Title	期待に起因する非線形景気循環
Sub Title	Expectations driven nonlinear business cycles
Author	Grandmont, J. M. 須田, 伸一
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1994
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.87, No.1 (1994. 4) ,p.63- 72
JaLC DOI	10.14991/001.19940401-0063
Abstract	
Notes	小特集 : 数理経済学国際会議
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19940401-0063

「三田学会雑誌」87巻1号（1994年4月）

期待に起因する非線形景気循環*

ジャン＝ミシェル・グランモン
(CEPREMAP，パリ，およびイエール大学)

市場経済の働きについて伝統的に二つの相容れない考え方がある。一つは「古典派的」と呼べるもので，自由市場に信頼を寄せ，その内部安定性を強調するものである。これに従えば，景気が長期にわたって変動し続けるのは経済システムの基礎的要因（技術，選好，資源）へ外部からマクロ的攪乱が繰り返されるからである。また「古典派的」と銘打たれたモデルは，通常，期待（予想）が自己実現的，すなわち各主体の将来予想（確率分布）が入手可能な情報を所与として正しいことを仮定している。これに従えば，期待が経済変動の独立の要因になるはずはない。もう一つの考え方はしばしば「ケインズ派的」見方と結び付けて考えられるもので，経済の進路に関する予想が多数の人によって共有されるとそれが実現する傾向にあり，さらに外部からの規制が欠如すると，この現象が社会経済システムにかなりの内部不安定性をもたらす原因になり得ると論じるものである。この後者の考えに立てば，多数の人が予期できない仕方で期待を変化させるのはかなり頻繁にあることで，これ（**市場心理**とか**アニマルスピリット**とか呼ばれる）が内生的景気変動の潜在的な主要原因となるのである。

ここ10年程「ケインズ派的」アプローチへの関心が再燃している。これらの新しいモデルによると，システムの基礎的要因（＝与件）を一つ固定しまた期待がその通り実現すると仮定しても，多数の景気循環経路が可能であることがわかってきた。また，モデルの仮定は段々と蓋然性の高いものへと改良されてきており，そこで得られる景気循環経路も現実のマクロ時系列データに見られる動きにますます近付いて来ているように思われる。この論文では，期待に起因する景気循環理論およびそれの生みだすマクロ経済変動について，基礎的概念と方法論とを述べることにする。(1)

＊ この論文の内容に関してより詳しくは，Westdeutscher Verlag からドイツ科学協会のために1992年に出版された論文，及び Oxford University Press からストックホルム会議の紀要（FIEF studies on business cycles）として1993年に出版された論文を参照せよ。

話をわかりやすくするため，以下では簡単な「世代重複モデル（overlapping generations model）」を使うことにする。そこではどの個人も2期間だけ経済活動に参加する。そして人生最初の期である「若年期」に働き，賃金を貨幣の形で貯蓄し，「老年期」に消費する。（なお，人々が2期のどちらにおいても働き，かつ消費すると仮定しても以下と同様の結果が得られることがわかっている。）毎期新たな世代が生まれ前の世代と重なっていくので，どの期を見ても「若年」と「老年」の二世代が共存し，彼らの間で取引が行なわれる。人口は一定で遺産は残せないと仮定する。また，労働1単位を用いて同じ期に消費財1単位を作ることができると仮定しよう。この財は非耐久財で次期まで保存できないものである。（資本財についてはこの論文の最後で考察する。）また，社会に存在する総貨幣量は一定と仮定する。

以上述べてきた世代重複モデルが期待に起因する内生的循環をもたらすわけであるが，そこでの鍵はこのモデルが資本市場の不完全性を内在していることである。つまり，一つの世代に属する人々の資産合計が彼らの生涯の終わり（2期目の終わり）にはゼロにならなければならないという制約である。この資本市場の不完全性が，ある意味で，内生的変動が正しく予見されるにもかかわらず存在するための必要条件となっているのである（ここでは触れないが，内生的変動を引き起こすもう一つの可能性として時間選好率が高いことが挙げられる。このときにも人々は将来の変動を消し去ることに気を使わない。この点については，Boldrin（1988,1991）の展望論文を参照せよ）。

ここで取り上げるモデルは記述を簡単にするために選んだもので，同様の分析はより一般的なモデルでも可能である。例えば，人々がその子孫の効用にも気を使い遺産を残すと仮定しても，子供達の所得を当てにしての借金は不可能という（現実的な）仮定を付け加えれば，本稿と同様の局所的（すなわち定常解の近傍においての）結果を得ることができる。また，人々が無限の長さに亘って生きると仮定しても，将来の賃金を当てにして借金することは難しいという流動性制約に服することをさらに仮定すれば同様である。ただしこの場合には世代重複モデルのときと違い，一期の長さの解釈としてかなり短く2，3か月とするのが適当であろう（Woodford（1986）を参照せよ）。

（1） この論文では以上の主題についてごく簡単にしか触れられない。より詳しく知りたい読者は以下の展望論文を参照せよ。それらの多くは本稿より数学的に厳密な議論を展開している。Baumol and Benhabib (1989), Boldrin (1988, 1991), Boldrin and Woodford (1990), Brock (1988), Brock and Dechert (1991), Chiappori and Guesnerie (1991).

1．確定的変動

考察の対象となるモデルの与件は毎期一定である。我々は，それにもかかわらず内生的変動がいかに生じ得るかを以下で分析したい。

単純化のため，一つの世代に属する人々の行動が「代表的」個人の行動を通じて記述されると仮定する。この代表的個人は t 期に生まれ，その期に $0 \leq \ell_t \leq \ell^*$ だけの労働を供給し（$\ell^*>0$ が最大の労働供給量をあらわす），$m_t \geq 0$ だけの貨幣を貯蓄し，$t+1$ 期に $c_{t+1} \geq 0$ だけの財を消費する。選好は分離可能な効用関数 $V_1(\ell^*-\ell_t)+V_2(c_{t+1})$ で表現される。ここで $\ell^*-\ell_t$ は余暇のことである。

市場は競争的とする。そのため，均衡においては実質賃金が労働の限界生産力（＝1）に等しくなる。したがって，各期において貨幣賃金 $w_t>0$ と財価格 p_t は同じものとみなすことができ，t 期生まれの代表的個人の行動は予算制約式 $p_t\ell_t=m_t=p_{t+1}c_{t+1}$ の下での効用最大化問題として記述される。ここで p_{t+1} は将来価格の予想である。この問題の一階の条件は $\ell_t V'_1(\ell^*-\ell_t)=c_{t+1} V'_2(c_{t+1})$ で，$V'_1(\ell^*-\ell_t)$ が余暇の限界効用，$V'_2(c_{t+1})$ が将来消費の限界効用である。左辺を $v_1(\ell_t)$，右辺を $v_2(c_{t+1})$ と置いてこれを，

（1．1）　　$v_1(\ell_t)=v_2(c_{t+1})$

と書くことにしよう。限界効用逓減を仮定すれば関数 v_1 は増加的となり，その逆関数 v_1^{-1} が存在する。これを用いて（1．1）を（1．2）のように変形する。

（1．2）　　$\ell_t=v_1^{-1}[v_2(c_{t+1})]\equiv\chi(c_{t+1})$

χ のグラフは効用最大化の結果選ばれる可能性のあるすべての (ℓ_t, c_{t+1}) の組を示したもので，**オファーカーブ**と呼ばれる。t 期の均衡においては，若年期の人の労働供給量 ℓ_t はその期の財の生産量 y_t に等しくなり，それがさらに老年期の人の消費量 c_t に等しくなる。そして完全予見の下では，期待消費量 c_{t+1} が将来の実際の生産量 y_{t+1} に等しくなる。つまり，完全予見の確定的均衡は $y_t=\chi(y_{t+1}), t\geqq 1,$ を満たす生産量 $y_t>0$ の点列として求まるのである。

したがって，この確定的均衡に循環的変動が見られるかどうかはオファーカーブの形状次第ということになる。将来の財価格が上昇すれば当然そこには代替効果と所得効果とが働く。代替効果は将来消費が今期の余暇に比して高価になることから生じるものなので，来期の消費を減らし今期の余暇を増やす，すなわち今期の労働供給を減らす方向に働く。一方，所得効果は購買力の減少を意味するので，財の消費と余暇の両方ともを減らし，労働供給を増加させる。つまりこの二つの効果は将来消費に対しては同方向に作用するが，今期の労働供給に対しては逆方向に作用するのである。もし，代替効果の方が強いのであればオファーカーブ χ は右上がりとなり，そうでないなら右下がりとなるはずである。（1．1）式の定義に戻ってみれば，$-cV_2''(c)/V_2'(c)$ で測られる将来消

費の効用の「凹性」が小さい（1以下）ときには代替効果が強く，それが大きいときには所得効果が強いことがわかるはずである。

仮に代替効果が常に強く χ が単調増加関数となるのであれば，周期が2期以上のいかなる循環も生じない。これが古典派的状況で，確定的かつ継続的な内生的変動が見られないケースである。次に所得効果が代替効果に対抗し，χ が y^* までは上昇しそのあと急激に下降するケースを考えてみる。つまり $\chi(y^*)$ が y^* より大きく，$\chi^2(y^*)=\chi(\chi(y^*))$ と $\chi^3(y^*)=\chi(\chi^2(y^*))$ が y^* より小さいケースである。これはケインズ派的状況に対応するもので，継続的な非発散の内生的変動がいくつも発生する。実際，このときには周期3の周期解（3期毎に同じ生産量を繰り返す）の存在を証明できる。それには χ^3 の不動点で定常解とは異なるものを探せばよいわけであるが，ここでの場合 $y>0$ が小さいときには $\chi^3(y)>y$，y^* では $\chi^3(y^*)<y^*$ なのでその間に χ^3 の不動点が必ず存在する。そしてサルコフスキーの定理を用いれば，**無限に多くの完全予見周期解の存在**が言える。つまり，どんな正の整数 k をとってきても周期 k の周期解が少なくとも一つは存在するのである (Benhabib and Day (1982), Grandmont (1985a))。

2. 確率的内生変動

前節での確定的変動は自己実現的な期待（予想）を通じて得られた。経済与件は定常的でも個々人が同じように将来の価格と数量の変動を予想し，その予想が均衡においてそのまま実現するのである。個人は市場全体に比して小さくその行動は市場に影響を与えないので，彼が行動を変える誘因は何もない。それではこれと同じことが，予想が確定的でなく**確率的**である場合にも起こるのであろうか。答えは肯定的である。所得効果が強い場合には，確率的な予想が自己実現的になる数多くの確率的で非発散的な均衡が存在するのである (Azariadis (1981), Azariadis and Guesnerie (1986), Chiappori and Guesnerie (1989), Farmer and Woodford (1987), Grandmont (1985b, 1986, 1989))。

代表的個人が t 期において，将来の財価格 p_{t+1} は確率的（ランダム）であると予想したとする。このとき彼は期待効用 $V_1(\ell^*-\ell_t)+E_tV_2(c_{t+1})$ を最大化するわけであるが，その際将来消費 c_{t+1} が予算制約式 $p_t\,\ell_t=m_t=p_{t+1}\,c_{t+1}$ を満たさなければならないことより，これが確率変数となる。この問題の一階の条件は（1．1）と同様にして

（2．1）　　$v_1(\ell_t)=E_t\,v_2(c_{t+1})$

と書ける。均衡においては再び $y_t=\ell_t=c_t$ が成立し，また自己実現的な期待のもとでは期待消費 c_{t+1} が y_{t+1} と等しくなければならない。したがって，自己実現的な期待を持つ確率的均衡は

（2．2）　　$v_1(y_t)=E_t[v_2(y_{t+1})]$

を満たす確率変数の生産量 $y_t>0\,(t\geqq 1)$ の点列となる。（2．2）式の E_t は t 期に入手可能な情報をもとにした条件付期待値という意味で，その情報は任意の外生的な確率過程 s_t の実現値，す

なわち

$$E_t=E[\cdot|(s_t, s_{t-1},\cdots)]$$

と考えることができる。この s_t はしばしば「サンスポット（太陽黒点)」と呼ばれるが，s_t が経済与件とは何の関係もない変動を示す確率変数だからである。それでも十分多くの人がこの「サンスポット」の動きに基づき予想を立てれば，予想が自己実現的であることを仮定しても，その動きが均衡における価格や数量の変動に反映されるかもしれないのである。

（2．2）の一般解は ϵ_{t+1} を $E_t\,\epsilon_{t+1}=0$ を満たす任意の確率過程として

（2．3）　$v_2(y_{t+1})=v_1(y_t)+\epsilon_{t+1}$

と書ける。これは経済時系列の実証研究に広く出てくる式の形であるが，その解釈は重要な点で異なっている。**計量経済学者は通常（2．3）式の ϵ_{t+1} を経済与件に対するショックと解釈するのであるが，ここではそれは期待に対するショックと解釈すべきものである。**

この確率的均衡を幾何学的に説明するのもこの簡単なモデルにおいては難しくない。区間 $[a, b]$ をすべての y_t の値が確率1で含まれるような最小の区間としよう。E_t は平均を計算するものであるから $v_1(y_t)$ は $v_2([a, b])$ に属する。したがって最小の不変区間 $[a, b]$ は連続性より

（2．4）　$v_1([a, b])\subset v_2([a, b])$　又は　$[a, b]\subset\chi([a,b])$

を満たす。そしてもし（2．4）で強い意味での包含関係が成立するのであるなら（すなわち$[a, b]$ がその χ による像の内部に含まれるのであるならば)，（2．2）または（2．3）を満たし $[a, b]$ に y_t の値が常に留まるような確率的均衡を ϵ_{t+1} を適当に選ぶことにより構成することが可能である。実際，そういう**不変区間一つに対し無限に多くの**確率的均衡を構成できることが証明可能である (Grandmont, (1985b, 1986, 1989))（さらに定常性を課したり，不変測度の存在等を言うことも可能である)。

この幾何学的説明を用いれば，確率的均衡を見つけるために不変区間を探すだけでよいことになる。そしてこれからすぐに言えることは，代替効果が所得効果を常に上回り χ が単調増加関数になるときには，生産量が $y=0$ より一定以上大きいような確率的均衡は存在しないということである。ただし，$\bar{y}$ を $\bar{y}=\chi(\bar{y})>0$ で定義して $y_t=\bar{y}$ となる点列だけは例外で，これは唯一の確定的な貨幣的定常均衡となる。実際，不変区間になる $[a, b]$ で $a>0$ のものはこの $[\bar{y}, \bar{y}]$ しかないのである。したがってここでも代替効果が強いときには「古典派的」見方が成立することになる。反対に所得効果が強く，上に挙げた定常解で $\chi'(\bar{y})<-1$ が成り立つならば，（2．4）を満たす不変区間が無限に存在する。それには $a<\bar{y}$ を $\bar{y}$ の近くにとり b を $(\chi^{-1}(a), \chi(a))$ からとってくればよい。そのため，$\bar{y}$ の**どんな近傍**をとってきてもそれに含まれる不変区間が存在することになるが，これは χ^{-1} が $\bar{y}$ の近くで縮小写像になっていることに由来している。よって，所得効果が強いときには「ケインズ派的」見方が支持され，期待の変化が与件の変化と無関係に経済変動に大きな影響を与えるのである。

3．単位根（局所分岐）

多くの経済時系列においては，一つのショックが後々まで尾を引くという意味で「持続性」が観察される。別の言葉でいえば，システムの「固有値」のうちいくつかが1に近い絶対値を持つということである。さらに，計量経済学者の中には，かなりの数の経済時系列が**線形の**ランダムウォークとして記述できると主張する人もいる。最近の非線形経済動学の研究によれば，そのような場合**ほんの僅かな非線形性がモデルの性質を大きく変えてしまう**ことがわかってきた（Grandmont (1989)）。

局所的な固有値の絶対値が1に近いとき何が起こるのかを知るには，局所分岐理論（local bifurcation theory）が便利である。この点を簡単なモデルで示すために，いくつもの経済の集まり（族）を考えそれらが添字 α を持つオファーカーブ χ_α でもって区別されているとしよう。そして α が大きくなるにつれ所得効果も大きくなり，（$\bar{y}_\alpha=\chi_\alpha(\bar{y}_\alpha)>0$ で定義される）定常解 $\bar{y}_\alpha$ におけるオファーカーブの傾きが－1を挟んで変化すると仮定する（つまり，$\alpha<0$ のときは $\chi_\alpha'(\bar{y}_\alpha)$ が-1より大きく，$\alpha=0$ のときはそれが-1，$\alpha>0$ のときはそれが -1 より小さくなるとしてみる。）。すると完全予見を持つ確定的均衡の定常解の近傍での動学経路は，$y_t=\chi_\alpha(y_{t+1})$ の逆像を定常解の周りで考えれば得られる。つまり，$\alpha<0$ のときはそれは定常解から外へ発散していき，$\alpha>0$ のときは定常解に向かって収束する。確率的均衡について言えば，前節の議論より $\chi_\alpha'(\bar{y}_\alpha)<-1\,(\alpha>0)$ ならそしてそのときに限り，定常解のどの近傍にも無限の均衡を構成することができるのである。

χ がもし線形写像であるなら，上で述べたことが我々の知り得るすべてのことであり，それは**大域的**にも成り立つはずである。しかしながら世の中は非線形にできており，オファーカーブも例外ではない。したがって，ここで通常起こることは線形写像の場合とかなり異なってくる。実際，写像 χ_α の族は倍周期分岐（flip bifurcation）を持つ。そしてそれがもし優臨界的（supercritical）であるならば，周期2の周期解 $(\bar{y}_{1\alpha},\ \bar{y}_{2\alpha})$ が分岐後（$\alpha>0$）に現われ，それが不安定になるので完全予見の確定的均衡はそれから離れていくであろう。また $\alpha>0$ のときは既に見たように不変区間 $[a, b]$ を作って確率的均衡を構成することが可能であるが，線形のときと異なり，それらの均衡は定常解からあまり離れたところには存在しない。不変区間は $(\bar{y}_{1\alpha},\ \bar{y}_{2\alpha})$ の内部に含まれ，そのような不変区間全体の和集合が $(\bar{y}_{1\alpha},\ \bar{y}_{2\alpha})$ に一致する。

写像 χ_α の族が劣臨界的（subcritical）な倍周期分岐を持つときは，周期2の周期解が $\alpha<0$ の場合に現われ，それが安定的になる。また$\alpha>0$ のときには定常解の近くに不変区間 $[a, b]$ がとれて確率的均衡を構成できる。$\alpha<0$ のときには χ_α^{-1} が局所的に不安定となるので，もし写像が線形なら不変区間は存在せず確率的均衡も存在しないという結論になるはずである。しかし非線形の世界ではそうではない。実は，$(\bar{y}_{1\alpha},\ \bar{y}_{2\alpha})$ に含まれる不変区間 $[a, b]\,(a\neq b)$ はないのであるが，それ

を内部に含む不変区間は無限にあるのである。このような場合，どんなに弱い非線形性でも結論を大きく変えてしまうことがわかるであろう。

4．設備投資と内生的変動

これまで考察してきたモデルは，一つの期におけるシステムの状態が一つの実数で記述されるという意味で「一次元」のモデルであり，そのために分析が簡単に済んだのであった。これは説明の都合上便利ではあるが，そのために犠牲にしたものもある。それは，非線形性を強めるためにオファーカーブを減少的にしなくてはならず，実証研究で支持される以上の所得効果を必要としたことである。本節では，もし生産設備に対する投資という（現実的な）状況を考えると，**代替効果が強い場合でも**（つまり χ が増加関数の場合にも）前節までの結論がほぼ当てはまることを示す。

家計行動は前と同じである。しかし t 期における生産物 y_t が若年期の人の供給する労働 ℓ_t だけでなく，その期の期首に存在する資本ストック k_{t-1} にも依存して生産されると考える。それを $y_t=\mathrm{Min}\{\ell_t, k_{t-1}/a\}$ と特定化しよう。つまり，ℓ_t と k_{t-1} は常に同じ比率で用いられるとするのである（a は資本一生産物比率，$1/a$ が資本の生産性である）。すると y_t は一部分は消費に一部分は投資に回ることになり，均衡では $y_t = c_t+i_t$ が毎期成り立つことになる。なお，c_t は老年期の消費量，i_t は投資量である。また，$t+1$ 期の期首にある資本ストックの量は

（4．1）　　$k_t=k_{t-1}(1-\delta)+i_t$

で計算できる。$0<\delta\leq 1$ は（所与）の資本の減価償却率である。単純化のため，労働者は直接的にも間接的にも資本ストックを所有することはできず，利潤最大化を目指す企業がそれを所有するものと仮定する。[(2)]

まずはこの枠組みで完全予見の確定的均衡を求めてみよう。家計の最適行動は前と同様 $v_1(\ell_t)=v_2(c_{t+1})$ もしくは $\ell_t=\chi(c_{t+1})$（オファーカーブ）であらわされる。我々は代替効果が常に所得効果を上回り $\chi(c)$ が右上がりの標準的ケースに限って分析を進めていく。生産物部門では $y_t=\ell_t=k_{t-1}/a$ が成立し，また完全予見ということから期待消費量 c_{t+1} が将来生産量の実現値 y_{t+1} から将来投資量の実現値 i_{t+1} を引いたものに等しくなる。これは（4．1）を使えば

（4．2）　　$i_{t+1}=k_{t+1}-k_t(1-\delta)=a[y_{t+2}-y_{t+1}(1-\delta)]$

となる。したがって，完全予見の均衡は次の（4．3）式を満たす $y_t>0\ (t\geqq 1)$ として求められる。

（4．3）　　$y_t=\chi[(1+a(1-\delta))y_{t+1}-ay_{t+2}]$

（2）この種のモデルは Farmer (1986), Reichlin (1986), Woodford (1986) によっても用いられてきた。ここでもまた，人々が無限の長さに亘って生きると仮定しても，将来の賃金を当てにして借金することは難しいという流動性制約を付け加えれば，同様の分析が可能である。Woodford(1986) を参照せよ。

我々の興味の対象は（4．3）式の定常解 $y_t=\bar{y}>0\,(\bar{y}=\chi[(1-a\delta)\,\bar{y}])$ の周りでの景気循環の可能性である。なお，そういう定常解が存在する（そして一意になる）ためには $a\delta<1$ で，かつ原点におけるオファーカーブの傾きが十分に大きい（$\lim_{c\to 0+}\chi(c)/c>1/(1-a\delta)$）ことが十分である。定常解の周りで周期解を得るもっとも簡単なやり方は，局所分岐を起こすことである。それには（4．3）式を定常解 $\bar{y}$ の周りで線形化したものの固有値を求め，システムの与件を何らかのパラメータ a で添字付け，安定性の状態が変化する点を見ればよい。（4．3）式が二期先までのラグ付き変数を含んでいるので，これは二次元の力学系である。そして χ を単調増加関数と仮定したので，ここで得られる分岐は二つの共役複素数の固有値が単位円を横切って変化していくものしかないことがわかる。つまりホップ分岐である。前にも記した通り，この種の分岐はマクロ経済学における単位根（時系列の固有値の絶対値が1に近いこと）の存在を信じれば信じるほど蓋然性が高くなる。

我々は，資本－生産物比率を $1/(1+\delta)$ より大きい値に固定し，老年期の効用関数の凹性 $(-cV_2''(c)/V_2'(c))$ を0から1の範囲で増加していくことで実際にホップ分岐を得ることを証明できる。この効用関数の形状は，マクロ経済学者が通常使うものと整合的であり，資本－生産物比率も実際のデータに矛盾しない。先進国の資本－生産物比率は3に近いという計測結果がある。このとき，（4．3）式の力学系では，$\bar{y}$ がまず局所的に安定で，次に V_2 の凹性が増しホップ分岐が起こるとそれが不安定になる。線形系ならこれですべてであるが，オファーカーブは現実には非線形である。よって通常は分岐の前か後，$(y_t,\,y_{t-1})$ 空間上の定常解の近くに不変閉曲線が現われ，その曲線上ではシステムの動きが（複雑で長い循環であるかもしれないが）周期的又は準周期的になる。もしホップ分岐が優臨界的であれば不変閉曲線は分岐後に現われ安定である。一方もしそれが劣臨界的のときには不変閉曲線は分岐の前に現われ不安定になる。

以上の議論はシステムの固有値が1に近い絶対値を持つとき，定常解の近くで確定的変動がいかにして生じるかを示したものである。では一次元のときと同様，ここで分析を止めるのではなく確率的均衡についても考察しよう。自己実現的な予想を持つ確率的均衡は，（4．3）に倣って次の式を満たす $y_t>0\,(t\geqq 1)$ として求められる。

（4．4）　$$v_1(y_t)=E_t\,v_2[(1+a(1-\delta))\,y_{t+1}-a\,y_{t+2}]$$

前と同様 E_t は何らかの外生的確率過程（与件に影響を与えない変動つまりサンスポット）の値 $(s_t,\,s_{t-1},\cdots)$ を観察した上での条件付期待値である。

ここで当然問われるべきは，定常解の近くに非発散的で内生的な確率的変動が存在するかどうかである。その答えは一次元のときと同様，もし（4．3）式で定義される完全与件の確定的均衡が局所的に安定であるならば，そして通常はそのときに限って，定常解の**どの近傍**を考えてもそこに無限個の確率的均衡を見出すことができるというものである。そしてこの条件は，資本―生産物比率が一定で V_2 の凹性 $(-cV_2''(c)/V_2'(c))$ が小さければ満たされる（Woodford(1986)を見よ)。

またシステムに持続性がありホップ分岐が起こるときには，定常解の近くに不変閉曲線が出現することによる興味深い現象が見られる。（4．3）の系でホップ分岐が起こり，定常解が初めは安定で，それが不安定になるとしてみよう。もしそれが劣臨界的なら不安定な不変閉曲線が分岐の前に出現し，確率的均衡も分岐の前だけに存在する。そのときそのサポートは不変閉曲線の内部に含まれ，そういうサポートすべての和集合が不変閉曲線の内部全体と等しくなる。一方，もし分岐が優臨界的なら安定的な不変閉曲線は分岐後に出現する。このとき，分岐の前では定常解のどの近傍をとってもそれに含まれる確率的均衡が存在するのであるが，分岐の後では定常解のあまりに小さな近傍をとるとそれに含まれる非退化の確率的均衡は存在しない。その理由は定常解が不安定となるからで，事実，定常解を除いては不変閉曲線に完全に含まれる確率的均衡はない。しかし，そのサポートの内部に不変閉曲線を**含む**ような確率的均衡は無限にあるのである。これも，ほんの少し非線形性を入れただけでシステムの性質が線形のときと比べて大きく変わってしまう一例である。

この最後の例を見て，複雑な内生的循環がもっともらしい仮定の下で存在すること，またその際システムの固有値が１に近いときには非線形性をシステムに導入することが重要であることを読者が確信されることを私は望んでいる。上のモデルで内生的変動を生みだすための仮定として標準的でないものといえば，資本市場の不完全性（これはもっともらしい仮定である）以外には，労働が資本の一定量と組み合わされねばならないということ，つまりより一般的には労働と資本の代替の弾力性が低いということだけであろう。私は，より弾力的な技術を用いても，資本ストックを投資で調整するときのコストがかさんだり，雇用量を変化させるのにコストがかさみ「実効の」代替の弾力性が低いという（現実的な）仮定を付け加えれば同様の結果が得られると思っている。実際の計量経済学者の習慣を変えるにはもう少し扱いやすいモデルにしなければならないが，それでも私はここで概観してきた研究の結果，内生的景気循環モデルが実際の経済変動を記述するモデルとしてますます信頼度を高めていくものと信じて止まないのである。

参 考 文 献

ANDERSON, P., K. ARROW and D. PINES (Eds.) (1988), *The Economy as an Evolving Complex System,* vol. V, Santa Fé Institute Studies, Addison Wesley.

AZARIADIS, C. (1981), "Self-Fulfilling Prophecies", *Journal of Economic Theory 25,* 380-396.

AZARIADIS, C. and R. GUESNERIE (1986), "Sunspots and Cycles", *Review of Economic Studies 53,* 725-737.

BARNETT, W., J. GEWEKE and K. SHELL (Eds.) (1989), *Economic Complexity : Chaos, Sunspots, Bubbles and Nonlinearity,* Cambridge University Press.

BAUMOL, W. and L. BENHABIB (1989), "Chaos : Significance, Mechanism and Economic Applications", *Journal of Economic Perspectives 3,* 77-105.

BENHABIB, J. and R. DAY (1982), "A Characterization of Erratic Dynamics in the Overlapping Generations Model", *Journal of Economic Dynamics and Control 4,* 37-55.

BOLDRIN, M. (1988), "Persistent Oscillations and Chaos in Dynamic Economic Models : Notes for a

Survey", in ANDERSON, P., K. ARROW and D. PINES (Eds.).
BOLDRIN, M. (1991), "Perfectly Competitive Models of Endogenous Business Fluctuations", *European Economic Review 35,* 300-305.
BOLDRIN, M. and M. WOODFORD (1990), "Equilibrium Models Displaying Endogenous Fluctuations and Chaos", *Journal of Monetary Economics 25,* 189-222.
BROCK, W. (1988), "Nonlinearity and Complex Dynamics in Economics and Finance", in ANDERSON, P., K. ARROW and D. PINES (Eds.).
BROCK, W. and W. DECHERT (1991), "Nonlinear Dynamical Systems : Instability and Chaos in Economics", in HILDENBRAND, W. and H. SONNENSCHEIN (Eds.).
CHIAPPORI, P. A. and R. GUESNERIE (1989), "On Stationary Sunspot Equilibria of Order k", in BARNETT, W., J. GEWEKE and K. SHELL (Eds.).
CHIAPPORI, P. A. and R. GUESNERIE (1991), "Sunspot Equilibria in Sequential Markets Models", in HILDENBRAND, W. and H. SONNENSCHEIN (Eds.).
FARMER, R. (1986), "Deficits and Cycles", *Journal of Economic Theory 40,* 77-88.
FARMER, R. and M. WOODFORD (1987), "Self-Fulfilling Prophecies and the Business Cycle", *Cuadernos Economicos de ICE,* Mexico.
GRANDMONT, J. M. (1985a), "On Endogenous Competitive Business Cycles", *Econometrica 53,* 995-1045.
GRANDMONT, J. M. (1985b), "Cycles Concurrentiels Endogēnes", *Cahiers du Sēminaire d'Economētrie,* CNRS, Paris.
GRANDMONT, J. M. (1986), "Stabilizing Competitive Business Cycles", *Journal of Economic Theory 40,* 57-76.
GRANDMONT, J. M. (1989), "Local Bifurcations and Stationary Sunspots", in BARNETT, W., J. GEWEKE and K. SHELL (Eds.).
GUESNERIE, R. (1986), "Stationary Sunspot Equilibria in an N Commodity World", *Journal of Economic Theory 40,* 103-127.
HILDENBRAND, W. and H. SONNENSCHEIN (Eds.) (1991), *Handbook of Mathematical Economics,* Vol. IV. North Holland.
REICHLIN, P. (1986), "Equilibrium Cycles in an Overlapping Generations Economy with Production", *Journal of Economic Theory 40,* 89-102.
WOODFORD, M. (1986), "Stationary Sunspot Equilibria in a Finance Constrained Economy", *Journal of Economic Theory 40,* 128-137.

翻訳：**須　田　伸　一**
（経済学部助教授）