Title	有限行動のlarge gameについて : 総合的考察
Sub Title	On large games with finite actions : a synthetic treatment
Author	Khan, M. Ali Sun, Y. 武藤, 功
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1994
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.87, No.1 (1994. 4) ,p.73- 84
JaLC DOI	10.14991/001.19940401-0073
Abstract	
Notes	小特集 : 数理経済学国際会議
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19940401-0073

「三田学会雑誌」87巻1号（1994年4月）

有限行動のLarge Gameについて：総合的考察*

M. アリ・カーン
(ジョンズ・ホプキンス大学)
イェヌング・サン
(シンガポール国立大学)

1. 序

Large gameに関する理論としては，ともに70年代に溯ることができる，ふたつの定式化が知られている。第一の定式化は，シュマイドラー（Schmeidler）［1973］に負うもので，プレイヤーの名前の測度空間にもとづくものである。それゆえそれは，匿名ではない（non-anonymous）large gameの定式化になっている。他方，第二の定式化は，マス一コレル（Mas-Colell）［1978；またより洗練された1984年の定式化をも参照のこと］に負うものであり，プレイヤーの特性の分布にもとづいている。それゆえそれは，匿名の（anonymous）large gameの定式化になっている。これらふたつの定式化の相違は，プレイヤーの社会の反応（*societal responses*）への依存をどのように捉えるかということによっている。

第一の定式化では，プレイヤーの利得は平均された（積分された）反応に依存している。それに対して第二の定式化では，反応の分布（確率測度）に依存している。これらすべてのことは，ふたつの定式化が技術的にも内容的にも異なっているという事実を明確に示している。

第一の定式化は，そもそもその概念からして測度理論にもとづくものである。プレイヤーの名前

* 本稿の草稿は1993年7月に東京で開催された慶應義塾経済学会／東京工業大学主催のコンファレンス『経済理論における非線形および凸解析』における招待講演で報告したものである。現在の版は，ブルーミングトンとインディアナポリスとにおけるインディアナ大学のミクロ経済学の研究集会において報告したものである。両著者は，ボブ・アンダーソン，シュビール・チャクラバルティ，ジョー・ハリングトン，レオ・ハーヴィッチ，サング・キム，カリ・ラス，ネイル・ロスマン，ボブ・サンディ，山崎昭，Shinji Yamashige，矢野誠の各教授の質問および激励に対して深甚なる感謝の意を表したい。しかし，ありうべき誤謬の責任は著者に帰する。この論文は1993年10—11月にイェヌング・サンがジョンズ・ホプキンス大学経済学部を訪れた際に完成した。両著者はそのような訪問の機会を与えて下さったロウ・マッキーニ教授に感謝している。

の空間が，設定からして，このことを明確に示している。他方，第二の定式化は，確率測度の用語によって述べられているという事実にもかかわらず位相的なものである。これらの考察のより完全な説明はカーン（Khan）[1986, 1989] を参照のこと。しかし，プレイヤーの名前の空間とプレイヤーの特性の空間とがともにアトムレスであり，かつ行動集合の要素が有限個に制限されている場合には，ふたつの定式化が本質的に同値であるということは十分に認識されていない。このことは，ここでの関心事であるシュマイドラーとマス—コレルの定理にも当てはまる。社会の反応のふたつの定式化は，本質的に同等である。同等であるということは，位相同型であることを意味している。本稿はこの同値性に彫琢を加え，さらに補足として行動集合が可算無限の場合についていくつかの考察を与える。

そこでまず，シュマイドラーのケースを取り上げ，その純粋戦略のクールノー＝ナッシュ均衡の存在に，さらにマス—コレルのケースを取り上げ，その対称的なクールノー＝ナッシュ均衡の分布の存在に焦点をあてる。シュマイドラーがその論文でしたようにルベーグ空間 [0,1] ではなく，より抽象的な測度空間の設定の下で彼の定理を考えるならば，プレイヤーの特性の空間をプレイヤーの名前の空間とみなし，それによってふたつの空間を恒等写像で結びつければ，彼の存在定理からマス—コレルの存在定理を導き出せる。この簡単な考察を踏まえれば，残された議論は，確認のための決まりきった段取りを踏むことでしかない。しかしながら，もしシュマイドラーの定理を [0,1] において主張するとすれば，任意の完備可分な距離空間上における測度は，アトムレスな確率空間上で定義された確率変数によって導入された測度とみなすことができ，本質的に同一の推論を行いうることを主張するスコロホッド（Skorokhod）の補題を用いなければならない。これについては，マス—コレル [1984] の示唆とラス（Rath）[1991] のその説明を参照のこと。

このような理解しにくい手段は避けて，単にすべてのプレイヤーが同一のシュマイドラー型のアトムレスなゲームは，特性の空間における一点にのみ集中したマス—コレル型のアトミックなゲームを導くという事実によって証明をした。確率論の用語によれば，これは単にアトムレスな確率空間上での確率変数によって導入された測度は必ずしもアトムレスとは限らないということである。これをもっと技術的ではなくいえば，すべてのプレイヤーが無視可能な匿名ではないゲームは，プレイヤーの無視しえない比率が同じ特性をもっているものといってよい。

この考察によれば，マス—コレルの定理（彼の定理 2）を用いることはできないであろう。なぜなら，それは基本的な仮定として，プレイヤーの特性の空間上でのアトムレスな測度をとっているからである。ラス [1991] はマス—コレルの一般的な存在定理（定理 1）とカーン＝サン（Sun）[1991] の“分割化”の手法とを用いてこの困難を克服した。

ラスの補題は，明らかにそれ自体としても興味深いものである。しかし，彼のアプローチによってここでの主たる関心事であるマス—コレルの定理 2 からシュマイドラーの定理を証明するということは不可能である。そこで，マス—コレルの定理がつぎのような利得の再調整（*rescaling*）によ

ってシュマイドラーの定理を含意することを示す。すなわち，名前の異なる同一の主体は，再調整によって明らかに異なる利得を獲得する。この再調整の背後にある技巧は，実数の場合におけるリヤプーノフ（Ljapounov）の定理を用いている。そして，確率論からの初等的な補題を用いる。少なくとも経済理論においてそれを用いたのはガブツェヴィチ＝メルテンス（Gabszewicz-Mertens）［1971］を嚆矢とする。このような再調整によっても，ゲーム理論の本質的性格は何も変わらないので，上述の困難は回避され，ラスの業績に正面から取り組むことができる。ひとたび再調整を行うと，残された議論は再び確認のための決まりきった段取りを踏むことだけである。もちろんシュマイドラーの結果を“ルベーグ区間”で用いるならば，この初等的な補題でさえも不要である。

シュマイドラーの定理からマス－コレルの定理が容易に導かれることが分かれば，この筋道を辿ることによってさらに強い結果がえられるのかどうかを研究してみることに駆られる。われわれは，一部は本質的で他の部分は非本質的ではあるが，特性の空間が相互の方法で考えられたときの状況に適用し，マス－コレルの定理を強めた結果を示す。別の方法によって，われわれの手法は，ダミー指標と利得とがともに特性を構成するという状況をも考えることができる。もちろん，ここで匿名の解釈を拡張する。しかし，この拡張された解釈においても，シュマイドラーの定理がその証明のために用いられ，そしてまたこの拡張された解釈によるものは，以前に用いた最小限の手段に訴えることさえもせずに，彼の定理を証明することができるということは興味を抱かせることである。議論は単に，特性の空間上で導入された測度はいつもアトムレスであるという考察に彫琢を加えることである。

それにもかかわらず，もちろんシュマイドラーの定理を強める証明には，そのすべてにおいて循環的な要素がある。まず取り掛かる最初の結果を証明するために用いられた別の結果を証明するためには，その結果を用いているのである。この循環性に彫琢を加えることさえも，実際にはこの論文の要点なのである。われわれは結局のところ，理論の異なるふたつの定式化の本質的な同値性を示す。文献参照の便宜を図って，有限次元のユークリッド空間に値をとる対応（*correspondence*）の積分についてのいくつかの標準的な結果に言及する。そしてそれらが，関与している結果の独立な存在証明を与えるためにどのように用いられるのかについて素描を与える。

この理論は，行動空間が可算無限の場合にどのようになるのかについて示して本稿の結びとする。そこでは，著者の最近の結果を説明する。詳しくは，カーン＝サン［1993］を参照されたい。その論文では，所与の周辺をもつすべての確率測度の集合の端点は可測函数のグラフ上に集中しているという伝承を一般化している。ダグラス（Douglas）［1964］，リンデンシュトラウス（Lindenstrauss）［1965］を，そしてヨーア（Yor）［1978］による展望論文を参照のこと。

2. いくつかの簡単な考察

$\mathbf{R}^k$を k-次元ユークリッド空間として，その非負象限を $\mathbf{R}^k_+$ とする。$\Delta_k=\{x\in\mathbf{R}^k_+ : \Sigma^k_{i=1}\ x_i=1\}$ をその（$k-1$）-次元の単体とする。本稿の最後から二番目の節までは，記号 A を k 個のすべて異なる要素からなる有限集合 $\{a_1,\ \cdot\cdot\cdot,\ a_k\}$ を表すために保留しておく。確率空間（A, $\mathscr{A}$）上の確率測度の集合は $\mathscr{M}(\{a_1,\ \cdot\cdot\cdot,\ a_k\})$ あるいは $\mathscr{M}(A)$ と表す。ここでは $\mathscr{A}$ は A のべき集合である。

ここでよく知られたつぎの注を想起されたい。

注 1　Δ_k の位相はユークリッド相対位相とし，$\mathscr{M}(\{a_1,\ \cdot\cdot\cdot,\ a_k\})$ の位相は＊弱位相とするとき，これらは位相同型である。

注 1 の証明：　$\phi : \Delta_k \longrightarrow \mathscr{M}(\{a_1,\ \cdot\cdot\cdot,\ a_k\})$ はつぎのようなものとする。すなわち，任意の $x\in\Delta_k$ と任意の $V\subseteq\{a_1,\ \cdot\cdot\cdot,\ a_k\}$ に対して，$\phi(x)(V)=\Sigma_{a_j\in v}x_j$.

確かに任意の $x\in\Delta_k$ に対して，$\phi(x)\in\mathscr{M}(\{a_1,\ \cdot\cdot\cdot,\ k\})$ である。ϕ が全単射であり，Δ_k がコンパクトであることは容易にわかる。よって示すべきことは，ϕ の連続性のみである。そのために，Δ_k から $x_n \longrightarrow x$ となる，任意の点列 $\{x^n\}_{n\in\mathrm{N}}$ を取り出す。いま $\{a_1,\ \cdot\cdot\cdot,\ a_k\}$ 上の任意の連続函数を取り出す。それは，実数の k 個組（$f_1,\ \cdot\cdot\cdot,\ f_k$）である。示すべきことは，

$$\sum_{j=1}^{k} f_j x_j^n \longrightarrow \sum_{j=1}^{k} f_j x_j$$

である。ここで，x_j^n は x^n の第 j 座標である。しかしこの主張は仮定から明らかである。

つぎのことを示すことは読者に任せる。

注 2　$\psi : A \longrightarrow \mathbf{R}^k$ を任意の $i\in(1,\ \cdot\cdot\cdot,\ k)$ に対して，$\psi(a_i)=e_i$ となる写像とする。ここで e_i は $\mathbf{R}^k$ の第 i 単位ベクトルである。このとき，ψ は離散位相をもった A の埋め込みである。言い換えれば，Aとユークリッドの相対位相をいれた $\psi(A)$ の間には，位相同型写像が存在する。

注 3　もしふたつのコンパクト位相空間が位相同型であるとすれば，それらの上での実数値連続函数の空間は，一様収束ノルム位相をいれて位相同型である。

$\mathscr{U}^{\Delta}_A$ と $\mathscr{U}^M_A$ をそれぞれ $A\times\Delta_k$, $A\times\mathscr{M}$ 上の実数値連続函数空間とする。それぞれの位相は一様収

束ノルム位相とする。注1と3とにより，これらふたつの空間は位相同型である。したがって，特に断ることなくふたつの空間を移動することができる。このことによって，それらの記号を厳密に区別しないで，どちらも $\mathscr{U}_A$ で表記することにする。またAと集合 $\{e_1, \cdots, e_k\}$ とを同一視する。

3．ふたつの基準

定理1 ［シュマイドラー］ $(T, \mathscr{T}, \lambda)$ をアトムレスな確率空間，$\mathscr{g}$ をTから $\mathscr{U}_A$ への可測写像とする。$\mathscr{U}_A$ の代数はボレル σ-代数 $\mathscr{B}(\mathscr{U}_A)$ とする。このときある可測函数 $f: T \longrightarrow \mathbf{R}^k$; $f(t)=\{e_1, \cdots, e_k\}$ が存在して，つぎの性質を満たす。すなわち λ-ほとんどすべての $t \in T$ に対して，

$$u_t\left(f(t), \int_{t\in T} f(t)\,d\lambda\right) \geq u_t\left(e_i, \int_{t\in T} f(t)\,d\lambda\right),\ i=1, \cdots, k.$$

ただし $u_t=\mathscr{g}(t) \in \mathscr{U}_A$.

シュマイドラーは，ルベーグ測度空間 [0,1] の設定で彼の定理を述べたことを想起していただきたい。序において強調しておいたように，このことはここで問題としている点には何の本質的な重要性も持っていない。

定理2 ［マスーコレル］ μ を $(\mathscr{U}_A, \mathscr{B}(\mathscr{U}_A))$ 上のアトムレスな確率測度とする。そのとき，周辺測度 τ_A と $\tau\,\mathscr{U}_A$ をもった $\tau\,\mathscr{M}(\mathscr{U}_A\times \mathrm{A})$ が存在して，つぎの性質を満たす。

(i) $\tau\,\mathscr{U}_A$ は μ と合致する.

(ii) $\tau(B_\tau)=\tau(\{u, a)\in(\mathscr{U}_A\times A): u(a, \tau_A)\geqq u(x, \tau_A)$ for all $x\in A\})=1$.

(iii) ある可測函数 $h: \mathscr{U}_A \longrightarrow \mathrm{A}$ が存在して，$\tau(\mathrm{Graph}_h)=\tau(\{u, h(u))\in(\mathscr{U}_A\times A): u\in \mathscr{U}_A\})=1$.

今後は，定理1と2をそれぞれ定理Sと定理Mとして言及する。

4．いくつかの便利な記号

$(X, \mathscr{X})$ と $(Y, \mathscr{Y})$ を可測空間とする。任意の $(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$-可測写像 $f: X \longrightarrow Y$ に対して，$f_\star: \mathscr{M}(\mathrm{X}) \longrightarrow \mathscr{M}(\mathrm{Y})$ であり $f_\star(\mu)(\mathrm{B})=\mu(f^{-1}(\mathrm{B}))$, $\forall \mathrm{B}\in\mathscr{Y}$, $\forall\mu\in\mathscr{M}(\mathrm{X})$. ここで，$\mathscr{M}(\mathscr{X})$ と $\mathscr{M}(\mathscr{Y})$ はそれぞれ $(X, \mathscr{X})$, $(Y, \mathscr{Y})$ 上のすべての確率測度の空間とする。

$(\mathrm{Z}, \mathscr{Z})$ を別の可測空間とし，$g: Y \longrightarrow Z$ をひとつの $(\mathscr{Y}, \mathscr{Z})$-可測写像とする。そのとき，

$$(g\circ f)_\star = g_\star \circ f_\star \text{ where } (g\circ f)_\star: \mathscr{M}(X) \longrightarrow \mathscr{M}(Z).$$

これは，任意の$\lambda \in \mathscr{M}(\mathrm{X})$ と任意の$B \in \mathscr{X}$ に対して，

$$(g \circ f)_\star(\lambda)(B) = \lambda((g \circ f)^{-1}(B)) = \lambda(f^{-1}(g^{-1}(B))) = f_\star(\lambda)(g^{-1}(B))$$
$$= (g_\star \circ f_\star)(\lambda)(B)$$

という事実から簡単に導ける。

5. 定理Sの帰結としての定理M

定理Sの帰結として定理を証明する。そのために，プレイヤーの名前の空間として空間（$\mathscr{U}_A$，$\mathscr{B}(\mathscr{U}_\mathrm{A}), \mu$）を考える。これは明らかにアトムレスな確率空間である。i を $\mathscr{U}_A$ 上の恒等写像とする。――それは，定理Sにおける写像 $\mathscr{g}$ を表し，それは確かに可測である。そのとき，定理Sを適用して，ある可測函数 $f: \mathscr{U}_A \longrightarrow \mathbf{R}^k$；$f(u) \in \{e_1, \cdots, e_k\}$ が存在して，μ-ほとんどすべての $u \in \mathscr{U}_A$ に対して，

$$u\left(f(u), \int_{u \in \mathscr{U}A} f(u)\, d\mu\right) \geq u\left(e_i, \int_{u \in \mathscr{U}A} f(u)\, d\mu\right),\ i = 1, \cdots, k$$

であることが主張できる。確かに $\int_{u \in \mathscr{U}A} f(u)\, d\mu \in \Delta_k$ であり，それゆえ注1の証明における ϕ の定義によって，$\phi\left(\int_{u \in \mathscr{U}A} f(u)\, d\mu\right) \in \mathscr{M}(A)$ であり，そして $\phi\left(\int_{u \in \mathscr{U}A} f(u)\, d\mu\right) = f_\star(\mu)$.

写像（i, f）: $\mathscr{U}_\mathrm{A} \longrightarrow (\mathscr{U}_\mathrm{A} \times A)$ は可測であるから，$\tau \equiv (i, f)_\star(\mu)$ を考えることができる。μ は確率測度であることから，τ も確率測度である。τ が定理Mの要求されているすべての条件を満たすことを示そう。まず初めに，

$$\tau(\mathrm{Graph}\, f) = \tau(\{(u, a) \in \mathscr{U}_A \times A : a = f(u), u \in \mathscr{U}_A\}) = \tau(\{(u, f(u) : u \in \mathscr{U}_A\})$$
$$= (i, f)_\star(\mu)((i, f)(\mathscr{U}_A)) = \mu((i, f)^{-1}((i, f)(\mathscr{U}_A))) = \mu(\mathscr{U}_A) = 1.$$

つぎに示すことは，

$$\tau_{\mathscr{U}A} = (\mathrm{proj}_1)_\star(\tau) = (\mathrm{proj}_1)_\star((i, f)_\star(\mu)) = (\mathrm{proj}_1 \circ (i, f))_\star(\mu) = i_\star(\mu) = \mu.$$

さらにつぎに見ることは，

$$\tau_A = (\mathrm{proj}_2)_\star(\tau) = (\mathrm{proj}_2)_\star((i, f)_\star(\mu)) = (\mathrm{proj}_2 \circ (i, f))_\star(\mu) = f_\star(\mu)$$

である。最後に，$\mathscr{U}_A^F \in \mathscr{B}(\mathscr{U}_A), \mu(\mathscr{U}_A^F) = 1$　が存在して，

$$B_\tau = B_{\tau_A} = B_{f_\star(\mu)} = \{(u, a) \in (\mathscr{U}_A \times A) : u(a, f_\star(\mu)) \geq u(x, f_\star(\mu)) \text{ for all } x \in A\}$$
$$\supseteq \{(u, f(u)) : u \in \mathscr{U}_A^F\} = (i, f)(\mathscr{U}_A^F),$$

であることが分かるので，

$$\tau(B_\tau) = (i, f)_\star(\mu)(B_\tau) \geq (i, f)_\star(\mu)((i, f)(\mathscr{U}_A^F)) = \mu((i, f)^{-1}((i, f)(\mathscr{U}_A^F)))$$
$$\geq \mu(\mathscr{U}_A^F) = 1$$

を得る。τ は確率測度であるから，示すべきことは完結した。

ラス［1991］の論文によって明らかにされたように，もし定理Sを（T，$\mathscr{T}$，λ）ではなくルベ

ーグ可測空間 [0,1] 上で考えるならば，恒等写像ではなくてスコロホッドの補題によって与えられる確率変数を用いる必要に迫られる。

6. 定理Mの帰結としての定理S

アトムレス確率空間のいわゆる普遍性（*universality*）性質に関する予備的結果を述べておく必要がある。ガブスツェヴィチ＝メルテンス［1971；補題1］を参照のこと。証明はカラテオドリ(Carathéodory) の測度の拡張定理にもとづいている。

補題1　$(T, \mathscr{T}, \lambda)$ をアトムレスな確率空間とする。このときある可測函数 $g: T \longrightarrow [0,1]$ が存在して，それはルベーグ測度を導入する。

さてここで定理Sの証明に立ち返ろう。$\mathscr{g}$ は可測であるから，確率測度 $\mu \equiv \mathscr{g}_\star(\lambda)$ を考えることができる。λ がアトムレスであるにもかかわらず，μ は必ずしもアトムレスとは限らない。しかしながら，μ は確率測度であるから，そのアトムレスはたかだか可算個である。それらを $\{u_i\}_{i\in I}$ と書くことにする。ここで I は可算個の指標の集合である。

$$T^i \equiv \mathscr{g}^{-1}(\{u_i\}) \quad \text{かつ} \quad T^0 \equiv T / \cup_{i\in I} T^i$$

とする。すべての $i \in I$ に対して，$\mu_i = \mu(\{u_i\})$ とする。$\lambda(T^i) = \mu_i$ であることは明らか。そこで可測空間 $([1, 1+\mu_i], \nu)$ を考えよう。ここで ν は対応する区間上でのルベーグ測度を表す。補題1から測度を保存する写像

$$f_i: (T^i, \mathscr{T} \cap T^i, (\lambda|_{T_i})) \longrightarrow ([1, 1+\mu_i], \nu)$$

が存在することが分かる。

いま T から U_A への写像 F をつぎのように定義する。すなわち，

$$F(t) = \begin{cases} G(t) \text{ for all } t \in T^0 \\ f_i(t)\mathscr{G}(t) \text{ for all } t \in T^i,\ i \in I. \end{cases}$$

確かに F は適当な σ −代数に関して可測写像である。また，その構成によって $\mu^F \equiv F_\star(\lambda)$ はアトムレスな測度である。

定理Mの仮定は満たされているので，それを確率測度 $\tau \in \mathscr{M}(\mathscr{U}_A \times A)$ と，つぎのような可測函数 $h: U_A \longrightarrow \mathrm{A}$ の存在に適用できる。すなわち，$\tau_\mathrm{A} = h_\star(\mu^F)$ かつ $\mathscr{U}_A$ の μ^F −ほとんどいたるところで，

$$u'(h(u), \tau_\mathrm{A}) \geqq u(x, \tau_\mathrm{A}) \text{ for all } x \in A.$$

しかしこのことは λ-ほとんどすべての $t \in T$ に対して，

$$F(t)(h(F(t)), \tau_A) \geqq F(t)(x, \tau_A) \text{ for all } x \in A$$
であることを意味する。

すべての $t \in T$ に対して，$g(t)=h(\mathscr{f}(t))$ とする。このとき，

$$\tau_A = h_\star(\mu^F) = h_\star F_\star(\lambda) = (hF)_\star(\lambda) = g_\star(\lambda).$$

いま各 $i \in I$ と λ-ほとんどすべての $t \in T^i$ に対して，$f_i(t)\mathscr{f}(t)(g(t), g_\star(\lambda)) \geq f_i(t)\mathscr{f}(t)(x, \tau_A)$ for all $x \in A$.

各 $i \in I$ かつ λ-ほとんどすべての $t \in T^i$ に対して，$f_i(t)>0$ であり，T において λ-ほとんどいたるところ

$$\mathscr{f}(t)(g(t), g_\star(\lambda)) > \mathscr{f}(t)(x, \mathscr{f}_\star(\lambda)) \text{ for all } x \in A.$$

注1によって，$g_\star(\lambda)=\int_{t\in T} g(t)\,d\lambda$ となることが判明し，証明が完結する。

定理Sが（T，T，λ）ではなくルベーグ測度空間［0,1］上で考えられたならば，補題1を用いることをせずに定理Mから導けることを指摘しておくのがよいだろう。

7．本質的かつダミー特性をもった匿名ゲーム

ここで，定理Mにおけるように特性空間が U_A の直積の場合と，抽象的な確率空間の場合とについて，定理Mの簡単な一般化を示しておく。

定理3． μ を $(\mathscr{U}_A\times T, \mathscr{B}(\mathscr{U}_A)\otimes\mathscr{T})$ 上のアトムレスな確率測度とする。このとき，$\tau \in \mathscr{M}((\mathscr{U}_A\times \mathrm{T})\times A)$ が存在して，つぎの性質を満たす。

(i) $\tau_{(\mathscr{U}A\times T)}$ は μ である。

(ii) $\tau(B\tau)=r(\{((u,t),a)\in((\mathscr{U}_A\times\mathrm{T})\times A) : u(a, r_A)\geqq u(x,\tau_A) \text{ for all } x\in A\})=1$.

(iii) 可測函数 $h : \mathscr{U}_A\times T \longrightarrow A$ が存在して，$\tau(\mathrm{Graph})_h=\tau(\{((u,t), h(u,t))\in((\mathscr{U}_A\times T)\times A) : (u,t)\in(\mathscr{U}_A\times T)\})=1$ かつ $\tau_A=h_\star(\mu)$.

7．1　定理Sの帰結としての定理3

proj_1 を $\mathscr{U}_\mathrm{A}\times\mathrm{T}$ 上の第1正射影とする。それは定理Sにおける写像 $\mathscr{f}$ を表していて，確かに可測である。$(\mathscr{U}_A\times\mathrm{T}, \mathscr{B}(\mathscr{U}_A)\otimes\mathscr{T}, \mu)$ はアトムレスな確率であるから，定理Sを適用して，可測函数 $f : \mathscr{U}_\mathrm{A}\times\mathrm{T}\longrightarrow \mathbf{R}^k$; $f(u,t)\in\{e_1\cdots e_k\}$ を得て，それは μ-ほとんどすべての $(u,t)\in\mathscr{U}_\mathrm{A}\times\mathrm{T}$ に対して，

$$u\left(f(u,t), \int_{(u,t)\in(\mathscr{U}A\times T)} f(u,t)\,d\mu\right) \geq u\left(e_i, \int_{(u,t)\in(\mathscr{U}A\times T)} f(u,t)\,d\mu\right),\ i=1,\cdots,k.$$

確かに $\int_{(u,t)\in(\mathscr{U}A\times T)} f(u,t)\,d\mu \in \Delta_k$ であり，注1の証明における ϕ の定義より，$\phi(\int_{(u,t)\in(\mathscr{U}A\times T)} f(u,t)\,d\mu)) \in \mathscr{M}(\mathrm{A})$ である。さらに，$\phi(\int_{(u,t)\in(\mathscr{U}A\times T)} f(u,t)\,d\mu)) = f_\star(\mu)$.

写像 $(i, f) : (\mathscr{U}_A\times T)\longrightarrow((\mathscr{U}_A\times T)\times A)$ は可測であるから，確率測度 $r\equiv(i, f)_\star\mu$ を考え

ることができる。定理Mの証明で，$(\mathscr{U}_A\times T)$ と $f(u,\ t)$ をそれぞれ $\mathscr{U}_A$ と $f(u)$ に置き換えることによって τ が定理3の要求しているすべての仮定を満たすことの確認は読者に委ねる。

7．2　定理3の帰結としての定理S

写像 $(\wp,\ i):T\longrightarrow(\mathscr{U}_A\times T)$ を考える。$(\mathscr{U}_A\times \mathrm{T})$ の σー代数として $\mathscr{B}(\mathscr{U}_A)\times\mathscr{T}$ を備えているものとする。容易に分かるように，$(\wp,\ i)$ は可測であり，測度 $\mu\equiv(\wp,\ i)_\star(\lambda)$ はアトムレスな確率測度である。そこで定理3によって可測函数 $h:\mathscr{U}_A\times T\longrightarrow A$を得て，$\mu$ーほとんどすべての $(u,\ t)\in\mathscr{U}_A\times T$ に対して，

$$u(h(u,t),h_\star(\mu))\geq u(x,h_\star(\mu))\ \text{for all}\ x\in A.$$

$f=h\circ(\wp,\ i)$とする。λーほとんどすべての $t\in T$ に対して，

$$\wp(t)(f(t),\int_{t\in T}f(t)\,d\lambda)\geq\wp(t)(e_i,\int_{t\in T}f(t)\,d\lambda),\ i=1,\cdots,k$$

であることを主張する。そうでないと仮定してみよう。すると $K\in\mathscr{T},\lambda(K)>0$ が存在して，

$$\wp(t)(x,\int_{t\in T}f(t)\,d\lambda)>\wp(t)(f(t),\int_{t\in T}f(t)\,d\lambda)\ \text{for some}\ x\in A$$
$$\text{and for all}\ t\in K$$

となる。注1によってこのことは

$$\wp(t)(x,f_\star(\lambda))>\wp(t)(f(t),f_\star(\lambda))\ \text{for some}\ x\in A\ \text{and for all}\ t\in K$$

を意味する。しかし，$f=h\circ(\wp,\ i)$ であることは，

$$f_\star(\lambda)=(h\circ(\wp,i))_\star(\lambda)=h_\star\circ(\wp,i))_\star(\lambda)=h_\star(\mu)$$

を意味し，上記の表現を改めて

$$\wp(t)(x,h_\star(\mu))>\wp(t)(h(\wp(t),\ t),h_\star(\mu))\ \text{for some}\ x\in A$$
$$\text{and for all}\ t\in K.$$

と書く。u を $\wp(t)$ のかわりに代入し，

$$\mu((\wp,i)(K))=(\wp,i)_\star(\lambda)((\wp,i)(K)=\lambda(\wp,i)^{-1}((\wp,i)(K)))\geq\lambda(K)>0$$

であることに注意すれば，すぐに矛盾を見る。

8．存在証明についてのノート

1965年にオーマン（Aumann）は値を有限次元のユークリッド空間にとる対応の積分理論を発展させた。こうして，アトムレスな確率空間（$T,\ \mathscr{T},\ \lambda$）上での対応 $F:T\longrightarrow\mathbf{R}^k_+$ に対して，オーマンは積分の凸性について

$$\int_{t\in T}co(F(t))\,d\lambda=\int_{t\in T}F(t)\,d\lambda$$

を主張するリヤプーノフ＝リヒター（Richter）の定理を発展させた。ここで，$co\,A$は集合Aの凸包である。さらに確率空間（$T,\ \mathscr{T},\ \lambda$）と距離空間$X$上での対応 $F:T\times X\longrightarrow\mathbf{R}^k$ に対して，

X 上での $F(t,\cdot)$ の積分が λ-ほとんどすべての T の t に関して優半連続であることが，X 上の積分の優半連続性を含意することをも示した。詳細はオーマン［1965, 1976］を参照のこと。

周知のように，シュマイドラーは純粋戦略のクールノー＝ナッシュ均衡の存在定理を，よりもっと一般的な設定で獲得される混合戦略均衡を“純粋化”することによってアトムレスな匿名ではないゲームにおいて証明した。彼の定理1を参照のこと。この純粋化のために，シュマイドラーはオーマンによって発展させられた積分の理論を，そして特に上に引用したふたつの定理を用いた。1991年に，ラスは対応

$$F : T\times\varDelta_k \longrightarrow \varDelta_k \quad \text{where } F(t,x)=\mathrm{Argmax}_{a\in\varDelta_k}\, u_t(a,x)$$

の積分にもとづいて，シュマイドラーの結果を直接的に証明した。ラスは，角谷の定理を用いることをつうじて対応

$$\phi : \varDelta_k \longrightarrow \varDelta_k \quad \text{where } \phi(x)=\int_{t\in T} F(t,x)\,d\lambda.$$

の不動点を探した。オーマンの可測選択子の定理とリヤプーノフ＝リヒターの凸性定理に加えて，ラスはまた積分の優半連続性についての結果を必要とした。ラスの業績によって，われわれは定理Ｓの直接的および間接的証明の双方を知っている。

1984年に，マス―コレルはすでに対称的なクールノー＝ナッシュ均衡の分布の存在の直接的証明を，対応

$$\mathscr{U}_A\times\varDelta_k \longrightarrow \varDelta_k \quad \text{where } F(u,x)=\mathrm{Argmax}_{a\in\varDelta_k}\, u(a,x).$$

の積分にもとづいて行っている。マス―コレルはまた，角谷の定理を用いて対応

$$\phi : \varDelta_k \longrightarrow \varDelta_k \quad \text{where } \phi(x)=\int_{u\in\mathscr{U}_A} F(u,x)\,d\mu,$$

の不動点を見いだしている。そしてその中で，彼はオーマンによって発展させられた積分理論の強い威力に頼らなければならなかった。

1991年に著者は，アトムレスな有限行動ゲームにおける，あらゆるクールノー＝ナッシュ均衡の分布は積分のいかなる理論にも訴えることなく対称化できることを示した。このようにして，マス―コレルの結果を，たとえばマス―コレルの定理1のような，より一般的な設定において獲得されるクールノー＝ナッシュ均衡の分布を“対称化”することによって導き出すことができた。こうして，定理Mの直接的および間接的証明の双方が知られている。

この説明を意図した論文の文脈においては，定理3の証明だけが残されている。たとえばマス―コレル［1984］における写像を適当に修正しながら証明を与えることは読者に委ねる。

9．可算無限の行動空間

A が可算無限のコンパクト距離空間である立場に立ち返ろう。カーン＝サン［1993］の主要結果の背後にあることをいくつかの注釈として述べるに止めたい。

まず初めに，定理Sにおける集合 $\{e_1, \cdots e_k\}$ を集合 $\{e_1, \cdots e_k \cdots\}$ に置き換えた素朴なアプローチは有効ではないということは明らかである。ひとつには，集合 $\{e_1, \cdots e_k \cdots\}$ を取り巻く空間を特定化しなければならない。そのような空間は必然的に無限次元にならなければならないから，無限次元空間上での積分に直接に導かれる。積分の凸性についてのリヤプーノフ＝リヒターの定理が，無限次元空間では成り立たないことはよく知られている。そこでカーン [1986] のように，クールノー＝ナッシュ均衡を近似することになる。

他方，$\{e_1, \cdots e_k\}$ の代わりに $\{e_1, \cdots e_k \cdots\}$ としたときにも定理Mの言明は，少なくとも推測として意味をもつ。ここでも存在に関する素朴なアプローチは有効ではない。たとえばもし，$\{e_1, \cdots e_k \cdots\}$ がヒルベルト空間 l^2 に埋め込まれているならば，行動集合のノルム位相におけるコンパクト性を緩めることができる。そして弱位相とすることを選べば，弱閉包でさえも緩めることができる。こうして，A上の確率測度の空間は，もはやコンパクトではないので，標準的な不動点定理へ持ち込むことができる。

最近の業績において，著者は任意の可算コンパクト距離行動空間でアトムレスなゲームに対する対称的なクールノー＝ナッシュ均衡の存在を報告した。(そのような空間は l^2 上で弱位相を備えた集合 $\{e_1, \cdots e_k \cdots\} \cup \{0\}$ より複雑にはなりえないことに注意せよ）こうして“対称化”によって議論を進めることができる。しかし，可算な行動集合のすべての部分集合からなる集合も，もはや可算ではないから，まえの初等的な（それにもかかわらず測度理論による）議論に持ち込むことはできない。その代わり，クールノー＝ナッシュ均衡の分布は，それが所与の周辺測度の特定の集合の端点である場合，かつその場合に限り対称的であることを明らかにした。この考察は，クライン＝ミルマン（Krein-Milman）の定理を前面に押し出し，結果の満足いく拡張へと進んでいく。詳細はカーン＝サン [1993] を参照のこと。

10. 結　　語

つぎのことを指摘して結語とする。すなわち，行動が有限個の場合においても，large game のふたつの定式化は，もし匿名ではない設定における利得が，社会全体ではなく，プレイヤーの特定の提携の上にとられる平均された反応に依存するならば，必ずしも同値ではない。シュマイドラーの論文の注を，またチャクラバルティ（Chakrabarti）＝カーン [1991] の発展を参照のこと。

参 考 文 献

Aumann, R. J., 1965, Integrals of set valued functions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 12, 1-12.

Aumann, R. J., 1976, An elementary proof that integration preserves uppersemicontinuity, *Journal of*

Mathematical Economics 3, 15-18.

Chakrabarti, S. K. and M. Ali Khan, 1991, Equilibria of large games with imperfect observability, in C. D. Aliprantis, K. C. Border, W. A. J. Luxemburg (eds.), *Positive Operators, Reisz Spaces and Economics* (Berlin : Springer - Verlag).

Douglas, R. G., 1964, On extremal measures and subspace density, *Michigan Mathematics Journal* 11, 243-246.

Gabszwicz, J. J., and J. F. Mertens, 1971, An equivalence theorem for the core of an economy whose atoms are not "too" big, *Econometrica* 5, 713-721.

Jamison, R. E., 1974, A quick proof for a one-dimensional version of Liapunov's theorem, *American Mathematical Monthly* 81, 507-508.

Khan, M. Ali, 1986, Equilibrium points of nonatomic games over a Banach space, *Transactions of the American Mathematical Society* 293, 737-749.

Khan, M. Ali, 1989, On Cournot-Nash equilibrium distributions for games with a nonmetrizable action space and upper semicontinuous payoffs, *Transactions of the American Mathematical Society* 315, 127-146.

Khan, M. Ali and Y. Sun, 1991, On symmetric Cournot-Nash equilibrium distributions in a finite-action atomless game, in M. Ali Khan and N. C. Yannelis (eds.), 1991, *Equilibrium Theory in Infinite Dimensional Spaces* (Berlin : Springer-Verlag).

Khan, M. Ali and Y. Sun, 1993, Extremal structures and symmetric equilibria with countable actions, *Johns Hopkins Working Paper* No. 316.

Lindenstrauss, J., 1965, A remark on extreme doubly stochastic measures, *American Mathematical Monthly* 72, 379-382.

Mas-Colell, A., 1978, An axiomatic approach to the efficiency of non-cooperative equilibrium in economies with a continuuum of traders, *Stanford IMSSS Technical Report 2744*. Reprinted in M. Ali Khan and N. C. Yannelis (eds.), 1991, *Equilibrium Theory in Infinite Dimensional Spaces* (Berlin : Springer-Verlag).

Mas-Colell, A., 1984, On a theorem of Schmeidler, *Journal of Mathematical Economics* 13, 206-210.

Rath, K., 1991, Representation of finite action large games, mimeo, University of Notre Dame.

Rath, K., 1992, A direct proof of the existence of pure strategy equilibria in games with a continuum of players, *Economic Theory* 2, 427-433.

Schmeidler, D., 1973, Equilibrium points of non-atomic games, *Journal of Statistical physics* 7, 295-300.

Yamashige, S., 1992, Large games and large economies with incomplete information, unpublished Ph. D dissertation, The Johns Hopkins University.

Yor, M., 1978, Sous-espaces denses dans L^1 on H^1 et représantation des martingales, *Séminaire de probabilités XII*, Lecture Notes in Mathematics 649, (New York : Springer-Verlag.)

翻訳：**武藤　功**
（防衛大学校社会科学教室専任講師）