，より正確には

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T^n x}{\lambda^{*n}}=c(x)\,x^*$$

のことである。但しここで，$\|x^*\|=1$ となる $x^*\in K$ と $\lambda^*>0$ は $Tx^*=\lambda^*x^*$ の一意の解であり $c(x)$ は初期投入量に依存する非負の定数である。均整成長の非線形的な設定における相対的安定性は，まず R.M. Solow と P.A. Samuelson [34] により分析され，M. Morishima [24] 及び H.Nikaido [27] が続いた。さらに [4, 5, 7, 8, 9, 13, 15, 19, 25, 26, 28, 30, 32, 36] 等によって研究された。

相対的安定性に関する結果を示す前に，いくつかの用語，特に単調性の条件に関する用語を導入しなければならない。今，$E\neq\{0\}$ を $\|\cdot\|$ をノルムとするバナッハ空間とし K を E に含まれる閉凸錐とする。K には次のように順序が入れられる。すなわち $x\leq y$ iff $y-x\in K$；$x\leq y$ は $x\leq y$ かつ $x\neq y$；$x<y$ は $y-x$ が K の内部 $\dot{K}$ に含まれるとする。K はノーマルであり $0\leq x\leq y$ の場合には $\|x\|\leq\|y\|$ であると仮定する。自己写像 $T:K\to K$ が

増加的であるとは

$0\leq x\leq y$ ならば $0\leq Tx\leq Ty$；

正同次であるとは

$$T(\lambda x)=\lambda Tx \text{ for all } x\in K, \lambda\geq 0;$$

半直線保存的であるとは

$\lambda \geq 0$ と $x\in K$ に対して $T(\lambda x)=\lambda(x)Tx$ となる $\lambda(x)\geq 0$ が存在する；

凹であるとは

$$T(\lambda x+(1-\lambda)y)\geq \lambda Tx+(1-\lambda)Ty \text{ for all } 0\leq\lambda\leq 1 \text{ and } x, y\in K;$$

x においてプリミティブであるとは $s(x)\geq 1$ が存在して $x\leq y$ ならば $T^{s(x)}x< T^{s(x)}y$ for $y\in K$；$A\subset K$ で上昇しているとは単位区間［0,1］上の連続な自己写像 ϕ が存在して $\lambda<\phi(\lambda)$ for $0<\lambda<1$ 及び全ての $x, y\in A$ と全ての $\lambda\in[0,1]$ に対して $\lambda x\leq y$ ならば $\phi(\lambda)Tx\leq Ty$ となることとする。

定理 1.　([16])

T が半直線保存的であり，$\{x\in K \,\|x\|=1\}$ 上で上昇しており，$x, y\in K\backslash\{0\}$ に対して $aTx\leq Ty$ となる $a=a(x, y)$ が存在するならば，固有値問題 $Tx=\lambda x$ は

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T^n x}{\|\lambda^n x\|}=x^* \text{ for all } x\in K \text{ with } Tx\neq 0$$

となる一意な解 $x^*\in K, \|x^*\|=1, \lambda^*>0$ が存在する。

定理 2.　([19])

もし T が定理1の仮定を満たし、さらに T が正同次であるならば、増加的で正同次かつ $x\neq 0$ に対して厳密に正であるような関数 $x\mapsto c(x)$ について相対的安定である。さらに

$$\left\|\frac{T^n x}{\lambda^{*n}}-c(x)x^*\right\|\leq\frac{\tau^{n-1}(a(x))}{\beta(x)} \text{ all } n\geq 1, \text{all } 0\neq x\in K,$$

である。但し，τ は $\tau(\gamma)<\gamma$ for $\gamma>0$ となる $\mathbb{R}_+$ の自己写像であり，$a(x)>0, \beta(x)>0$ である。

注意.

1. T^γ がある $\gamma\geq 1$ について上昇的であれば十分である。均整成長経路解 x^* と λ^* の存在を保証するために上記定理においてコンパクトの条件は課されていない。
2. ［9，13］においては T が弱く同次的である，すなわち任意の $\lambda\geq 0$，任意の $x\subset K$，および $f(0)=0$，かつ $\frac{1}{\lambda}f(\lambda)$ が $\lambda>0$ について非増加的であるような $\mathbb{R}_+$ の自己写像 f について $T(\lambda x)=f(\lambda)Tx$ となる場合に定理1と似た結論を得ている。定理1に関係する結果はまたは［9，37］にも見られる。

以下の2つの系は相対的安定性についてより取り扱いやすい形での基準を与えている。

系　1．　([19])

T を継続，凹，正同次でかつ，ある定数 $a>0, b>0$ と $0\neq e\in K$ に対して

$$ae \leq Tx \leq be \text{ for all } x\in K, \|x\|=1$$

とする。このとき，

$$\| \frac{T^n x}{\lambda^{*n}} - c(x)\,x^* \| \leq \text{constant} \cdot (1-\frac{a}{b})^{n-1} \|x\| \text{ for and all } n\geq 1, \text{and all } 0\neq x\in K$$

という評価に対して相対的安定性が成立する。

系　2．　([24, 25, 31])

(増加的なノルム $\|\cdot\|$) を入れた $E=\mathbb{R}^d$ とし $K=\mathbb{R}^d_+$ で，T を連続，正同次的，増加的で，かつ全ての点においてプリミティヴであるとする。この時，全ての $n\geq 1$ と $0\neq x\in K$ に対して

$$\| \frac{T^{ns} x}{\lambda^{*ns}} - c(x)\,x^* \| \leq \beta\gamma^{n-1}(\alpha)\,\|x\|$$

という評価に対して相対安定性が成立する。但し，s は T のプリミティヴ指数であり $\alpha>0, \beta>0$ は定数である。

次の例が無限次元の場合の系 1 を表現している。

例.

$E=l_1=\left\{x=(x_1, x_2\cdots) \mid x_i\in\mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty}|x_i|<\infty\right\}$

$K=(l_1)_+=\{x\in l_1 | x_i\geq 0 \text{ for } i=1,2,\cdots\}$

とし，T を次のような有限個の関数の各点における最小値とする。すなわち，

$a_{ij}\geq 0$ に対して $S: l_1\rightarrow l_1, (Sx)_i=\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}x_j$ として

$0<u_i=\inf\{a_{ij} | j\geq 1\}, v_i=\sup\{a_{ij} | j\geq 1\}<\infty, \sum_{i=1}^{\infty} u_i<\infty, u_i\leq kv_i$ for some k and $i\geq 1$ とする。系 1 及び 2 のスペシャルケースとしては $E=\mathbb{R}^d$, $K=\mathbb{R}^d_+$，及び $Tx=A\cdot x$ がある。但し，A は全ての要素が厳密に正の行列である。

3．均整成長：絶対的安定性

相対安定性を得るために T は収穫一定を意味する正同次性を仮定されていた。収穫逓減の場合には

$$\lim_{n\to\infty} T^n x = x^* \text{ for all } 0\neq x\in K$$

という絶対的安定性が成立する可能性のあることが知られている。例えば，(増加的なノルムを入れた) 有限次元 $E=\mathbb{R}^d$,と $K=\mathbb{R}^d_+$ と次のような K の自己写像 T を考えよう。すなわち，連続で増

加的，分解不能，0においてプリミティヴ，かつ$0<m<1$であるm次の正同次的つまり

$$T(\lambda x)=\lambda^m Tx \text{ for all } \lambda\geq 0, x\in K$$

である。すると，Tは絶対連続性を持つような一意な不動点$x^*>0$を持つ（[28]）。この結果は前節と同じバナッハ空間の場合にも次の定理のように一般化される。

定理 3.　（[16]）

もしTの反復$T^\gamma, \gamma\geq 1$が全空間錐K上で上昇的であり$K\backslash\{0\}$からKの内部$\dot{K}$への写像であり，Tが連続で$x\neq 0$に対して$Tx\neq 0$ならば，不動点方程式$Tx=x$は一意な解$x^*\in\dot{K}$を持ち，

$$\lim_{n\to\infty} T^n = x^* \text{ for all } x\in K\backslash\{0\}$$

となる。

有限次元の場合でも定理3は上記［28］の結果より一般的である。なぜなら$0<m<1$に対してm次の正同次な写像は$\phi(\lambda)=\lambda^m$に対して，K上で上昇的だからである。

注意.

Tの一意な不動点x^*の存在が知られている場合には，定理3の仮定を弱めることができる。例えば，有限次元の場合に次のような結果が成立する（[23, 31]）：
もしTが連続で，上昇的，任意の$x\in K. \lambda\in[0,1]$に対して$T^n(\lambda x)\geq\lambda Tx$となり，さらに$T$が一意な不動点$x^*>0$を持つなら，任意の$x>0$に対して$\lim_{n\to\infty} T^n x = x^*$である。

もしm次の正同次性の仮定を落とすと，仮に導入的な例の全ての他の仮定が満たされていても，不動点x^*の存在が保証されない。しかしながら，軌道$\{T^n x | n\geq 0\}, x\neq 0$に対して次のような意味での極限集合の三分法が成立する：すなわち，

（i）　全ての軌道が有界でない。

あるいは

（ii）　全ての軌道は0に収束し，0はTの一意な不動点である。

あるいは

（iii）　全ての軌道は$\dot{K}$の0ではない一意な不動点に収束する。

である。

もちろん，相対的安定性が成立していれば$\lambda^*>1, \lambda^*<1, \lambda^*=1$の3つの場合に応じて極限集合の三分法が成り立つ。次の結果は，正同次性は成り立たないが，$0\leq m\leq 1$となるm次の正同次性を一般化した条件の下での，極限集合の三分法である。

定理 4.　（[22]）

もし，$E=\mathbb{R}^d$, $K=\mathbb{R}^d_+$で，Tが連続，増加的，0においてプリミティヴでありかつある$k\geq 1$に対して

$$T^k(\lambda x)>\lambda T^k x \text{ for all } x>0, \text{ all } 0<\lambda<1$$

であるなら極限集合の三分法が成立する。

注意.

定理4において，次の $d=2, x=(x_1, x_2)$ の簡単な例で表されるように極限集合の三分法の3つのケースは全て起こりうる：

case(i)は $Tx=(\sqrt{x_1}+3x_2, 2x_1)$ の場合,

case(ii)は $Tx=\left(\frac{x_1+x_2}{2+x_1+x_2}, \frac{x_1+x_2}{2+x_1+x_2}\right)$ の場合,

case(iii)は $Tx=(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}, \sqrt{x_1})$ の場合である。

次の非線形リゾルヴェント問題への応用のように，定理4を用いて，まず極限集合の三分法を示し，次にケース(i)及び(ii)を排除することによって，絶対安定性を証明することができる。

例．非線形リゾルヴェント問題

$A:\mathbb{R}^d_+ \to \mathbb{R}^d_+$ を連続で増加的，$A(\lambda x)\geq \lambda Ax$ for $x\geq 0, \lambda\in[0,1]$，かつある $x_0\geq 0$ に対して $A(x_0) < x_0$ とする。任意の $c\in\mathbb{R}^d_+, c>0$ に対して，$Tx=Ax+c$ は $k=1$ として定理4の仮定を満たす。(T は m 次の正同次的ではない。) x_0 から出発する軌道は有界であるから極限集合の三分法のケース(i)は不可能であり，$T0\geq c>0$ であるからケース(ii)も不可能である。

定理4は，前節のようにバナッハ空間の設定の場合に強め拡張することができる。例えば [23] では，(E, ‖・‖) においてすべての有界な軌道がコンパクトな閉包を持ち，T が連続で $\dot{K}\neq\emptyset$ をそれ自身へ移す写像で，ある $k\geq 1$ に対して T^k は $K\backslash\{0\}$ を $\dot{K}$ へ移す写像で T^k が part metric について縮小写像である時，極限集合の三分法が成立することが示されている。ここで part metric とは $p(x,)=-\log\ \inf\{\lambda>0|\frac{1}{\lambda}\leq y\leq \lambda x\}$ で定義される。T^k の縮小性は，$0<m<1$ である m 次の正同次性を一般化した定理4の性質 $T^k(\lambda x)>\lambda T^k x$ を拡張したものである。

4．相互依存的価格設定：経路安定性／弱いエルゴード性

生産者 $j, j\in\{1,\cdots d\}$ が他の生産者が生産した財及び（同質な）労働を用いて財 j を作るような d 個の生産者を考える。$A_j(u, t)$ によって第 j 生産者の生産可能性集合とする，すなわち $A_j(u, t)$ は，$t\in\{0, 1,\cdots\}$ 時点において，u 単位の第 j 財を作ることのできる生産要素 (a, l) からなる。但し，$a\in\mathbb{R}^d_+$ は原料投入のヴェクトルであり $l\in\mathbb{R}_+$ は労働投入である。財の価格ヴェクトル $p\in\mathbb{R}^d_+$ と賃金 $w\in\mathbb{R}_+$ を所与として，t 時点において u 単位の第 j 財を作るための第 j 生産者の最小費用とは

$$C_j(p, w, u, t)=\inf\{(pa+wl)|(a, l)\in A_j(u, t)\}$$

のことである。ここで pa は内積 $\sum_{i=1}^{d} p_i a_i$ for $p=(p_1,\cdots, p_d), a=(a_1,\cdots,a_d)$ である。u 単位の t 期

の j 財を固定すると，関数 $(p, w) \mapsto C_j(p, w, u, t)$ は凹で正同次的である。費用関数をもとに j 財の価格を設定する方法を考えると，第 j 企業は関連する費用関数 $C_j(p, w, u, t)$ を最小費用 C_j から導出するであろう。例えば，関連する費用関数は限界費用 $\dfrac{\partial C_j(p, w, u, t)}{\partial u}$ あるいは平均費用 $\dfrac{C_j(p, w, u, t)}{u}$（収穫一定の場合にはシェファードの補題によって両者は一致する），あるいは他のなにかである。我々は，関連する費用関数も (p, w) について凹かつ正同次的であると仮定する。これは関連する費用が限界費用または平均費用であるときには満たされる。

例として，相互依存性が，それぞれ時間に独立な（線形の）レオンティエフ型の技術とコブ・ダグラス型の技術で与えらえることを考えてみよう。レオンティエフ型の技術の平均（限界）費用は $C_j(p, w, u, t) = a_j p + wl_j$ で表される，但しここで $a_j \in \mathbb{R}^d_+$ は j 財1単位の生産に使われる財の量であり l_j は使われる労働の量である；すなわち列が $a_j, 1 \leq j \leq d$ の行列はレオンティエフ投入産出行列である。この特別な場合には，j の関連する費用関数は線形になってしまい生産量 u に依存しない。これはコブ・ダグラス型技術の場合には成立しない。この場合には平均（限界）費用は

$$c_j(p, w, u, t) = k_j \prod_{i=1}^{d} p_i^{\,\alpha_{ij}/\beta_j}\, u^{\frac{1}{\beta}-1} + wl_j$$

但し，

$$0 \leq \alpha_{ij} \leq 1, \sum_{i=1}^{d} a_{ij} = \beta_j > 0$$

である。j の関連する費用関数は線形ではないが，(p, w) について凹で正同次的であり，$\beta_j = 1$ の場合を除いて生産量 u に依存する。

これからは内性変数を減らし賃金は価格に依存すると仮定する。より正確には $w = w(p)$ であり $p \mapsto w(p)$ は凹で正同次的であるとする。（例えば，与えられた実質賃金 $c \in \mathbb{R}^d_+$ に対して $w(p) = pc$ のケースである。より複雑な場合には効用最大化を許すこともできる。cf. [10]）従って，j の関連する費用関数は $c_j(p, u, t)$ と書け $p \in \mathbb{R}^d_+$ について凹かつ正同次的である。

次期の価格設定について，（相対）価格が（相対）費用によって決定される古典的な価格設定のルールを考える。すなわち，

$$\frac{p_i(t+1)}{p_j(t+1)} = \frac{c_i(p(t), y_i(t), t)}{c_j(p(t), y_j(t), t)} \text{ for all } i, j \in \{1, \cdots, d\} \text{ and all } t \in \{0, 1, \cdots\}$$

つまり，

$$p(t+1) = \lambda(t)\, c(p(t), y(t), t) \tag{$*$}$$

である。

ここで $p(t) \in \mathbb{R}^d_+$ は t 期における価格 $p_i(t)$ のヴェクトルであり，$\lambda(t) > 0$ は比例係数であり，$c(p(t), y(t), t)$ は第 i 座標が $c(p(t), y(t), t)$（y_i は t 期の財 i の生産量）の t 期の関連する費用のヴェクトルである。上記の価格設定のモデル（$*$）は［18］によって展開された。同様のフレー

ムワークにおける価格設定のモデルについては［2， 5， 6，10，13，14，15，17，35，38］に見られる。費用演算子 $T(t)$ とは

$$T(t)\,p = c\,(p, y(t), t)$$

によって定義される。$T(t): \mathbb{R}^d_+ \to \mathbb{R}^d_+$ は凹で正同次的な非線形写像である。従って方程式(＊)は

$$p(t+1) = \lambda(t)\,T(t)\,p(t) \qquad (**)$$

と書くことができる。

時間に依存する費用演算子を導入することにより，$t \mapsto y(t)$ について詳細な議論をしないですむのである。関連する費用と生産物の価格との関連は運動法則 $T(t)$ のパラメーター変化として現在期 t を通じて現れる。もし（＊＊）においてすべての t について $\lambda(t)=1$ と仮定すると（cf. [38]，（＊＊）は写像の列 $(T(t))_{t\geq 0}$ の不動点問題として取り扱うことができる。しかしながら，相対価格を扱う場合には $\lambda(t)\neq 1$ を認めることが適当であろう。価格を基準化することによって，次のように $\lambda(t)$ を消去することができる：

$$\|p\| = \sum_{i=1}^{d} |p_i|,\ \tilde{p}(t) = \frac{p(t)}{\|p(t)\|},\ \tilde{T}p = \frac{Tp}{\|Tp\|}$$

（但し定義できる場合）とする。すると（＊＊）は $\tilde{p}(t+1) = \tilde{T}(t)\,\tilde{p}(t)$ あるいは相対価格 $\tilde{p}(t)$ を単に $p(t)$ と書くことによって次の非線形，非自律的な離散型動学体系が得られる。

$$\left.\begin{array}{l} p(t+1) = \tilde{T}(t)\,p(t),\ p(t) \in S = \{p \in \mathbb{R}^d_+ \mid \|p\| = 1\} \\ \text{すなわち} \\ p(t+1) = \tilde{T}(t) \circ \tilde{T}(t-1) \circ \cdots \circ \tilde{T}(1) \circ \tilde{T}(0)\,p(0) \end{array}\right\} \qquad (***)$$

である。

基準化のために、この動学体系では通常の線形レオンティエフモデルにおいてさえ，非線形である。仮に，関連する費用が時間に直接依存していなくても，生産量に依存するため，体系は非自律的である。これからは関連する費用は時間に直接は依存しないと仮定する（技術変化は次節で取り上げられる)。

バナッハ空間（E, ‖・‖）の閉凸錐を K とし，写像 $T_n: K \to K$ for n の列によって与えられる非自律的な動学体系は次の条件を満たすとき経路安定性を持つという：すなわち任意の出発点 x_0, $y_0 \in K\backslash\{0\}$ に対して $x_{n+1} = T_n x_n$ 及び $y_{n+1} = T_n y_n$ for $n \geq 0$ によって定義される経路が最終的にはお互いに近づく，つまり

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = 0$$

である。体系は任意の $x_0, y_0 \in K\backslash\{0\}$ に対して上記の経路が $K\backslash\{0\}$ にとどまり，かつ

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{y_n}{\|y_n\|} \right\| = 0$$

であるとき弱いエルゴード性を持つと呼ばれる。経路安定性（弱いエルゴード性）はすべての経路が（基準化された経路が），多少不規則ではあっても，最終的には同じように動くことを意味している。また，経路は外性的なショックによって変化があってもしばらくすると元の形に戻るという意味で安定的であるということもできるであろう。

システム（＊＊＊）すなわち

$$p(t+1)=\tilde{T}(t)\,p(t),\ p(t)\in S=\{p\in\mathbb{R}^d_+\mid\|p\|=1\}$$

$$\text{但し}\quad \tilde{T}(t)\,p=\frac{T(t)p}{\|T(t)p\|}\quad\text{及び}\quad T(t)\,p=c\,(p, w(p), y\,(t))$$

の経路安定性／弱いエルゴード性を証明するために，次のような仮定をおくこととする。（写像 $T(t)$ の正同次性により，$(T(t))\,t\geq 0$ によって与えられるシステムの弱いエルゴード性は，$(\tilde{T}(t))\,t\geq 0$ によるシステムの経路安定性と同一である。）

正符号性と単調性に関する仮定

（i） 費用は正である。すなわち，

ある i が存在して $c_j(e_i, w(e_i), y_j)>0$ for all j with $y_j>0$（ただし e_i は $\mathbb{R}^d$ の第 i 単位ヴェクトル）。

（ii） 費用は簡潔化できない。すなわち，

$\emptyset\subsetneq I\subsetneq\{1,\cdots,d\}$ に対して $i\in I, j\notin I$ が存在して $c_j(e_i, w(e_i), y_j)>0$ となる。

（iii） 費用は生産量について増加的である。すなわち，

$y_j\mapsto c_j(p, w, y_j)$ は増加的である。

（iv） 生産量は最終的に有界で正である。すなわち，

ある数 $u_j, v_j>0$ と $t_0\geq 0$ が存在して $u_j\leq y_j(t)\leq v_j$ for all j, all $t\geq t_0$ となる。

定理６．　（[18]）

仮定（i）－(iv）の下で価格設定の過程は弱くエルゴード的である。つまり勝手な初期価格 $p(0)$, $q(0)\in S$ によるすべての基準化された価格経路 $t\mapsto p(t)\in S, t\mapsto q(t)\in S$ に対して

$$\lim_{t\to\infty}\|p(t)-q(t)\|=0$$

となる。

注意．

（１） 定理６の証明は［11］の結果を用いる。

（２） 経路安定性／弱いエルゴード性については［11，17，18，20，21，29］も参照のこと。

（３） 関連する費用が生産量から独立で，その代わりに時間に直接依存する場合，すなわち $c_j(p, w(p), t)$ の場合，定理６と似た結論が証明できる。また，次節の技術変化の議論も参照せよ。

上記のレオンティエフ技術及びコブ・ダグラス技術の例に戻ると，定理６の仮定は次のようにし

て満たされている。すなわち，単にすべての労働投入が（厳密に）正であり $p\geq 0$ に対して $w(p)>0$ でありさえすれば，仮定（ i ）及び（ ii ）は両方の例において満たされている。レオンティエフ技術の場合，関連する費用は生産量から独立であり，それ故（iii）は自明に満たされており（iv）は不必要な仮定である。コブ・ダグラス技術の場合，すべての j に対して $0\leq\beta_j\leq 1$ の場合に（iii）が成立する。$\beta_j=1$ の時には関連する費用は生産量に依存せず（iv）は不必要な仮定である。$\beta_j<1$ の場合には（iv）は，例えば需要のように，システムの外部に関係する仮定である。

5. 相互依存的価格設定：強いエルゴード性

バナッハ空間 $(E,\|\cdot\|)$ の閉凸錐を K として，写像 $T_n: K\to K$ for n の列によって与えられる非自律的な動学体系は次の条件を満たすとき強いエルゴード性を持つという：すなわち任意の $x_0\in K\backslash\{0\}$ に対して $x_{n+1}=T_n x_n$ for $n\geq 0$ によって定義される経路が $K\backslash\{0\}$ にとどまり，かつ，ある $x^*\in K$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\|x_n\|}=x^*$$

である。次の結果は上記のバナッハ空間の場合に強いエルゴード性の基準を与えている。

定理 7． （[11, 12]）
半直線保存的であって $T_n(x)=0$ iff $x=0$ となる写像 $T_n: K\to K$ の列による非自律的な離散型動学体系を考える。写像 T_n が $S=\{x\in K \| x\|=1\}$ 上で K の自己写像 T に一様に収束すると仮定する。T については，T が上昇的で S 上で一様連続かつ，ある数 $a, b>0$ と $0\neq e\in K$ が存在して任意の $x\in S$ について $ae\leq Tx\leq be$ であると仮定する。
すると $Tx=\lambda x$ は一意な解 $x^*\in K, \|x^*\|=1, \lambda^*>0$ を持ち，さらに

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\|x_n\|}=x^* \text{ uniformly for } x_0\in K\backslash\{0\}$$

となる。

定理 7 を用いて，前節で扱った価格設定過程の強いエルゴード性について次の結果を得ることができる。

定理 8． （[18]）
価格設定過程を考え，定理 6 の仮定（ i ）及び（ ii ）の他に次の仮定を考える：

（v） $c_j(p, w(p), y_j)$は p について連続で $\{p\in\mathbb{R}^d_+ \| \|p=1\|\}$ 上で y_j について一様連続である。

（vi） 生産量は収束する，すなわち，$\lim_{t\to\infty} y(t)=y^*\in\mathbb{R}^d_+$ である。

すると，座標 $(Tp)_j=c_j(p, w(p), y^*_j)$ によって定義される $T: \mathbb{R}^d_+\to\mathbb{R}^d_+$ について，方程式 $Tp=$

λp は一意な解 $p^* \geq 0, \| p^* \| = 1, \lambda^* > 0$ を持ち，相対価格 $p(t) \in S$ に関して $\lim_{t\to\infty} y(t) = p^*$ となる。

すでに述べたように，価格設定の過程に技術変化を導入することもできる，すなわち関連する費用が明示的に時間に依存するのである。簡単化のために関連する費用が生産量から独立であると仮定する，例えば時間に依存する投入産出行列を持つレオンティエフ型の技術である。一般的には，次の経路安定性が満たされる単純な例が示すように強いエルゴード性を期待することはできない。

例．（[17, 20]）

一つの財（とうもろこし）を同じ財と労働だけから作るような経済を考える。1単位のとうもろこしを作るのに実物投入として $\frac{1}{3}$ 単位のとうもろこしが必要で，また夏（t が偶数）には労働投入を必要とせず冬（t が奇数）には $\frac{2}{3}$ の労働が1単位の生産のために必要である。結局，

生産可能性集合 $$A(u,t) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}u, 0\right), & t \text{ even} \\ \left(\frac{1}{3}u, \frac{2}{3}u\right), & t \text{ odd} \end{cases}$$

かつ価格は労働によって測られる，つまり $w = 1$，

最小費用関数 $$C(p,w,u,t) = \begin{cases} \frac{1}{3}pu, & t \text{ even} \\ \frac{1}{3}pu + \frac{2}{3}u, & t \text{ odd} \end{cases}$$

費用演算子 $T(t): \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ は

$$T(t)p = \begin{cases} \frac{1}{3}p, & t \text{ even} \\ \frac{1}{3}p + \frac{2}{3}, & t \text{ odd} \end{cases}$$

によって与えられるアフィン写像である。

非自立系，アフィンな離散型動学体系 $p(t+1) = T(t)p(t)$ for $t \geq 0$ によって与えられる価格は，初期価格 $p(0) > 0$ に関係なく $\lim_{t\to\infty} p(2t) = \frac{3}{4}$ でまた $\lim_{t\to\infty} p(2t+1) = \frac{1}{4}$ である。

従って，$\lim_{t\to\infty} p(t)$ は存在しないが任意の2つの経路について $\lim_{t\to\infty} |p(t) - q(t)| = 0$ すなわち，経路安定性が成立している。

ところで，初期価格 $p(0)$ を固定しておいて，写像 $T(0)$ と $T(1)$ の，（$\cdots \circ T(1) \circ T(0) \circ T(1) \circ T(0)$ だけでなく）任意の無限回の合成を許すと，集積点の集合はフラクタル集合すなわちカントール集合になる。経路安定性はこのフラクタル集合が $p(0)$ から独立になることである。

次の結果は，技術変化のケースにおける価格設定において強くエルゴード的になるための条件を与えている。

定理 9． （[10]）

以下の仮定を満たす技術変化のある価格設定過程を考える：すなわち

(a) $A_j(u,t)=uA_j(1,t)$ for all $j\in\{1,\cdots,d\}$, all $u\geq 0$, all $t=0,1,2,\cdots$。

(b) $A_j(1,t)\subset A_j(1,t+1)$ for all j, all t。

(c) $\inf\{l \mid (a,l)\in A_j(1,t)\}\geq k>0$ for all j, all t。

この時，座標 $(Tp)_j=\inf\{pa+w(p)\,l\} \mid (a,l)\in A_j(1,t), t\geq 0\}$ ($p\mapsto w(p)$ は凹かつ同正次的) によって定義される $T:\mathbb{R}^d_+\to\mathbb{R}^d_+$ について，方程式 $Tp=\lambda p$ は一意な解 $p^*\geq 0, \|p^*\|=1, \lambda^*>0$ を持ち，相対価格 $p(t)\in S$ に関して

$$\lim_{n\to\infty} p(t)=p^*$$

となる。

注意.

(1) 定理9において，仮定 (b) は技術変化に際して古い技術は忘れられないことを意味し；(c) は完全自動化は不可能であることを示している。

(2) 定理9において，スペシャルケースとして $A_j(1,t)=A_j$ for all j, all t とおくことができる。定理9の仮定は，例えば A_j が正の労働投入を持つレオンティエフ技術の有限集合の場合に満たされている。言い換えれば，定理9は技術選択を許す線形レオンティエフモデルを含んでいる。

参 考 文 献

[1] K. Arrow and D. Starrett, *Cost-theoretical and demand-theoretical approaches to the theory of prise* determination, in : *Carl Menger and the Austrian School of Economics,* ed. J. R. Hicks and W. Weber, Oxford Clarendon Press, Oxford (1973), 129-148.

[2] L. Boggio, *Stability of production prices in a model of general interdependence,* in [33], 83-114.

[3] M. Caminati and F. Petri (eds.), *Convergence to long-period positions,* Special issue of Political Fconomy, 6 (1990).

[4] P. Chander, *The nonlinear inpul-output model,* J. Econ. Theory, 30 (1983), 219-229.

[5] R. A. Dana, M. Florenzano, C. Le Van and D. Lévy, *Production prices and general equilibirium prices,* J. Math. Econ., 18 (1989), 263-280.

[6] G. Duménil and D. Lévy, *The classicals and the neoclassicals : a rejoinder to Frank Hahn,* Cambridge J. Econ., 9 (1985), 327-345.

[7] T. Fujimoto, *Non-linear generalization of the Frobenius theorem,* J. Math. Econ., 6 (1979), 17-21.

[8] ──, *Non-linear Leontief models in abstract spaces,* J. Math. Econ., 15 (1986), 151-156.

[9] T. Fujimoto and U. Krause, *Strong ergodicity for strictly increasing nonlinear operators,* Lin. Alg. Appl., 71 (1985), 101-112.

[10] ──, *Ergodic price setting with technical progress,* in [33], 115-124.

[11] ──, *Asymptotic properties for inhomogeneous iterations of nonlinear operators,* SIAM J. Math. Anal., 19 (1988), 841-853.

[12] ──, *Stable inhomogeneous iterations of nonlinear positive operators on Banach spaces,* to appear in SIAM J. Math. Anal.

[13] E. Kohlberg, *The Perron-Frobenius theorem without additivity,* J. Math. Econ., 10 (1982), 299-303.

[14] U. Krause, *Minimal cost pricing leads to prices of production,* Cahiers de la R. C. P. Systemes de

Prix de Production 2, 3 ("La Gravitation"), Paris 1984.

[15] ——, *Perron's stability theorem for nonlinear mappings,* J. Math. Econ., 15 (1986), 275-282.

[16] ——, *A nonlinear extension of the Birkhoff-Jentzsch theorem,* J. Math. Anal. Appl., 114 (1986), 552-568.

[17] ——, *Gravitation processes and technical change : convergence to fractal patterns and path stability,* in [3], 317-327.

[18] ——, *Path stability of prices in a nonlinear Leontief model,* Ann. Oper. Res., 37 (1992), 141-148.

[19] ——, *Relative stability for ascending and positively homogeneous operators on Banach spaces,* mimeo 1992.

[20] ——, *Path stability in positive descrete dynamical systems,* to appear.

[21] ——, *Positive nonlinear systems : Some results and applications,* to appear in the Proceedings of the First World Congress of Nonlinear Analysts, Tampa 1992.

[22] U. Krause and P. Ranft, *A limit set trichotomy for monotone nonlinear dynamical systems,* Nonlin. Anal. TMA, 19 (1992), 375-392.

[23] U. Krause and R. Nussbaum, *A. limit set trichotomy for self-mappings of normal cones in Banach spaces,* Nonlin. Anal. TMA, 20 (1993), 855-870.

[24] M. Morishima, *Generalizations of the Frobenius-Wielandt theorems for non-negative square matrices,* J. London Math. Soc., 36 (1961), 211-220.

[25] ——, *Equilibrium, stability, and Growth,* Oxford University Press, London (1964).

[26] M. Morishima and T. Fujimoto, *The Frobenius theorem, its Solow-Samuelson extension and the Kuhn-Tucker theorem,* J. Math. Econ., 1 (1974), 199-205.

[27] H. Nikaido, *Balanced growth in multi-sectoral income propagation under autonomous expenditure schemes,* Rev. Econ. Studies, 31 (1964), 25-42.

[28] ——, *Convex Structures and Economic Theory,* Academic Press, New York (1968).

[29] R. Nussbaum, *Some nonlinear weak ergodic theorems,* SIAM J. Math. Anal., 21 (1990), 436-460.

[30] Y. Oshime, *An extension of Morishima's nonlinear Perron-Frobenius theorem,* J. Math. Kyoto Univ., 23 (1983), 803-830.

[31] ——, *Perron-Frobenius problem for weakly sublinear maps in a Euclidean positive orthant,* Japan J. Ind. Appl. Math., 9 (1992), 313-350.

[32] T. T. Read, *Balanced growth without constant returns to scale,* J. Math. Econ., 15 (1986), 171-178.

[33] W. Semmler (ed), *Competition, Instability, and Nonlinear Cycles,* Springer-Verlag, Berlin etc. (1986).

[34] R. M. Solow and P. A. Samuelson, *Balanced growth under constant returns to scale,* Econometrica, 21 (1953), 412-424.

[35] I. Steedman, *Natural prices, differential profit rates rates and the classical competitive process,* The Manchester School, June ed. (1984), 123-140.

[36] B. P. Stigum, *Balanced growth under uncertainty,* J. Econ. Th., 5 (1972), 42-68.

[37] D. Weller, *Hilbert's metric, part metric, and self-mappings of cone,* Ph. D. diss., Universität Bremen (1987).

[38] C. C. von Weizsäcker, *Steady State Capital Theory,* Springer-Verlag, Berlin etc. (1971).

翻訳：**中　村　愼　助**
（経済学部助教授）