Title	測度からなる空間の上で定義される積分汎函数のエピ-収束について : sweeping過程への応用
Sub Title	Epi-convergence of integral functionals defined on the space of measures : applications to the sweeping process
Author	Castaing, C. Jalby, V. 立石, 寛
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1994
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.87, No.1 (1994. 4) ,p.27- 62
JaLC DOI	10.14991/001.19940401-0027
Abstract	
Notes	小特集 : 数理経済学国際会議
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19940401-0027

「三田学会雑誌」87巻1号（1994年4月）

測度からなる空間の上で定義される積分汎函数のエピ-収束について

—— SWEEPING 過程への応用 ——

シャルル・カスタング
(モンペリエ大学)
ヴィンセント・ジャルビィ
(モンペリエ大学)

1. 序

本稿では，有界変動のベクトル測度からなる空間上で定義され，反射的で可分な Banach 空間に値をとる積分汎函数のエピー収束に関するいくつかの結果を提示する。またこの結果が，弾塑性のある機械システムを取り扱うにあたり J.J.Moreau（[Mo 4]）によって導入された，sweeping 過程の理論（フランス語では *Rafle*）に応用するのに適した形であることを示す。

本稿の構成は次のようである。第3節では，有界変動のベクトル測度からなる空間の上で定義される積分汎函数のエピー収束についての新しい結果を示す。これは，C.Castaing（[C 4]）および Y.Reshetnyak（[Re]）で得られた古典的な結果を精緻化したものである。また，凸値劣半連続多価写像の収束概念に関する有用な特徴づけを与える。一階の sweeping 過程の安定性問題への応用は第4節で与える。第5節では，二階の sweeping 過程の安定性に関する結果および最小値の存在を扱う。最後に付録において，有界変動の測度からなる空間の上で定義される積分汎函数に関する有用な結果を概括する。

2. 記号の約束および定義

T を Polish 空間（すなわち，T は可分位相空間で，T の位相を定義する完備な距離が存在する）とし，$B(T)$ をその Borel σ-代数とする。E はノルム $\|\cdot\|$ をもつ可分で反射的な Banach 空間，E'

＊ 1991 Mathematics Subject Classification. 28B05, 46G10, 34A60, 49K24. *Key words and phrases.* 積分汎函数，下半連続性，エピー収束，ベクトル測度，測度の積分分解，sweeping 過程

をその強双対空間とし，$\langle\cdot, \cdot\rangle$ は E と E' との間の双対な複線形形式とする。E' の閉単位球 B' には＊-弱位相 $\sigma(E', E)$ が与えられているものとする；それは距離付可能なコンパクト空間である。E における中心 x，半径 r の開球（resp.閉球）を $B(x, r)$（resp.$\bar{B}(x, r)$）と記す。

T 上の有界連続な E-値函数のすべてからなり，sup-ノルムが付与されている Banach 空間を $\mathscr{C}^b(T, E)$ と表記する。

$\mathscr{B}(T)$ から E' の中への σ-加法的な集合函数 m を T 上の E'-値測度と呼ぶ。また，すべての $A\in\mathscr{B}(T)$ に対して，

$$|m|(A)=\sup\left\{\sum_{i\in I}\|m(A_i)\| : (A_i)_{i\in I} \text{ は } A \text{ の有限個の } \mathscr{B}(T)\text{-分割}\right\}$$

で定義される T 上の非負実数値測度 $|m|$ を測度 m の変動という。有界変動で E' に値をとる T 上の測度 m（すなわち，$|m|$ が有界な T 上の Radon 測度）のすべてからなる空間を $\mathscr{M}^b(T, E')$ と記す。$\|m\|=|m|(T)$ とおく。

任意の $m\in\mathscr{M}^b(T, E')$ に対して，$m=\dfrac{dm}{d|m|}$，すなわち

$$m(A)=\int_A \frac{dm}{d|m|}(t)\,d|m|(t), \quad \forall A\in B(T)$$

という条件を満たす $|m|$-可測函数 $\dfrac{dm}{d|m|} : T\to B'$ が存在する。

任意の $f\in\mathscr{C}^b(T, E)$ および任意の $m\in\mathscr{M}^b(T, E')$ に対して，m に関する f の積分を

$$\int f\,dm=\int\langle f(t), \frac{dm}{d|m|}(t)\rangle\,d|m|(t)$$

で定義する。

従って，空間 $\mathscr{M}^b(T, E')$ は $\mathscr{C}^b(T, E)$ の位相的双対空間の部分空間と同一視される。この空間には＊-弱位相 $\sigma(\mathscr{M}^b(T, E'), \mathscr{C}^b(T, E))$ が与えられているものとする。通常この位相を**弱**（weak）（あるいは**狭**，narrow）位相と呼ぶ。

ベクトル測度に関し，さらに詳しいことは［N 1］，［N 2］，［D 1］，［D 2］，［J］，［DU］を参照せよ。

$\mathscr{M}^b(T, E')$ の部分集合 $\mathscr{H}$ は

$$\sup_{m\in\mathscr{H}}\|m\|<+\infty$$

という条件を満たすとき，**有界**（bounded）であるという。また任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$|m|(T\backslash K_\varepsilon)\leqq\varepsilon, \quad \forall\, m\in\mathscr{H}$$

という条件を満たす T のコンパクト部分集合 K_ε が存在するとき，$\mathscr{H}$ は**タイト**（tight）（あるいは**Prokhorov の条件**を満たす）という。

Prokhorov の定理（［Bo 2，§5，Théorème 1］，［DM，Théorème III. 59］）を想起しよう。

定理 2.1 $\mathscr{H}$ を $\mathscr{M}^b(T,\mathbb{R})$ の有界でタイトな部分集合とする。このとき，$\mathscr{H}$ は $\mathscr{M}^b(T,\mathbb{R})$ において相対弱コンパクトである。

T が局所コンパクトな Polish 空間で，$\mathscr{M}^b(T,E')$ には漠（vague）位相（すなわち，コンパクトな台をもつ T から E への連続函数のすべてからなる空間 $\mathscr{C}_c(T,E)$ 上の各点収束位相）が与えられている場合，本稿で述べる結果はすべて，タイト性を仮定しなくても成り立つ。

3. 積分汎函数のエピー収束

積分汎函数の収束について考察する。Y.Reshetnyak による結果を Polish 空間の上で定義され，Banach 空間に値をとる測度に拡張した結果（付録の定理 6．1 を見よ）を用いることにしよう。

次の諸定理を証明するには，いくつかの補題が必要である。これらの結果は，実数値測度に対してはよく知られており，[Bo 1，Chap.III，§4] に見いだされる。しかしながら，読者の便宜のため，これらの補題の完全な証明を与えることにする。

補題 3.1 S を Polish 空間とし，$m\in\mathscr{M}^b(T,E')$，$\lambda\in\mathscr{M}^b(S,\mathbb{R})$ とする。このとき，次の条件を満たす $M^b(T\times S,E')$ に属する測度 $m\otimes\lambda$ が一意に存在する。

$$m\otimes\lambda(A\times B)=m(A)\lambda(B),\quad \forall(A,B)\in\mathscr{B}(T)\times\mathscr{B}(S).$$

さらに，

$$|m\otimes\lambda|=|m|\otimes|\lambda|$$

および

$$\frac{d(m\otimes\lambda)}{d|m\otimes\lambda|}=\frac{dm}{d|m|}\otimes\frac{d\lambda}{d|\lambda|},\quad |m\times\lambda|-a.e.,$$

すなわち，$|m\otimes\lambda|$ に関してほとんどすべての $(t,s)\in T\times S$ について

$$\frac{d(m\otimes\lambda)}{d|m\otimes\lambda|}(t,s)=\frac{dm}{d|m|}(t)\ \frac{d\lambda}{d|\lambda|}(s)$$

が成り立つ。

証明 有界測度 $|m|$ の正則性により，$\{N,K_p:p\in\mathbb{N}\}$ が T の Borel 分割となる T のコンパクト部分集合からなる列 $(K_p)_p$ および $|m|$ に関して測度ゼロとなる T の Borel 部分集合 N が存在する。有界測度 $|\lambda|$ の正則性により，$\{M,L_q:q\in\mathbb{N}\}$ が S の Borel 分割となる S のコンパクト部分集合からなる列 $(L_q)_q$ および $|\lambda|$ に関して測度ゼロとなる S の Borel 部分集合 M が存在する。

各 $(n,q)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ に対して，

$$m_p(A)=m(A\cap K_p),\quad \forall A\in\mathscr{B}(T),$$
$$\lambda_q(B)=\lambda(B\cap L_q),\quad \forall B\in\mathscr{B}(S)$$

で定義されるコンパクトな台 $\mathrm{supp}(m_p)=K_p, \mathrm{supp}(\lambda_q)=L_q$ をもつ測度 $m_p\in\mathscr{M}^b(T, E')$ および $\lambda_q\in\mathscr{M}^b(S, \mathbb{R})$ を考える。すると，$m=\sum_p m_p$, $|m|=\sum_p|m_p|$ および $\lambda=\sum_q\lambda_q$, $|\lambda|=\sum_q|\lambda_q|$ が成り立つ。[D 2, §22] により，

(1) $\nu_p^q(A\times B)=m_p(A)\lambda_q(B)$, $\forall(A, B)\in\mathscr{B}(T)\times\mathscr{B}(S)$;

(2) $|\nu_p^q|=|m_p|\otimes|\lambda_q|$;

(3) $\mathrm{supp}(\nu_p^q)=\mathrm{supp}(m_p)\times\mathrm{supp}(\lambda_q)=K_p\times L_q$

という条件を満たす $\mathscr{M}^b(T\times S, E')$ に属する測度 $\nu_p^q=m_p\otimes\lambda_q$ が一意に存在する(1)。各 $C\in B(T)\otimes\mathscr{B}(S)=\mathscr{B}(T\times S)$ に対して，

$$\|\nu_p^q(C)\|=\|m_p\otimes\lambda_q(C)\|\leq|m_p\otimes\lambda_q|(C)=|m_p\otimes\lambda_q|(C\cap[K_p\times L_q])$$
$$\leq|m_p|(K_p)|\lambda_q|(L_q)$$

が成り立つので，級数 $\sum_{p,q}\nu_p^q(C)$ は絶対収束する。そこで，

$$\nu(C)=\sum_{p,q}\nu_p^q(C)=\sum_{p,q}m_p\otimes\lambda_q(C)$$

とおく。この級数は絶対収束であるから，ν は $T\times S$ 上の測度である。さらに，$(p, q)\neq(p', q')$ に対して，$\mathrm{supp}(m_p\otimes\lambda_q)\cap\mathrm{supp}(m_{p'}\otimes\lambda_{q'})=\emptyset$ であるから，

$$\begin{aligned}|\nu|(C)&=\Big|\sum_{p,q}m_p\otimes\lambda_q\Big|(C)=\sum_{p,q}|m_p\otimes\lambda_q|(C)\\&=\sum_{p,q}|m_p|\otimes|\lambda_q|(C)=\Big(\sum_p|m_p|\Big)\otimes\Big(\sum_q|\lambda_q|\Big)(C)\\&=|m|\otimes|\lambda|(C).\end{aligned}$$

$|\nu|\otimes|\lambda|\in\mathscr{M}^b(T\times S, \mathbb{R})$ であるから，ν は $T\times S$ 上の有界測度であることがわかる。すなわち，$\nu\in\mathscr{M}^b(T\times S, E')$. $m\otimes\lambda=\nu$ とおく。最後に，[D 1, § 8] により，この ν が一意であることがわかる。

次に，$|m\otimes\lambda|$ に関してほとんどいたるところ

$$\frac{d(m\otimes\lambda)}{d|m\otimes\lambda|}=\frac{dm}{d|m|}\otimes\frac{d\lambda}{d|\lambda|}\tag{3.1.1}$$

となることを示そう。$(A, B)\in\mathscr{B}(T)\times\mathscr{B}(S)$ とする。すると，

(1) 実際，測度 m_p (resp. λ_q) のコンパクト集合 K_p (resp. L_q) への制限 $\tilde{m}_p$ (resp. $\tilde{\lambda}_q$) を考える。すると，[D 2, §22] により，$\mathscr{M}(K_p\times L_q, E')$ に属し，$\tilde{m}_p$ と $\tilde{\lambda}_q$ との積となる測度 $\tilde{\nu}_p^q=\tilde{m}_p\otimes\tilde{\lambda}_q$ が存在する。そして，すべての $C\in\mathscr{B}(S)\otimes\mathscr{B}(T)$ に対して，$\nu_p^q(C)=\tilde{\nu}_p^q(C\cap[K_p\times L_q])$ とおくことにより，$\tilde{\nu}_p^q$ は $\mathscr{M}^b(T\times S, E')$ に属する測度 v_p^q に拡張される。

$$m\otimes\lambda(A\times B)=m(A)\lambda(B)=\int_A \frac{dm}{d|m|}(t)\,d|m|(t)\int_B \frac{d\lambda}{d|\lambda|}(s)\,d|\lambda|(s)$$
$$=\int_{A\times B}\frac{dm}{d|m|}(t)\frac{d\lambda}{d|\lambda|}(s)\,d|m|(t)\,d|\lambda|(s)$$
$$=\int_{A\times B}\frac{dm}{d|m|}\otimes\frac{d\lambda}{d|\lambda|}(t,s)\,d|m\otimes\lambda|(t,s).$$

$\mathscr{B}(T\times S)$ は集合 $A\times B$ によって生成されるから，これで（3.1.1）が示された。 □

注意 3.2 M.Valadier が述べているように，

$$\nu(C)=\int_C \frac{dm}{d|m|}\otimes\frac{d\lambda}{d|\lambda|}(t,s)\,d(|m|\otimes|\lambda|)(t,s),\quad \forall C\in\mathscr{B}(T\times S)$$

で定義され測度 $\nu\in\mathscr{M}^b(T\times S, E')$ を用いて補題3.1を示すこともできる。

補題 3.3 S を Polish 空間とする。このとき，写像 $\prod : \mathscr{M}^b(T, E')\times\mathscr{M}^b(S, \mathbb{R})\longrightarrow\mathscr{M}^b(T\times S,\ E')$，$(m,\lambda)\longmapsto m\otimes\lambda$ は $\mathscr{M}^b(T, E')\times\mathscr{M}^b(S, \mathbb{R})$ の各部分集合 $\mathscr{H}\times\mathscr{K}$ 上で連続である。ここで，$\mathscr{H}$ は $\mathscr{M}^b(T, E')$ の有界でタイトな部分集合，$\mathscr{K}$ は $\mathscr{M}(S, \mathbb{R})$ の有界でタイトな部分集合とする。さらに，$\prod(\mathscr{H}\times\mathscr{K})$ は $\mathscr{M}^b(T\times S, E')$ において有界かつタイトである。

証明 まず，$\mathscr{M}^b(T\times S, E')$ に $\mathscr{C}^b(T, E)\otimes\mathscr{C}^b(S, \mathbb{R})$ 上の各点収束位相 τ を与えると，写像 $\prod$ は $\mathscr{M}^b(T, E')\times\mathscr{M}^b(S, \mathbb{R})$ 上で連続になることに注意する。これは，$\mathscr{C}^b(T, E)\otimes\mathscr{C}^b(S, \mathbb{R})$ の任意の元 $\sum_{i=1}^k f_i\otimes g_i$ および任意の $(m,\lambda)\in\mathscr{M}^b(T, E')\times\mathscr{M}^b(S, \mathbb{R})$ に対して，等式

$$\langle\sum_{i=1}^k f_i\otimes g_i,\ m\otimes\lambda\rangle=\sum_{i=1}^k\ \langle f_i, m\rangle\langle g_i, \lambda\rangle$$

が成立することからわかる。位相 τ は分離的で $\mathscr{M}^b(T\times S, E')$ 上の弱位相よりも弱い。Prokhorov の定理（定理2.1）により $\mathscr{M}^b(T\times S, E')$ の有界でタイトな部分集合は弱相対コンパクトであるから，有界でタイトな $\mathscr{M}^b(T\times S, E')$ の部分集合の上では位相 τ と弱位相は合致する。よって，$\prod(\mathscr{H}\times\mathscr{K})$ が $\mathscr{M}^b(T\times S, E')$ で有界かつタイトであることのみ示せばよい。しかしながら補題3.1により，任意の $(m,\lambda)\in\mathscr{M}^b(T, E')\times\mathscr{M}^b(S, \mathbb{R})$ に対して，

$$\|m\otimes\lambda\|=|m\otimes\lambda|(T\times S)=|m|\otimes|\lambda|(T\times S)$$
$$=|m|(T)|m|(S)=\|m\|\|\lambda\|$$

が成り立つので，$\prod(\mathscr{H}\times\mathscr{K})$ は有界である。それがタイトであることを示そう。$a=\sup\{\|m\|: m\in\mathscr{H}\}$, $b=\sup\{\|\lambda\|:\lambda\in\mathscr{K}\}$ とおく。$\mathscr{H}$ および $\mathscr{K}$ はタイトであるから，各 $\varepsilon>0$ に対して，

$$|m|(T\backslash K_\varepsilon) \le \frac{\varepsilon}{2b}, \quad \forall m \in \mathscr{H}$$

$$|\lambda|(S\backslash L_\varepsilon) \le \frac{\varepsilon}{2a}, \quad \forall \lambda \in \mathscr{K}$$

となる T のコンパクト部分集合 K_ε および S のコンパクト部分集合 L_ε が存在する。従って，任意の $(m, \lambda) \in \mathscr{H} \times \mathscr{K}$ に対して，

$$\begin{aligned} |m \otimes \lambda|([T\times S]\backslash[K_\varepsilon \times L_\varepsilon]) &\le |m| \otimes |\lambda|([T\times(S\backslash L_\varepsilon)] \cup [(T\backslash K_\varepsilon)\times S]) \\ &\le |m|(T)|\lambda|(S\backslash L_\varepsilon) + |m|(T\backslash K_\varepsilon)|\lambda|(S) \\ &\le a\frac{\varepsilon}{2a} + \frac{\varepsilon}{2b}b \\ &\le \varepsilon. \end{aligned}$$

これで，$\Pi(\mathscr{H}\times\mathscr{K})$ がタイトであることが示された。 □

さて次に，エピグラフ分析に関するいくつかの古典的な概念に関して想起することにしよう。([A]を見よ)：

X を Hausdorff で第一可算公理を満たす位相空間とする。$(F_n)_n$ を X から $[-\infty, +\infty]$ の中への函数の列とする。列 $(F_n)_n$ の**エピグラフ上の下極限** (epigraphical inferior limit) (resp.**エピグラフ上の上極限**, epigraphical superior limit) $\mathrm{li_e}\, F_n$ (resp.$\mathrm{ls_e}\, F_n$) を次のように定義する。

$$\mathrm{li_e}\, F_n(x) = \min_{\{x_n \to x\}} \liminf_n F_n(x_n), \quad \forall x \in X,$$
$$\mathrm{ls_e}\, F_n(x) = \min_{\{x_n \to x\}} \limsup_n F_n(x_n), \quad \forall x \in X.$$

E の非空閉凸部分集合の列 $(C_n)_n$ の **Kuratowski の下極限** (inferior limit) (resp.**上極限**, superior limit) を

$$\mathrm{Li}(C_n) = \{x \in E : \exists (x_n)_n,\ x_n \in C_n,\ x = \lim_n x_n\},$$
$$\mathrm{Ls}(C_n) = \{x \in E : \exists (x_k)_k,\ x_k \in C_{n_k},\ x = \lim_k x_k\}$$

と定義する。

また，E の任意の非空閉凸部分集合 C に対して，C の**支持函数** (support function) $\delta^* : E' \to \overline{\mathbb{R}}$ を

$$\delta^*(x, C) = \sup_{c \in C} \langle c, x \rangle, \quad \forall x \in E'$$

で定義することを想起しよう。

最後に，多価写像 $\Gamma : T \to\!\!\to E$ が $t_0 \in T$ において**劣半連続** (lower semi-continuous) であるとは，$\Gamma(t_0) \cap V \ne \emptyset$ となる任意の E の開部分集合 V に対して，すべての $t \in U$ に対して $\Gamma(t) \cap V \ne \phi$ となる T における t_0 の近傍 U が存在することをいう。

定理 3.4 Y を Polish 空間とし，$\widehat{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ とおく。$\{\phi_k : k \in \widehat{\mathbb{N}}\}$ を $T \times B' \times Y$ で定義され，$[0, +\infty]$ に値をとる下半連続函数で，すべての $(t, y, k) \in T \times Y \times \widehat{\mathbb{N}}$ に対して，$\phi_k(t, \cdot, y)$ は B' 上で凸かつ正の一次同次とする。$T \times B' \times Y$ 上で $\mathrm{li_e}\, \phi_k \ge \phi_\infty$，すなわち，$(t, x, y)$ に収束する

$T\times B'\times Y$ における任意の点列 $((t_k, x_k, y_k))_k$ に対して,

$$\liminf_k \ \phi_k(t_k, x_k, y_k) \geq \phi_\infty(t, x, y) \tag{3.4.1}$$

が成り立つものとする。$(m_k)_k$ を $m\in\mathscr{M}^b(T, E')$ に弱収束する $\mathscr{M}^b(T, E')$ の有界でタイトな点列とする。$(u_k)_k$ を T で定義され, Y に値をとる連続函数の列で, T の任意のコンパクト部分集合上で連続函数 u に一様収束するものとする。このとき,

$$\liminf_k \int_T \phi_k\left(t, \frac{dm_k}{d\,|\,m_k\,|}(t), u_k(t)\right) d\,|\,m_k\,|(t) \geq \int_T \phi_\infty\left(t, \frac{dm}{d\,|\,m\,|}(t), u(t)\right) d\,|\,m\,|(t).$$

証明 便宜上, $m_\infty = m$ および $u_\infty = u$ とおく。$\mathbb{N}$ の (Alexandroff の) 一点コンパクト化である $\widehat{\mathbb{N}}$ は, コンパクト距離空間となることに注意する。函数 $\psi: T\times\widehat{\mathbb{N}}\times B' \longrightarrow [0, +\infty]$ を $\psi(t, k, x) = \phi_k(t, x, u_k(t))$ で定義する。ψ が $T\times\widehat{\mathbb{N}}\times B'$ 上で下半連続となることを示そう。$(t_k, p_k, x_k)_k$ を (t, p, x) に収束する $T\times\widehat{\mathbb{N}}\times B'$ の点列とする。$a=\liminf_k \psi(t_k, p_k, x_k)$ とおく。$p\in\mathbb{N}$ のときは, 十分に大きい k に対して, $p_k=p$. u_p は連続であるから, 点列 $(u_p(t_k))_k$ は Y において $u_p(t)$ に収束する。ϕ_p の下半連続性により,

$$\begin{aligned}\liminf_k \phi(t_k, p_k, x_k) &= \liminf_k \phi_{p_k}(t_k, x_k, u_{pk}(t_k)) = \liminf_k \phi_p(t_k, x_k, u_p(t_k)) \\ &\geq \phi_p(t, x, u_p(t)) = \psi(t, p, x).\end{aligned}$$

次に, $p=\infty$ の場合を考えよう。部分列を取り出すことにより, $a=\lim_k \psi(t_k, p_k, x_k)$ かつ $(p_k)_k$ を増加数列とすることができる。各 $n\in\mathbb{N}$ に対して,

$$s_n = \begin{cases} t_1, & \text{if } n < p_1, \\ t_k, & \text{if } p_k \leq n < p_{k+1}, \end{cases} \qquad \text{および} \qquad y_n = \begin{cases} x_1, & \text{if } n < p_1, \\ x_k, & \text{if } p_k \leq n < p_{k+1} \end{cases}$$

と定義する。すると,

$$\begin{aligned} t &= \lim_n s_n, \quad (s_{p_k})_k = (t_k)_k, \\ x &= \lim_n y_n, \quad (y_{p_k})_k = (x_k)_k. \end{aligned}$$

さらに, u は連続で, $(u_n)_n$ はコンパクト集合 $\{t, s_n : n\in\mathbb{N}\}$ の上で u に一様収束するから, 点列 $(u_n(s_n))_n$ は Y において $u(t)$ に収束する。よって, (3.4.1) により

$$\begin{aligned}\liminf_k \psi(t_k, p_k, x_k) &\geq \liminf_n \psi(s_n, n, y_n) = \liminf_n \phi_n(s_n, y_n, u_n(s_n)) \\ &\geq \phi_\infty(t, x, u(t)) = \psi(t; \infty, x)\end{aligned}$$

を得る。これで ψ の下半連続性が示された。次に, 各 $k\in\widehat{\mathbb{N}}$ に対して, $\nu_k = m_k \otimes \delta_k$ (ここで, δ_k は $M^b(\widehat{\mathbb{N}}, \mathbb{R})$ の点で, k に重みをもつ Dirac 測度を表す) で定義される $\mathscr{M}^b(T\times\widehat{\mathbb{N}}, E')$ に属する測度 ν_k を考えよう。点列 $(\delta_k)_k$ は有界で, 明らかにタイトかつ $\mathscr{M}^b(\widehat{\mathbb{N}}, \mathbb{R})$ において δ_∞ に弱収束するので, 補題 3.1 および 3.3 により, $|\,\nu_k\,| = |\,m_k\,| \otimes \delta_k$ が成り立ち, また点列 $(\nu_k)_k$ は $\mathscr{M}^b(T\times$

$\hat{\mathbb{N}}, E')$ において ν_∞ に弱収束する。函数 ψ および点列 $(\nu_k)_k$ に Reshetnyak の定理（定理６．１）を適用すると，

$$\liminf_k \int_{T\times\hat{\mathbb{N}}} \psi\left(t, n, \frac{d\nu_k}{d|\nu_k|}(t,n)\right) d|\nu_k|(t,n)$$
$$\geq \int_{T\times\hat{\mathbb{N}}} \psi\left(t, n, \frac{d\nu_\infty}{d|\nu_\infty|}(t,n)\right) d|\nu_\infty|(t,n) \tag{3.4.2}$$

を得る。各 $k\in\hat{\mathbb{N}}$ に対して，$\nu_k = m_k\otimes\delta_k$ であるから，補題３．１により

$$\frac{d\nu_k}{d|\nu_k|} = \frac{d(m_k\otimes\delta_k)}{d(|m_k|\otimes\delta_k)} = \frac{dm_k}{d|m_k|}\otimes 1.$$

従って，各 $k\in\hat{\mathbb{N}}$ に対して，

$$\int_{T\times\hat{\mathbb{N}}} \psi\left(t, n, \frac{d\nu_k}{d|\nu_k|}(t,n)\right) d|\nu_k|(t,n) = \int_T \int_{\hat{\mathbb{N}}} \psi\left(t, n, \frac{dm_k}{d|m_k|}(t).1(n)\right) d|\delta_k|(n)\, d|m_k|(t)$$
$$= \int_T \psi\left(t, k, \frac{dm_k}{d|m_k|}(t)\right) d|m_k|(t)$$
$$= \int_T \phi_k\left(t, \frac{dm_k}{d|m_k|}(t), u_k(t)\right) d|m_k|(t)$$

の成り立つことがわかる。最後に，（3.4.2）により，

$$\liminf_k \int_T \phi_k\left(t, \frac{dm_k}{d|m_k|}(t), u_k(t)\right) d|m_k|(t) \geq \int_T \phi_\infty\left(t, \frac{dm}{d|m|}(t), u(t)\right) d|m|(t)$$

が成り立つことがわかり，これで証明を終える。　□

注意 3.5　$\hat{\mathbb{N}}$ は E.Balder（[Ba]），M.Valadier（[V 6]）でも用いられている。

定理 3.6　$\{\phi_k : k\in\hat{\mathbb{N}}\}$ を $T\times B'$ 上で定義され，$[0,+\infty]$ に値をとる下半連続函数で，すべての $k\in\hat{\mathbb{N}}$ およびすべての $t\in T$ に対して，$\phi_k(t,\cdot)$ は B' 上で凸かつ正の一次同次とする。$T\times B'$ 上で $\mathrm{li_e}\,\phi_k \geqq \phi_\infty$, およびすべての $t\in T$ に対して，$\phi_\infty(t,\cdot) \geqq \mathrm{ls_e}\,\phi_k(t,\cdot)$ を仮定する。すなわち，すべての $(t,x)\in T\times B'$, (t,x) に収束する $T\times B'$ における任意の点列 $(t_k, x_k)_k$ に対して，

$$\liminf_k \phi_k(t_k, x_k) \geq \phi_\infty(t,x) \tag{3.6.1}$$

が成り立つこと，および

$$\phi_\infty(t,x) \geq \limsup_k \phi_k(t, x_k) \tag{3.6.2}$$

を満たす，x に（＊-弱)収束する B' における点列 $(x_k)_k$ が存在することを仮定するのである。

$$I_{\phi_k}(m) = \int_T \phi_k\left(t, \frac{dm}{d|m|}(t)\right) d|m|(t)$$

で定義される $\mathscr{M}^b(T, E')$ 上の汎函数列 $\{I_{\phi_k} : k\in\hat{\mathbb{N}}\}$ を考えよう。このとき，$m\in\mathscr{M}^b(T,E')$ に

弱収束する$\mathscr{M}^b(T, E')$ における任意の有界でタイトな点列$(m_k)_k$に対して,

$$\liminf_k I_{\phi_k}(m_k) \geq I_{\phi_\infty}(m)$$

が成り立ち，また各$m \in \mathscr{M}^b(T, E')$に対して，$m$に弱収束する$\mathscr{M}^b(T, E')$ の有界でタイトな点列$(m_k)_k$で

$$\limsup_k I_{\phi_k}(m_k) \leqq I_{\phi_\infty}(m)$$

を成り立たしめるものが存在する。

証明 $m \in \mathscr{M}^b(T, E')$に収束する$\mathscr{H}$における任意の有界でタイトな点列$(m_k)_k$に対して,

$$\liminf_k I_{\phi_k}(m_k) \geq I_{\phi_\infty}(m)$$

が成り立つことは定理３．４で既に示した。二番目の不等式を示すことにしよう。A.Salvadori による証明（[Sa, Theorem ３．１の証明]）を用いることにする：$m \in \mathscr{M}^b(T, E')$を固定し，$v = \dfrac{dm}{d|m|} \in L^1_{E'}(T, \mathscr{B}(T), d|m|)$とおく。$I_{\phi_\infty}(m) = +\infty$となれば，証明すべきことはない。そこで，$\phi_\infty(\cdot, v(\cdot)) \in L^1_{\mathrm{R}}(T, \mathscr{B}(T), d|m|)$を仮定してよい。函数$\psi_k : T \times B' \longrightarrow [0, +\infty]$を

$$\psi_k(t, x) = [\phi_k(t, x) - \phi_\infty(t, v(t))]^+$$

で定義する。ψ_kは$T \times B'$上で可測であり，$\psi_k(t, \cdot)$はコンパクト集合B'上で下半連続となることは明らかであろう。次に,

$$\Gamma_k(t) = \{y \in B' : d(v(t), y) + \phi_k(t, y) = \min_{x \in B'} \{d(v(t), x) + \phi_k(t, x)\}\}$$

で定義される多価写像$\Gamma_k : T \rightarrow\!\!\!\rightarrow B'$を考えよう。ここで，$d$は（*-弱位相が与えられた）$B'$上の距離を表す。$B'$はコンパクト集合であるから，すべての$t \in T$に対して，$\Gamma_k(t)$が非空となることは明らかである。すると［CV, III. 39］により，Γ_kの選択子$v_k \in L^1_{E'}(T, \mathscr{B}(T), d|m|)$が存在する(2)。(3.6.2) により，任意の$t \in T$に対して，$B'$の点列$(x_k)_k$で$v(t)$に（*-弱)収束し，$\lim_k \psi_k(t, x_k) = 0$となるものが存在する。

$$d(v(t), v_k(t)) + \psi_k(t, v_k(t)) \leq d(v(t), x_k) + \psi_k(t, x_k)$$

となるので,

$$\lim_k d(v(t), v_k(t)) = 0,$$
$$\lim_k \psi_k(t, v_k(t)) = 0$$

が成り立つことがわかる。他方，$\phi_k(t, 0) = 0$となるから，$\psi_k(t, 0) = 0$，従って,

---

（2） 実際，［C V, III. 39］により，Γ_kの$(\mathscr{B}_{|m|}(T), \mathscr{B}(B'))$-可測選択子$v_k$が存在する —— ここで，$\mathscr{B}_{|m|}(T)$は$\mathscr{B}(T)$の$|m|$-完備化を表し，$\mathscr{B}(B')$は，ノルム位相あるいは*-弱（Suslin）位相が与えられたB'の Borel σ-代数を表す。さらに，$v_k(t) \in B'$で$|m|$は有界であるから，v_kは$|m|$-積分可能である。$|m|$-測度ゼロの集合上でv_kの値を適当に変更することにより，$v_k \in L^1_{E'}(T, B(T), d|m|)$としてよい。

$$d(v(t), v_k(t)) + \psi_k(t, v_k(t)) \leq d(v(t), 0) + \psi_k(t, 0) \leq M,$$

ここで，$M=\sup\{d(x, y):(x,y)\in B'\times B'\}$. $|m|$ は有界であるから，Lebesgue の上限収束定理により，点列 $(\psi_k(\cdot, v_k(\cdot)))_k$ は $L^1_{\mathbf{R}}(T, \mathscr{B}(T), d|m|)$ において 0 に収束することがわかる。よって，

$$\lim_k \int_T [\phi_k(t, v_{k}, (t)) - \phi_\infty(t, v(t))]^+ \, d|m|(t) = 0$$

となるので，

$$\limsup_k \int_T \phi_k(t, v_k(t)) \, d|m|(t) \leq \int_T \phi_\infty(t, v(t)) \, d|m|(t). \tag{3.6.3}$$

いま $m_k = v_k|m|$ とおこう。$(m_k)_k$ は $\mathscr{M}^b(T, E')$ における有界でタイトな点列であることは明らか。$(m_k)_k$ が m に弱収束することを示す：$f\in\mathscr{C}^b(T, E)$ とする。$(v_k(t))_k$ は B' において $v(t)$ に収束するので，

$$\lim_k \langle f(t), v_k(t)\rangle = \langle f(t), v(t)\rangle$$

を得る。さらに，$v(t)\in B'$ であるから，

$$|\langle f(t), v(t)\rangle| \leqq \|f(t)\|$$

が成り立つことがわかる。$|m|$ は有界であるから，$f\in L^1_E(T, \mathscr{B}(T), d|m|)$ であり，Lebesgue の上限収束定理により，

$$\lim_k \int_T \langle f(t), v_k(t)\rangle \, d|m|(t) = \int_T \langle f(t), v(t)\rangle \, d|m|(t)$$

が成り立つ。従って，$\lim_k \langle f, m_k\rangle = \langle f, m\rangle$. これで $(m_k)_k$ が $\mathscr{M}^b(T, E')$ 上で m に弱収束することが示された。さらに，明らかに

$$\frac{dm_k}{d|m_k|}(t) = \frac{d(v_k|m|)}{d(\|v_k\||m|)}(t) = \begin{cases} \dfrac{v_k(t)}{\|v_k(t)\|}, & \text{if } \|v_k(t)\| \neq 0, \\ 0, & \text{if } \|v_k(t)\| \neq 0 \end{cases}$$

となるので，

$$\begin{aligned} \int_T \phi_k(t, v_k(t)) \, d|m|(t) &= \int_T \phi_k\left(t, \frac{v_k(t)}{\|v_k(t)\|}\right) \|v_k\| \, d|m|(t) \\ &= \int_T \phi_k\left(t, \frac{dm_k}{d|m_k|}(t)\right) d|m_k|(t) \end{aligned}$$

を得る。最後に，(3.6.3) により

$$\limsup_k \int_T \phi_k\left(t, \frac{dm_k}{d|m_k|}(t)\right) d|m_k|(t) \leq \int_T \phi_\infty\left(t, \frac{dm}{d|m|}(t)\right) d|m|(t).$$

すなわち，

$$\limsup_k I_{\phi_k}(m_k) \leqq I_{\phi_\infty}(m)$$

となり，これで証明を終える。□

さて次に，以上の諸定理を特定の被積分函数に通用しよう。

系 3.7 Y を Polish 空間とする。$\{C_k : k \in \hat{\mathbb{N}}\}$ を $T \times Y$ 上で定義され，値が 0 を含む E の非空閉凸部分集合となる劣半連続多価写像とする。$(t, y) \in T \times Y$ に収束する $T \times Y$ における任意の点列 $(t_k, y_k)_k$ に対して，

$$C_\infty(t, y) \subset \mathrm{Li}(C_k(t_k, y_k)) \tag{3.7.1}$$

の成り立つことを仮定する。$(m_k)_k$ を $\mathscr{M}^b(T, E')$ における有界でタイトな点列で $m \in \mathscr{M}^b(T, E')$ に弱収束するものとする。$(u_n)_n$ を T で定義され，Y に値をとる連続函数の列で，T の任意のコンパクト部分集合上で連続函数 u に一様収束するものとする。このとき，

$$\liminf_k \int_T \delta^*\left(\frac{dm_k}{d\,|\,m_k\,|}(t), C_k(t, u_k(t))\right) d|m_k|(t) \geq \int_T \delta^*\left(\frac{dm}{d\,|\,m\,|}(t), C_\infty(t, u(t))\right) d|m|(t).$$

証明 各 $k \in \hat{\mathbb{N}}$ に対して，

$$\phi_k(t, x, y) = \delta^*(x, C_k(t, y)), \quad \forall (t, x, y) \in T \times B' \times Y$$

で定義される函数 $\phi_k : T \times B' \times Y \longrightarrow [0, +\infty]$ を考える。もちろん，任意の $t \in T$ に対して，$\phi_k(t, \cdot, y)$ は B' 上で凸かつ正の一次同次である。ϕ_k が $T \times B' \times Y$ 上で下半連続となることを示そう。いま $\hat{\mathbb{N}}$ の点 k を固定すると，([M, Lemma 5. 2]) により，C_k の連続選択子の列 $(u_n)_n$ で任意の $(t, y) \in T \times Y$ に対して，$\{u_n(t, y) : n \in \mathbb{N}\}$ が $C_k(t, y)$ において稠密となるものが存在する。よって，

$$\delta^*(x, C_k(t, y)) = \sup_n \langle u_n(t, y), x \rangle, \quad \forall (t, x, y) \in T \times B' \times Y. \tag{3.7.2}$$

u_n は連続で，B' には $*$-弱位相が与えられているので，函数 $(t, x, y) \longmapsto \langle u_n(t, y), x \rangle$ は $T \times B' \times Y$ 上で連続である。(3.7.2) により，函数 $(t, x, y) \longmapsto \delta^*(x, C_k(t, y))$ が $T \times B' \times Y$ 上で下半連続であることがわかる。

次に，点列 $(\phi_k)_k$ が定理 3. 4 の仮定 (3.4.1) を満たすことを示そう。いま，$(t_k, x_k, y_k)_k$ を $T \times B' \times Y$ における点列で，$(t, x, y) \in T \times B' \times Y$ に収束するとする。$c \in C_\infty(t, y)$ とする。仮定 (3.7.1) により，c に収束する E の点列 $(c_k)_k$ で

$$c_k \in C_k(t_k, y_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

を満たすものが存在する。$\langle c, x \rangle = \lim_k \langle c_k, x_k \rangle$ が成り立つ。従って，

$$\langle c, x \rangle \leq \liminf_k \langle c_k, x_k \rangle \leq \liminf_k \delta^*(x_k, C_k(t_k, y_k)).$$

これが任意の $c\in C_\infty(t,y)$ に対して成り立つのであるから，

$$\delta^*(x, C_\infty(t,y)) \le \liminf_k \delta^*(x_k, C_k(t_k, y_k)).$$

従って，

$$\phi_\infty(t,x,y) \le \liminf_k \phi_k(t_k, x_k, y_k)$$

となり，$T\times B'\times Y$ 上で $\phi_\infty \leqq \mathrm{li_e}\,\phi_k$. 定理3．4を点列 $(\phi_k)_k$ に適用することにより，

$$\liminf_k \int_T \phi_k\left(t, \frac{dm_k}{d|m_k|}(t), u_k(t)\right) d|m_k|(t) \ge \int_T \phi_\infty\left(t, \frac{dm}{d|m|}(t), u(t)\right) d|m|(t)$$

が成り立つことがわかる。すなわち，

$$\liminf_k \int_T \delta^*\left(\frac{dm_k}{d|m_k|}(t), C_k(t, u_k(t))\right) d|m_k|(t) \ge \int_T \delta^*\left(\frac{dm}{d|m|}(t), C_\infty(t, u(t))\right) d|m|(t)$$

となり，これで証明を終える。　　　　□

系 3.8 $\{C_k : k\in\widehat{\mathbb{N}}\}$ を T で定義され，値が E の非空閉凸部分集合となる劣半連続な多価写像とする。各 $t\in T$ に対して，$\varepsilon_t>0$ で，すべての $k\in\mathbb{N}$ に対して $\overline{B}(0,\varepsilon_t)\subset C_k(t)$ を成り立たしめるものの存在を仮定する。また，任意の $t\in T$ に対して，

$$\mathrm{Ls}(C_k(t))\subset C_\infty(t), \tag{3.8.1}$$

および $t\in T$ に収束する T の任意の点列 $(t_k)_k$ に対して，

$$C_\infty(t)\subset \mathrm{Li}(C_k(t_k)) \tag{3.8.2}$$

を仮定する。$\mathscr{M}^b(T,E')$ 上で

$$I_{C_k}(m)=\int_T \delta^*\left(\frac{dm}{d|m|}(t), C_k(t)\right) d|m|(t)$$

と定義される函数 I_{C_k} を考える。このとき，$m\in\mathscr{M}^b(T,E')$ に弱収束する任意の有界でタイトな $M^b(T,E')$ の点列 $(m_k)_k$ に対して，

$$\liminf_k I_{C_k}(m_k) \ge I_{C_\infty}(m)$$

を得，また各 $m\in\mathscr{M}^b(T, E')$ に対して，m に弱収束する $\mathscr{M}^b(T,E')$ の有界でタイトな点列 $(m_k)_k$ で，

$$\limsup_k I_{C_k}(m_k) \le I_{C_\infty}(m)$$

を成り立たしめるものが存在する。

証明 各 $k\in\widehat{\mathbb{N}}$ に対して，

$$\phi_k(t,x)=\delta^*(x, C_k(t)), \quad \forall(t,x)\in T\times B'$$

で定義される函数 $\phi_k : T\times B'\longrightarrow[0,+\infty]$ を考える。$(\phi_k)_k$ が定理3．6の仮定を満たすことを確かめよう。系3．7の証明により，定理3．6の仮定（3.6.2)，すなわち B' 上で $\phi_\infty(t,\cdot)\geqq \mathrm{ls_e}\,\phi_k$

$(t,\cdot)$ の成り立つことを示せば十分である。(3.8.1) により,

$$\phi_\infty(t,x)=\delta^*(x,C_\infty(t))\geq\delta^*(x,\mathrm{Ls}(C_k(t))),\quad \forall x\in B'.$$

さらに,［A,Proposition 1．40 & Theorem 3．9］により,

$$\delta^*(x,\mathrm{Ls}(C_k(t))=\mathrm{ls_e}\,\delta^*(x,C_k(t)),\quad \forall x\in B'$$

が成り立つ。(仮定 $\bar{B}(0,\varepsilon_t)\subset C_k(t),\forall k\in\mathbb{N}$ により,［A, Theorem 3．9］の一様増大性の仮定が満たされていることに注意する。実際, T に属するすべての t に対して, $\bar{B}(0,\varepsilon)\subset C_\infty(t)$ を仮定すれば十分である。注意4．3を見よ。) 従って, $\phi_\infty(t,\cdot)\geq\mathrm{ls_e}\,\phi_k(t,\cdot)$. 後は定理3．6を適用すれば証明を終わることになる。 □

次の命題では,［C 4］において第一筆者によって導入された条件とともに, 多価写像の収束に関する条件 (3.7.1) あるいは (3.8.2) が重要である ([CDV],［V 5］も見よ)。

命題 3.9 S を Polish 空間とする。$\{C_k:k\in\hat{\mathbb{N}}\}$ を S 上で定義され, 値が E の非空閉凸部分集合となる劣半連続な多価写像とする。次の性質を考える。

(i) C_∞ の任意の連続選択子 ϕ に対して, C_k の連続選択子 ϕ_k で S のコンパクト部分集合上で ϕ に一様収束するものが存在する。

(ii) $s\in S$ に収束する S の任意の点列 $(s_k)_k$ に対して, $C_\infty(s)\subset\mathrm{Li}(C_k(s_k))$.

(iii) 多価写像 $\Pi:S\times\hat{\mathbb{N}}\to\!\!\to E,(s,n)\longmapsto C_n(s)$ は $S\times\hat{\mathbb{N}}$ 上で劣半連続。

このとき, (i)$\Longrightarrow$(ii)$\Longleftrightarrow$(iii). さらに, 各 $k\in\mathbb{N}$ に対して多価写像 C_k が (Hausdorff の距離で) 連続のとき, この三つの性質(i), (ii)および(iii)は同値である。

証明 (i)$\Longrightarrow$(ii)は容易である：$(s_k)_k$ を $s\in S$ に収束する S の点列とし, $x\in C_\infty(s)$ とする。[M] により, $\phi(s)=x$ を満たす C_∞ の連続選択子 ϕ が存在する。(i)により, C_k の連続選択子 ϕ_k で点列 $(\phi_k)_k$ が S のコンパクト部分集合 $\{s,s_k:k\in\mathbb{N}\}$ の上で ϕ に一様収束するものが存在する。従って, $x=\phi(s)=\lim_k\phi_k(s_k)$. よって, $x\in\mathrm{Li}(C_k(s_k))$ が成り立つ。このことがすべての $x\in C_\infty(s)$ について成立するので, $C_\infty(s)\subset\mathrm{Li}(C_k(s_k))$ の成り立つことがわかる。

(ii)$\Longrightarrow$(iii)：C_{n_0} の s_0 における劣半連続性により, Π が $(s_0,n_0)\in S\times\mathbb{N}$ において劣半連続であることがわかる。Π が (s_0,∞) において劣半連続であることを示そう：いま Π を劣半連続でないものとすると, $V\cap C_\infty(s_0)\neq\emptyset$ となる E の開部分集合 V で, S における s_0 の任意の近傍 U,

(3) 実際, $\mathbb{N}$ の増加数列 $(k_p)_p$ および s_0 に収束する S の点列 $(t_p)_p$ で, $V\cap C_{k_p}(t_p)=\emptyset,\forall p\in\mathbb{N}$ となるものを見いだすことができるであろう。そして, $k<k_1$ のときには $s_k=t_1$, $k_p\leq k<k_{p+1}$ のときには $s_k=t_p$ とおく。点列 $(s_k)_k$ は s_0 に収束し, $(s_{k_p})_p=(t_p)_p$ であるから, (3.9.1) が確かめられた。

および任意の $N\in\mathbb{N}$ に対して，

$$\exists s\in U,\ \exists n\geqq N,\ V\cap C_n(s)=\emptyset$$

を満たすものが存在することになる。よって，s_0 に収束する S の点列[3] $(s_k)_k$ および $\mathbb{N}$ の増加数列 $(k_p)_p$ で

$$\forall p\in\mathbb{N},\ V\cap C_{kp}(s_{kp})=\emptyset \tag{3.9.1}$$

を満たすものが存在することになる。$x_0\in V\cap C_\infty(s_0)$ をとる。$(s_k)_k$ は s_0 に収束するので，x_0 に収束する点列 $(x_k)_k$ で，すべての $k\in\mathbb{N}$ に対して，$x_k\in C_k(s_k)$ となるものが存在する。従って，すべての $k\geq N$ に対して $x_k\in V\cap C_k(s_k)$ となる N が存在する。このことは (3.9.1) に矛盾し，Π の劣半連続性が示された。

(iii)$\Longrightarrow$(ii)：$(s_k)_k$ を $s_0\in S$ に収束する S の点列とし，$x_0\in C_\infty(s_0)$ をとる。各 $p\in\mathbb{N}^*$ に対して，Π の (s_0,∞) における劣半連続性により，S における s_0 の近傍 U_p および $N_p\in\mathbb{N}$ で

$$\forall\ s\in U_p,\ \forall\ k\geq N_p,\ V_p\cap C_k(s)\neq\emptyset$$

を満たすものが存在する。ここで，V_p は開球 $B(x_0,1/p)$ を表す。さらに，$(s_k)_k$ は s_0 に収束するので，$k\geq N_p$ に対して，$s_k\in U_p$ となると仮定してよい。よって，

$$\forall\ k\geq N_p,\ V_p\cap C_k(s_k)\neq\emptyset.$$

従って，$x_k^p\in V_p\cap C_k(s_k)$ が存在する。さらに，数列 $(N_p)_p$ は狭義増加的で，$U_p\downarrow\{s_0\}$ となることを仮定してよい。

$$x_k=\begin{cases} C_k(s_k)\text{ の任意の点}, & \text{if } k<N_1,\\ x_k^p, & \text{if } N_p\leq k<N_{p+1}\end{cases}$$

で定義される E の点列 $(x_k)_k$ を考えよう。すると，任意の $k\in\mathbb{N}$ に対して，$x_k\in C_k(s_k)$ で，$(x_k)_k$ は E において x_0 に収束する。これで(ii)が示された。

最後に，三つの性質(i)，(ii)および(iii)が同値であることを示すには，(ii)$\Longrightarrow$(i)を示せば十分である。この証明は本質的には［C 4，Lemme 2．4 & Proposition 2．5］の証明と同じである。いま ϕ を C_∞ の連続な選択子とする。C_k は連続であるから，函数 $s\longmapsto d(\phi(s),C_k(s))$ も連続である（ここで，d は E 上のノルムに関する距離を表す)。さらに，函数列 $(s\longmapsto d(\phi(s),C_k(s))_k$ は S のコンパクト部分集合上で 0 に一様収束する。もしそうでないなら，

$$\lim_p \sup_{s\in K}\ d(\phi(s),C_{k_p}(s))\geq\alpha$$

という条件を満たす $\alpha>0$, S のコンパクト部分集合 K および $\mathbb{N}$ の増加数列 $(k_p)_p$ が存在することになる。従って，

（4） 実際，(3.9.2) を満たすKの点列 $(s_{k_p})_p$ のみ存在するだろう。Kはコンパクトであるから，$(s_{k_p})_p$ は $s\in K$に収束すると仮定してよい。そして，$k<k_1$ のときには $s_k=s_{k_1}$，$k^p\leq k<k_{p+1}$ のときには $s_k=s_{k_p}$ とおく。

$$\lim_{p} d(\phi(s_{k_p}), C_{k_p}(s_{k_p})) \geq \alpha \tag{3.9.2}$$

を満たす K の点列 $(s_k)_k$ が存在する[4]。K はコンパクトであるから，$(s_k)_k$ は $s \in K$ に収束すると仮定してよい。よって

$$\begin{aligned}\liminf_{p} d(\phi(s), C_{k_p}(s_{k_p})) &\geq \liminf_{p} d(\phi(s), \phi(s_{k_p})) - d(\phi(s_{k_p}), C_{k_p}(s_{k_p})) \\ &\geq \liminf_{p} d(\phi(s_{k_p}), C_{k_p}(s_{k_p})) \\ &\geq \alpha\end{aligned}$$

を得る。しかし，これは仮定 $\phi(s) \in C_\infty(s) \subset \mathrm{Li}(C_k(s_k))$ に反する。

次に，

$$r_k(s) = d(\phi(s), C_k(s)) + 1/k, \quad \forall s \in S, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

とおく。

$$\Gamma_k(s) = \{x \in C_k(s) : \| x - \phi(s) \| < r_k(s)\}, \quad \forall s \in S$$

で定義される多価写像 $\Gamma_k : S \twoheadrightarrow E$ を考える。Γ_k が S 上で劣半連続となることを示そう：$s_0 \in S$ とし，V を $\Gamma_k(s_0) \cap V \neq \emptyset$ を満たす E の開部分集合とする。$x_0 \in \Gamma_k(s_0) \cap V$ とする。すると，$\| x_0 - \phi(s_0) \| < \gamma_k(s_0) - \varepsilon$，すなわち

$$C_k(s_0) \cap V \cap B(\phi(s_0), r_k(s_0) - \varepsilon) \neq \emptyset$$

を満たす $\varepsilon > 0$ が存在する。C_k が劣半連続，ϕ が連続，r_k が連続であることにより，S における s_0 の近傍 U で，すべての $s \in U$ に対して，

$$\begin{gathered}C_k(s) \cap V \cap B(\phi(s_0), r_k(s_0) - \varepsilon) \neq \emptyset, \\ \| \phi(s) - \phi(s_0) \| < \varepsilon/2, \\ r_k(s_0) - \varepsilon/2 \leq r_k(s)\end{gathered}$$

を満たすものが存在する。すると，各 $s \in U$ および $x \in C_k(s) \cap V \cap B(\phi(s_0), r_k(s_0) - \varepsilon)$ に対して，

$$\begin{aligned}\| x - \phi(s) \| &\leq \| x - \phi(s_0) \| + \| \phi(s_0) - \phi(s) \| \\ &\leq r_k(s_0) - \varepsilon + \varepsilon/2 < r_k(s)\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる。よって，すべての $s \in U$ に対して，$\Gamma_k(s) \cap V \neq \emptyset$ となり，これで Γ_k は劣半連続であることがわかった。従って

$$\bar{\Gamma}_k(s) = \{x \in C_k(s) : \| x - \phi(s) \| \leq r_k(s)\}, \quad \forall s \in S$$

で定義される多価写像 $\bar{\Gamma}_k : S \twoheadrightarrow E$ も劣半連続である。[M] により，$\bar{\Gamma}_k$ の連続選択子 ϕ_k が存在する。このことは各 $k \in \mathbb{N}$ について成り立つ。$\bar{\Gamma}_k$ の定義により，すべての $s \in S$ に対して，

$$\begin{gathered}\phi_k(s) \in C_k(s), \\ \| \phi_k(s) - \phi(s) \| \leq r_k(s).\end{gathered}$$

$(r_k)_k$ は S のコンパクト部分集合上で一様に 0 に収束するので，点列 $(\phi_k)_k$ は (i) を満たすことが

わかる。　　　□

注意 3.10　一般の場合，条件(ｉ)は(ⅱ)よりもより制約的であると思われる。

系 3.11　Tをコンパクトとする。いま，系3．7において$T\times Y$上で定義された多価写像$\{C_k : k\in\widehat{\mathbb{N}}\}$は（Hausdorffの距離で）連続とすると，

$$\forall k\in\widehat{\mathbb{N}},\quad \forall (t,y)\in T\times Y,\quad 0\in C_k(t,y)$$

を仮定する必要はない。

証明　ϕ_∞をC_∞の連続選択子とする。命題3．9により，ϕ_∞に一様収束するC_kの連続選択子ϕ_kが存在する。そこで，

$$\Gamma_k = C_k - \phi_k,\quad \forall k\in\widehat{\mathbb{N}}$$

とおこう。多価写像$\{\Gamma_k : k\in\widehat{\mathbb{N}}\}$が系3．7の仮定を満たすことは容易に確かめられる。よって($(m_k)_k$および$(u_k)_k$を系3．7のようにとると)，

$$\liminf_k \int_T \delta^*\left(\frac{dm_k}{d\,|\,m_k\,|}(t), \Gamma_k(t, u_k(t))\right) d|m_k|(t) \geq \int_T \delta^*\left(\frac{dm}{d\,|\,m\,|}(t), \Gamma_\infty(t, u(t))\right) d|m|(t)$$

を得る。このことから，

$$\begin{aligned}
&\liminf_k \int_T \delta^*\left(\frac{dm_k}{d\,|\,m_k\,|}(t), C_k(t, u_k(t))\right) d|m_k|(t) \\
&\qquad - \liminf_k \int_T \left\langle \frac{dm_k}{d\,|\,m_k\,|}(t), \phi_k(t, u_k(t))\right\rangle d|\,m_k\,|(t) \\
&\qquad\qquad \geq \int_T \delta^*\left(\frac{dm}{d\,|\,m\,|}(t), C_\infty(t, u(t))\right) d|\,m\,|(t) \\
&\qquad\qquad\qquad - \int_T \left\langle \frac{dm}{d\,|\,m\,|}(t), \phi_\infty(t, u(t))\right\rangle d|\,m\,|(t).
\end{aligned} \tag{3.11.1}$$

点列$(\phi_k(\cdot, u_k(\cdot)))_k$は$\phi_\infty(\cdot, u(\cdot))$に一様収束し，写像$(\phi, m)\longmapsto \int \phi\, dm$は$\mathscr{C}^b(T,E)\times\mathscr{M}^b(T,E')$において連続であるから，

$$\int_T \left\langle \frac{dm}{d\,|\,m\,|}(t), \phi(t, u(t))\right\rangle d|\,m\,|(t) = \liminf_k \int_T \left\langle \frac{dm_k}{d\,|\,m_k\,|}(t), \phi_k(t, u_k(t))\right\rangle d|\,m_k\,|(t).$$

したがって，(3.11.1) により，

$$\liminf_k \int_T \delta^*\left(\frac{dm_k}{d\,|\,m_k\,|}(t), C_k(t, u_k(t))\right) d|m_k|(t) \geq \int_T \delta^*\left(\frac{dm}{d\,|\,m\,|}(t), C_\infty(t, u(t))\right) d|m|(t)$$

となる。これで証明を終える。　　　□

4. sweeping 過程の安定性に関する結果

非負の実数 T に対する，$\mathbb{R}$ の区間 $[0, T]$ を考える。$d \in \mathbb{N}^*$ に対して，$BV([0, T], \mathbb{R}^d)$ を $[0, T]$ から$\mathbb{R}^d$ の中への有界変動函数のすべてからなる空間とする。$u \in BV([0, T], \mathbb{R}^d)$ に対して，u の Stieltjes（あるいは微分）測度を Du をもって表す。($Du \in \mathscr{M}^b([0, T], \mathbb{R}^d)$.) そして第 2 節と同様に，$|Du|$ (resp. $\|Du\|$) を Du の変動（全変動）とする。u が連続であるとき，$0 \leq s < t \leq T$ に対して，

$$u(t) - u(s) = \int_{[s,t]} dDu$$

が成り立つ。有界変動函数のより詳細については［D 1］を見よ。

$\mathbb{R}^d$ の任意の閉凸部分集合 C および $x \in \mathbb{R}^d$ に対して，x における C の正則錘を $Nc(x)$ で表す。最後に，$l : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+$ を

$$l(r, R) = \begin{cases} \max(0, (R^2 - r^2)/2r), & \text{if } d \geq 2, \\ \max(0, (R - r) & \text{if } d = 1 \end{cases}$$

で定義する。

定義 4.1 $C : [0, T] \rightarrow\!\!\rightarrow \mathbb{R}^d$ を非空閉凸値劣半連続多価写像とする。$a \in C(0)$ とする。次の三条件を満たす有界変動の函数 $u : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ を初期条件 a とする C の **sweeping 過程**（$\mathscr{SW}(C, a)$）の解と呼ぶ。

(i) $u(0) = a$.

(ii) $u(t) \in C(t), \quad \forall t \in [0, T]$.

(iii) $-\dfrac{Du}{d|Du|}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) \quad |Du|$ -a. e.

sweeping 過程に対する解の存在および一意性については，おおくの専門家により種々の仮定の下で証明がなされている：C.Castaing（[C 2], [C 4],），A.Gavioli（[Ga]），M.D.P.Monteiro Marques（[M M 1], [M M 2]），J.J.Moreau（[Mo 1], [Mo 2], [Mo 3], [Mo 4]），H. Tanaka（[T]），M.Valadier（[V 5]）…その他の参考文献および詳細については［V 5］を見よ。

定理 4.2 $C : [0, T] \rightarrow\!\!\rightarrow \mathbb{R}^d$ を非空閉凸値劣半連続多価写像とする。次の二条件を仮定する。

(i) $\bar{B}(x_0, R_0) \subset C(t), \quad \forall t \in [0, T]$ を満たす $x_0 \in \mathbb{R}^d$ および $r_0 > 0$ が存在する。

(ii) C のグラフは左に閉（すなわち，$[0, T] \times \mathbb{R}^d$ において，$[0, T]$ の左位相に関して閉）。

$a \in C(0)$ とする。このとき，$\mathscr{SW}(C, a)$ の解となる有界変動連続函数 $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_d$ が一意的

に存在する。さらにこの解は

$$\| Du \| = \int_T d\,|Du| \leq \ell(r_0, \| a - x_0 \|)$$

を満す。

参考文献 右連続な解に関するより一般的な結果が［MM 1］に見いだされる。この結果は［V 5, Theorem 11］による。次の注意を見よ。

注意 4.3 実際，［V 5, Theorem 11］では次の二条件を満たす非空閉凸値 Lipschitz 連続多価写像の増大列 (C_n) の存在も仮定している。

(1) $\forall t \in [0, T], \mathrm{cl}\,(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n(t)) = C(t)$;

(2) $\forall t \in [0, T], \bar{B}(x_0, r_0) \subset C_0(t)$.

しかし，［V 5, Theorem 11のコメント］において主張されているように，そのような列が存在することが［V 4］（V 5, Theorem 8 も見よ）によりわかる。確かめなければならないのは(2)だけである。もちろん，$t \in [0, T]$ に収束する任意の数列 $(t_n)_n$ に対して，$C(t) \subset \mathrm{Li}\,(C_n(t_n))$ が成り立つ。よって命題 3.9 により，多価写像 $(n, t) \longmapsto\!\!\!\rightarrow C_n(t)$ は $\hat{\mathbb{N}} \times [0, T]$ 上で劣半連続になる。また $\bar{B}(x_0, r_0/2) \subset \mathrm{int}\, C(t)$ も成り立つ。従って，［V 5, Lemma 7］により，任意の $t \in [0, T]$ に対して，

$$\forall n \geq N_t, \quad \forall s \in U_t, \quad \bar{B}(x_0, r_0/2) \subset \mathrm{int}\, C_n(s)$$

という条件を満たす $[0, T]$ における t の近傍 U_t および整数 N_t が存在する。$[0, T]$ はコンパクトであるから，$[0, T] = \cup_{i=1}^{p} U_t$ を満たす $[0, T]$ の点 $\{t_1, t_2, \cdots, t_p\}$ が存在する。$N = \sup_{i=1,\cdots p} N_{t_i}$ とおくと，

$$\forall n \geq N, \quad \forall t \in [0, T], \quad \bar{B}(x_0, r_0/2) \subset \mathrm{int}\, C_n(s)$$

の成り立つことがわかる。そして $N = 1$ としてもよい。

命題 A $C : [0, T] \rightarrow\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}^d$ を非空閉凸値劣半連続多価写像とし，$u : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ を $u(t) \in C(t), \forall t \in [0, T]$ という条件を満たす有界変動の連続函数とする。次の性質は互いに同値である。

(i) $-\dfrac{d\,Du}{d\,|Du|}(t) \in N_{C(t)}(u(t)), \quad |Du|$ -a. e.

(ii) $0 \leq s < t \leq T$ となるすべての $(s, t) \in [0, T] \times [0, T]$ に対して，

$$\int_{[s,t]} \delta^* \left(-\frac{d\,Du}{d\,|Du|}(\tau), C(\tau) \right) d\,|Du|(\tau) + \frac{1}{2}(\| u(t) \|^2 - \| u(s) \|^2) \leq 0.$$

参考文献 これは M.Valadier（［V 5, Proposition 6］）によるより一般的な結果の帰結である。［MM 1, Théorème 1の証明］も見よ。

補題 B C をその内点が非空の $\mathbb{R}^d$ の凸部分集合とし，$a \in C$, $\varepsilon > 0$ とする。このとき，$\bar{B}(x, r) \subset$

int C, $l(r, \| a-x \|) < \varepsilon$ を成り立たしめる $x \in C$ および $r>0$ が存在する。

補題C S を位相空間, $C: S \to\to \mathbb{R}^d$ を非空閉凸値劣半連続多価写像とし, $s_0 \in S$ とする。いま K を, $K \subset \mathrm{int}\, C(s_0)$ を満たす $\mathbb{R}^d$ のコンパクト凸部分集合とする。このとき, $K \subset \mathrm{int}\, C(s), \forall s \in U$ を成り立たしめる S における s_0 の近傍 U が存在する。

参考文献 [V 5, Lemma 7], [MM 1, Lemma 1].

命題D $(u_n)_n$ を $BV([0, T], \mathbb{R}^d)$ に属する函数列とする。いま $\sup_n \| Du_n \| < +\infty$ を仮定する。このとき, 点列 $(u_n)_n$ は, $BV([0, T], \mathbb{R}^d)$ の各点収束位相に関して列相対コンパクトである。さらに, $(u_{n_k})_k$ を $BV([0, T], \mathbb{R}^d)$ のある点 u に収束する $(u_n)_n$ の部分列で, 函数列 $\{u, u_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ が $[0, T]$ において右連続となるとする。このとき, 任意の連続函数 $f:[0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ および $0 \leq s < t \leq T$ を満たす任意の $(s, t) \in [0, T] \times [0, T]$ に対して,

$$\lim_k \int_{]s,t]} f\, dDu_{nk} = \int_{]s,t]} f\, dDu.$$

すなわち, $\mathscr{M}^b([0, T], \mathbb{R}^d)$ において点列 $(1_{]s,t]} Du_{n_k})_k$ は $1_{]s,t]} Du$ に弱収束する。

参考文献 [V 5, Lemma 5 & Theorem 11の証明の (4)], [MM 1, Lemma 4], [C 2, Théorème 3]. この結果の一部は Banach の定理あるいは Helly の定理とも呼ばれている。

sweeping 過程の安定性に関して次の結果が得られる。

定理 4.4 $\{C, C_n : n \in \mathbb{N}\}$ を $[0, T]$ 上で定義され, 値が $\mathbb{R}^d$ の非空閉凸部分集合となる劣半連続多価写像とする。次の条件を仮定する。

(i) t に収束する $[0, T]$ の任意の数列 $(t_n)_n$ に対して, $C(t) \subset \mathrm{Li}(C_n(t_n))$.

(ii) すべての $t \in [0, T]$ に対して, $\mathrm{Ls}(C_n(t)) \subset C(t)$.

(iii) 多価写像 $\{C, C_n : n \in \mathbb{N}\}$ は左に閉じたグラフをもつ。

(iv) $\bar{B}(x_0, r_0) \subset C_n(t)$, $\forall t \in [0, T]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ という条件を満たす $x_0 \in \mathbb{R}^d$ および $r_0 > 0$ が存在する。

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, $a_n \in C_n(0)$ を $(a_n)_n$ が $a \in \mathbb{R}^d$ に収束するようにとる。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, u_n を $\mathscr{SW}(C_n, a_n)$ の有界変動で連続な解とする。このとき, 点列 $(u_n)_n$ は $\mathscr{SW}(C, a)$ の一意的な解となる有界変動の連続函数 $u:[0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ に各点収束する。

証明 [V 5, Theorem 11の証明] を少し変更することにより, $(u_n)_n$ の任意の部分列は, 有界変動の連続函数 $u:[0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ に各点収束する部分列 $(u_k)_k$ をもつことを示すことができる。

---

(5) ここで, u_n が $[t_0, t_0+\eta]$ 上で $u_n(t_0)$ を初期値とする C_n による sweeping 過程の解であるという事実を用いている。

詳細：M.Valadier（[V 5，Theorem 11の証明]［MM 1］も見よ）に従う。$C_\infty = C$ とおく。すると定理4．2により，$\| Du_n \| \leq l(r_0, \| a_0 - x_0 \|)$. $R = \sup_n \| a_n - x_0 \|$ とおくと，$\| Du_n \| \leq l(r_0, R)$ を得る。従って命題Dにより，点列 $(u_n)_n$ は各点収束位相で相対点列コンパクトである。よって，点列 $(u_n)_n$ が一意的な極限点をもつことを示せば十分である。それは $\mathscr{SW}(C, a)$ の一意的な解となる。いま u を $(u_n)_n$ の極限点とする。すると，u に各点収束する部分列が存在する。いまそれを再び $(u_n)_n$ と記すと，明らかに $u(0) = a$ で，(ii)により，すべての $t \in [0, T]$ に対して，$u(t) \in C(t)$. さらに命題Dにより u は有界変動である。

u が $t_0 \in [0, T]$ において右連続であることを示そう。$\varepsilon > 0$ とする。補題Bにより，$\bar{B}(x_1, r_1) \subset \operatorname{int} C(t_0)$ および $l(r_1, \| u(t_0) - x_1 \|) \leq \varepsilon$ を満たす $r_1 > 0$ と $x_1 \in C(t_0)$ が存在する。命題3．9により，多価写像 $(t, n) \longmapsto\!\!\!\to C_n(t)$ は，$[0, T] \times \widehat{\mathbb{N}}$ 上で劣半連続である。よって補題Cにより，

$$\forall n \geq N, \forall t \in [t_0, t_0 + \eta], \bar{B}(x_1, r_1) \subset \operatorname{int} C_n(t)$$

を満たす $\eta > 0$ と $N \in \mathbb{N}$ が存在する。$l(r_1, \cdot)$ は連続で $(u_n(t_0))_n$ は $u(t_0)$ に収束するから，$l(r_1, \| u_n(t_0) - x_1 \|) \leq \varepsilon, \forall n \geq N$ を仮定してもよい。よって，定理4．2により，

$$\int_{[t_0, t_0 + \eta]} d\, |D\, u_n|(t) \leq l(r_1, \| u_n(t_0) - x_1 \|) \leq \varepsilon$$

の成り立つことがわかる(5)。従って，

$$\forall n \geq N, \forall t \in [t_0, t_0 + \eta], \quad \| u_n(t) - u_n(t_0) \| \leq \varepsilon.$$

このことから，

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \eta], \quad \| u(t) - u(t_0) \| \leq \varepsilon$$

を得る。これで，u が t_0 において右連続であることが示された。

次に，u が $t \in [0, T]$ において左連続であることを示そう。C のグラフは左に閉じているので，

$$u^-(t_0) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ t < t_0}} u(t) \in C(t_0).$$

$\varepsilon > 0$ とする。補題Bにより，$\bar{B}(x_1, r_1) \subset \operatorname{int} C(t_0)$ および $l(r_1, \| u^-(t_0) - x_1 \|) \leq \varepsilon/3$ を満たす $x_1 \in \mathbb{R}^d$ と $r_1 > 0$ が存在する。多価写像 $(t, n) \longmapsto\!\!\!\to C_n(t)$ は $[0, T] \times \widehat{\mathbb{N}}$ の上で劣半連続であるから，補題Cにより，

$$\forall n \geq N_1, \forall t \in [t_0, -\eta, t_0], \quad \bar{B}(x_1, r_1) \subset \operatorname{int} C_n(t)$$

を満たす $\eta > 0$ と $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在する。さらに，すべての $n \geq N_2$ に対して，

$$\| u(t_1) - u^-(t_0) \| < \varepsilon/3,$$
$$\| u_n(t_1) - u(t_1) \| < \varepsilon/3,$$

および $l(r_1, \cdot)$ の連続性を用いると，

$$l(r_1, \| u_n(t_1) - x_1 \|) < \varepsilon/3$$

を満たす $t_1 \in [t_0 - \eta, t_0]$ と $N_2 \geq N_1$ が存在することがわかる。定理4．2により，

$$\int_{[t_1, t_0]} d\, |D\, u_n|(t) \leq l(r_1, \| u_n(t_1) - x_1 \|) < \varepsilon/3$$

を得る。従って $\| u_n(t_0) - u^-(t_0) \| < \varepsilon/3$ となり，

$$\begin{aligned} \| u_n(t_0) - u^-(t_0) \| &\leq \| u_n(t_0) - u_n(t_1) \| + \| u_n(t_1) - u(t_1) \| + \| u(t_1) - u^-(t_0) \| \\ &\leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

$(u_n(t_0))_n$ は $u(t_0)$ に収束するので，

$$\| u(t_0) - u^-(t_0) \| \leq \varepsilon.$$

を得る。$\varepsilon \downarrow 0$ とすると，$u(t_0) = u^-(t_0)$ となることがわかる。これで u が t_0 において左連続であることが示された。

u が $\mathscr{SW}(C, a)$ の（一意的な）解であることを示せば十分である。明らかに，$u(0) = a$ で(ii)により，$u(t) \in C(t)$，$\forall t \in [0, T]$. 従って，

$$-\frac{d\,Du}{d\,|Du|}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) \quad |Du|\text{-a. e.}$$

を示せばよい。u は $[0, T]$ において連続であるから，［V 5，Proposition 6］により，これは，$0 \leq s < t \leq T$ に対して，

$$\int_{]s,t]} \delta^*\left(-\frac{d\,Du}{d\,|Du|}(\tau), C(\tau)\right) d\,|Du|(\tau) + \frac{1}{2}(\|u(t)\|^2 - \|u(s)\|^2) \leq 0$$

と同値である。各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，u_n は $\mathscr{SW}(C_n, a_n)$ の解であるから，

$$\int_{]s,t]} \delta^*\left(-\frac{d\,Du_n}{d\,|Du_n|}(\tau), C_n(\tau)\right) d\,|Du_n|(\tau) + \frac{1}{2}(\|u_n(t)\|^2 - \|u_n(s)\|^2) \leq 0 \tag{4.4.1}$$

を得る。よく知られた Banach の定理（［V 5］，［MM 1，Lemma 4］，［C 2，Théorème 3］を見よ）により，（有界）点列 $(-1_{]s,t]} Du_n)_n$ は $\mathscr{M}^b([0, T], \mathbb{R}^d)$ において $1_{]s,t]} Du$ に弱収束する。よって，系 3．7により

$$\liminf_n \int_T \delta^*\left(\frac{d(-1_{]s,t]} Du_n)}{d\,|-1_{]s,t]} Du_n|}(\tau), C_n(\tau)\right) d|-1_{]s,t]} Du_n|(\tau)$$
$$\geq \int_T \delta^*\left(\frac{d(-1_{]s,t]} Du)}{d\,|-1_{]s,t]} Du|}(\tau), C(\tau)\right) d|-1_{]s,t]} Du|(\tau).$$

すなわち，

$$\liminf_n \int_{]s,t]} \delta^*\left(-\frac{dDu_n}{d\,|Du_n|}(\tau), C_n(\tau)\right) d|Du_n|(\tau)$$
$$\geq \int_{]s,t]} \delta^*\left(-\frac{dDu}{d\,|Du|}(\tau), C(\tau)\right) d|Du|(\tau). \tag{4.4.2}$$

$(u_n)_n$ は u に各点収束するので，

$$\lim_n \frac{1}{2}(\|u_n(t)\|^2 - \|u_n(s)\|^2) = \frac{1}{2}(\|u(t)\|^2 - \|u(s)\|^2)$$

が成り立つ。従って，(4.4.1) および (4.4.2) により，

$$\int_{]s,t]} \delta^*\left(-\frac{dDu}{d\,|Du|}(\tau), C(\tau)\right) d|Du|(\tau) + \frac{1}{2}(\|u(t)\|^2 - \|u(s)\|^2) \leq 0.$$

すなわち，$-\dfrac{dDu}{d\,|Du|}(t) \in N_{C(t)}(u(t)) \quad |Du|$-a. e. が成り立ち，証明を終える。 □

注意 4.5 ［C 4］において，第一筆者は点列 $(C_n)_n$ がより制約的な条件である命題3．9の(i)を満たすという仮定の下で，同様の結果を得ている。

5. 二階の sweeping 過程の安定性と極小値に関する結果

さて，［C 5］において第一筆者によって考え出された二階の sweeping 過程に興味の対象を移す。まず，二階の sweeping 過程についてのいくつかの事実を想起しよう。

記号は第 4 節と同じである。

定義 5.1 Ω を $\mathbb{R}^d$ の非空開部分集合，$C:\Omega \to\to \mathbb{R}^d$ を $C(x) \subset \bar{B}(0, r_1)$, $\forall x \in \Omega$ という条件を満たす非空閉凸値劣半連続多価写像とする。$a \in \Omega$, $b \in C(a)$ および $T>0$ を $a+T\bar{B}(0, r_1) \subset \Omega$ を満たすものとする。$X:[0, T] \longrightarrow \Omega$ を絶対連続函数，$Y:[0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ を有界変動函数とする。いま（X, Y）が次の条件を満たすとき，（a, b）を初期値とする C による**二階 sweeping 過程**（$\mathscr{SW}(C, a, b)$）と呼ぶ。

（i） $X(t) = a + \int_0^t Y(\tau)\, d\tau, \qquad \forall t \in [0, T].$

（ii） $Y(0) = b.$

（iii） $Y(t) \in C(X(t)), \qquad \forall t \in [0, T].$

（iv） $-\dfrac{dDY}{d|DY|}(t) \in N_{C(X(t))}(Y(t)) \quad |DY|$-a. e.

注意 5.2 （X, Y）が二階 sweeping 過程 $\mathscr{SW}(C, a, b)$ の解であるのは Y が（一階の）sweeping 過程 $\mathscr{SW}(C(X(\cdot)), b)$ の解で，（X, Y）が条件（i）を満たすときかつそのときに限る。

定理 5.3 Ω を $\mathbb{R}^d$ の非空開部分集合，$C:\Omega \to\to \mathbb{R}^d$ を非空閉凸値 Hausdorff 連続な多価写像で，$\bar{B}(x_0, r_0) \subset C(x) \subset \bar{B}(0, r_1)$, $\forall x \in \Omega$ を満たす $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $r_0>0$ および $T>0$ が存在するものとする。いま，$a \in \Omega$, $b \in C(a)$ および $T>0$ を $a+T\bar{B}(0, r_1) \subset \Omega$ を満たすようにとる。すると，r_1-Lipschitz 連続な函数 $X:[0, T] \longrightarrow \Omega$ と有界変動な連続函数 $Y:[0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ で（X, Y）が二階 sweeping 過程 $\mathscr{SW}(C, a, b)$ の解となるものが存在する。

参考文献 ［CDV, Theorem 6.1］，［C 5］も見よ。

次に，二階のsweeping過程の安定性に関する結果を述べよう。

定理 5.4 Ω を $\mathbb{R}^d$ の非空開部分集合，$\{C, C_n : n \in \mathbb{N}\}$ を Ω 上で定義され，値が $\mathbb{R}^d$ の非空閉凸部分集合となる Hausdorff 連続な多価写像とする。次を仮定する。

(i) $x\in\Omega$ に収束する Ω の任意の点列 $(x_n)_n$ に対して，$C(x)\subset \mathrm{Li}(C_n(x_n))$.

(ii) すべての $x\in\Omega$ に対して，$\mathrm{Ls}(C_n(x))\subset C(x)$.

(iii) すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して，$\bar{B}(x_0, r_0)\subset C_n(x)\subset \bar{B}(0,, r_1)$, $\forall x\in\Omega$ を満たす $x_0\in\mathbb{R}^d$, $r_0>0$ および $r_1>0$ が存在する。

各 $n\in\mathbb{N}$ に対して，$a_n\in\Omega, b_n\in C_n(a_n)$ を $(a_n)_n$ は $a\in\Omega$ に収束し，$(b_n)_n$ は $b\in\mathbb{R}^d$ に収束するものとする。$T>0$ を $a_n+T\bar{B}(0,, r_1)\subset\Omega$, $\forall n\in\mathbb{N}$ を満たすものとする。各 $n\in\mathbb{N}$ に対して，$X_n:[0, T]\longrightarrow\Omega$ を r_1-Lipschitz 函数，$Y_n:[0, T]\longrightarrow\mathbb{R}^d$ を有界変動の連続函数で，(X_n, Y_n) が二階 sweeping 過程 $\mathscr{SW}(C_n, a_n, b_n)$ の解になるとする。このとき，部分列 (X_{n_k}, Y_{n_k}), r_1-Lipschitz 連続な函数 $X:[0, T]\longrightarrow\Omega$ および有界変動の連続函数 $Y:[0, T]\longrightarrow\mathbb{R}^d$ で次の条件を満たすものが存在する。

(1) 点列 $(X_{n_k})_k$ は $[0, T]$ 上で X に一様収束する。

(2) 点列 $(Y_{n_k})_k$ は $[0, T]$ 上で Y に各点収束する。

(3) 函数 (X, Y) は二階の sweeping 過程 $\mathscr{SW}(C, a, b)$ の解である。

証明 K を $K=\{a, a_n: n\in\mathbb{N}\}+T\bar{B}(0, r_1)$ で定義される Ω のコンパクト部分集合とする。各 $n\in\mathbb{N}$ に対して，(X_n, Y_n) は $\mathscr{SW}(C_n, a_n, b_n)$ の解であるから，すべての $t\in[0, T]$ に対して，$Y_n(t)\in C(X_n(t))\subset\bar{B}(0, r_1)$ が成り立つ。従って，

$$X_n(t)=a_n+\int_0^t Y_n(\tau)\,d\tau\in a_n+t\,\bar{B}(0, r_1)\subset K.$$

点列 $(X_n)_n$ は r_1-Lipschitz 連続であるから，それは同程度連続であり，Ascoli の定理により，r_1-Lipschitz 連続な函数 $X:[0, T]\longrightarrow\Omega$ に一様収束する部分列 $(X_{n_k})_k$ が存在することがわかる。(実際，$X:[0, T]\longrightarrow K$で，$K\subset\Omega$.) さて，多価写像 $\{C(X(\cdot)), C_n(X_{n_k}(\cdot)): k\in\mathbb{N}\}$ が定理4．4の仮定を満たすことを確かめることは容易である。従って，各 $k\in\mathbb{N}$ に対して，Y_{n_k} は $SW(C_{n_k}(X_{n_k}(\cdot)), a_{n_k})$ の解であるから，点列 $(Y_{n_k})_k$ は有界変動の連続函数で $\mathscr{SW}(C(X(\cdot)), b)$ の解である $Y:[0, T]\longrightarrow\mathbb{R}^d$ に各点収束する。よって，注意5．2により

$$X(t)=a+\int_0^t Y(\tau)\,d\tau,\qquad \forall t\in[0, T]$$

だけ示せば十分である。定理4．2により，各 $k\in\mathbb{N}$ に対して，$\|DY_{nk}\|\leq l(r_0, \|b_{n_k}-x_0\|)$ が成り立つことがわかる。よって，$M=\sup_k\|DY_{n_k}\|<+\infty$. 従って，すべての $t\in[0, T]$ に対して，

$$\begin{aligned}\|Y_{n_k}(t)\| &\leq \|Y_{n_k}(t)-Y_n(0)\|+\|Y_{n_k}(0)\|\leq\int_{[0,T]}d\,|DY_{n_k}|+\|b_{n_k}\|\\ &\leq M+\sup_k\|b_{n_k}\|<+\infty.\end{aligned}$$

よって，$(Y_{n_k})_k$ は Y に各点収束するのであるから，Lebesgue の上限収束定理により $L^1_{\mathbb{R}^d}([0, T])$

で $(Y_{n_k})_k$ は Y に収束する。最後に，各 $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$X_n(t)=a_n+\int_0^t Y_n(\tau)\,d\tau, \qquad \forall\, t\in[0,T]$$

が成り立つので，

$$X(t)=a+\int_0^t Y(\tau)\,d\tau, \qquad \forall\, t\in[0,T]$$

を得，証明を終える。 $\square$

次に，二階の sweeping 過程の理論において生ずる最小値の存在に関する結果を与える。

定理 5.5 Ω を $\mathbb{R}^d$ の非空開部分集合，$C:\Omega \rightarrow\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}^d$ を非空閉凸値 Hausdorff 連続な多価写像で，$\bar{B}(x_0, r_0)\subset C(x)\subset \bar{B}(0, r_1)$, $\forall x\in\Omega$ を満たす $x_0\in\mathbb{R}^d$, $r_0>0$ および $r_1>0$ が存在するものとする。$a\in\Omega$, $b\in C(a)$ および $T>0$ は $a+T\bar{B}(0, r_1)\subset\Omega$ を満たすとする。(a, b) を初期値とする C による二階 sweeping 過程（$\mathscr{SW}(C, a, b)$）の解となる r_1-Lipschitz 連続な函数 $X:[0, T]\longrightarrow\Omega$ と有界変動の連続函数 $Y:[0, T]\longrightarrow\mathrm{R}^d$ の組（X, Y）の全体からなる集合を $\mathscr{S}$ と記す。

$\phi:[0, T]\times\bar{B}(0,1)\times\Omega\times\mathbb{R}^d\longrightarrow[0, +\infty]$ を下半連続函数で，$[0, T]\times\Omega\times\mathbb{R}^d$ 上のすべての点（t, x, y）に対して，ϕ（t, ・, x, y）は $\bar{B}(0,1)$ 上で凸かつ正の一次同次とする。このとき，次を満たす $\mathscr{S}$ の元 $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ が存在する。

$$a:=\inf_{(X,Y)\in\mathscr{S}}\int_{[0,T]}\phi\left(t, \frac{dDY}{d\,|DY|}, X(t), Y(t)\right)d\,|DY|(t)$$

$$=\int_{[0,T]}\phi\left(t, \frac{dD\tilde{Y}}{d\,|D\tilde{Y}|}, \tilde{X}(t), \tilde{Y}(t)\right)d\,|D\tilde{Y}|(t).$$

証明 $(X_n, Y_n)_n$ を最小化点列とする。すなわち，すべての $n\in\mathbb{N}$ に対して，$(X_n, Y_n)\in\mathscr{S}$ で，

$$a=\lim_{n\to\infty}\int_{[0,T]}\phi\left(t, \frac{dDY_n}{d\,|DY_n|}, X_n(t), Y_n(t)\right)d\,|DY_n|(t).$$

$(X_n)_n$ は同程度 Lipschitz 連続であるから，適当に部分列をとることにより，$(X_n)_n$ は r_1-Lipschitz 連続な函数 $\tilde{X}$ に一様収束すると仮定できる。

さて，次の主要な事実を証明しよう：$(Y_n)_n$ **は一様収束位相に関して Cauchy 列である。**

Moreau（[Mo 2]）により，$\varphi(0)=0$ となる任意の有界変動右連続函数 $\varphi:[0, T]\longrightarrow\mathbb{R}^d$ に対して，

$$\forall\, t \in [0, T], \qquad \frac{1}{2}\| \varphi(t) \|^2 \leq \int_{[0,t]} \langle \varphi, D\varphi \rangle$$

が成り立つ。よって，任意の整数 m と n に対して，

$$\forall\, t \in [0, T], \qquad \frac{1}{2}\| Y_n(t) - Y_m(t) \|^2 \leq \int_{[0,t]} \langle Y_n - Y_m, DY_n - DY_m \rangle.$$

定理4.2により，$\sup_n \int_{[0,T]} |DY_n| < +\infty$ となることを想起しよう。$\mu_n = |DY_n|$, および $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{\mu_n}{\|\mu_n\|}$ とおく。すると，すべての $n \geq 1$ に対して，$\mu_n \ll \mu$. よって，各 $n \geq 1$ に対して，$|DY_n| = g_n \mu$ を満たす $L^1_{\mathbb{R}^+}([0, T], \mu)$ に属する積分可能な函数 g_n が存在する。従って，

$$DY_n = \frac{dDY_n}{d|DY_n|} |DY_n| = \frac{dDY_n}{d|DY_n|} g_n \mu.$$

すべての $n \geq 1$ に対して，$Z_n = \frac{dDY_n}{d|DY_n|} g_n$ とおく。

$$-\frac{dDY_n}{d|DY_n|}(t) \in N_{C(X_n(t))}(Y_n(t)) \quad |DY_n|\text{-a. e.}$$

であるから，

$$-Z_n(t) \in N_{C(X_n(t))}(Y_n(t)) \quad \mu\text{-a. e.} \tag{$*$}$$

となることが容易に確かめられる。

詳細　$n \in \mathbb{N}$ を固定する。N_n を

$$\forall\, t \in [0, T] \setminus N_n, \quad -\frac{dDY_n}{d|DY_n|}(t) \in N_{C(X_n(t))}(Y_n(t))$$

を満たす μ_n 測度ゼロの集合とする。$\mu(N_n) = 0$ のときは（$*$）が成り立つ。他の場合には，$\mu_n = g_n \mu$ で，$g \in L^1_{\mathbb{R}^+}([0, T], \mu)$ および $\mu_n(N_n) = 0$ であるから，$g_n | N_n \setminus M_n$ となる μ 測度ゼロ集合 $M_n \subset N_n$ が存在する。さて，$t \in N_n \setminus M_n$ とすると，

$$-\frac{dDY_n}{d|DY_n|}(t) = 0 \in N_{C(X_n(t))}(Y_n(t))$$

が成り立つので，この場合にも（$*$）は成立する。

Z_n の定義から

$$\frac{1}{2}\| Y_n(t) - Y_m(t) \|^2 \leq \int_{[0,t]} \langle Y_n - Y_m, Z_n - Z_m \rangle \, d\mu. \tag{5.5.1}$$

すべての $s \in [0, T]$ に対して，$Y_n^m(s) = \mathrm{proj}_{C(X_n(s))}(Y_m(s))$ とおく。すると，(5.5.1) の右辺は

$$\int_{[0,t]} \langle Y_n(s) - Y_n^m(s), Z_n(s) \rangle \, d\mu(s) + \int_{[0,t]} \langle Y_n^m(s) - Y_m(s), Z_n(s) \rangle \, d\mu(s)$$
$$+ \int_{[0,t]} \langle Y_m(s) - Y_n(s), Z_m(s) \rangle \, d\mu(s)$$

と書くことができる。$Y_n(s) \in C(X_n(s))$ および $-Z_n(s) \in N_{C(X_n(s))}(Y_n(s))$ が成り立つから，μ に関してほとんどすべての $s \in [0, T]$ について

$$\int_{[0,t]} \langle Y_n(s) - Y_n^m(s), Z_n(s) \rangle \, d\mu(s) \leq 0$$

を得る。さらに

$$\int_{[0,t]} \langle Y_m(s) - Y_n(s), Z_m(s) \rangle \, d\mu(s)$$
$$\leq \int_{[0,t]} \delta^*(-Z_m(s), C(X_n(s))) \, d\mu(s) + \int_{[0,t]} \langle Y_m(s), Z_m(s) \rangle \, d\mu(s).$$

$(X_n)_n$ は $\tilde{X}$ に一様収束し，C は連続であるから，$(C(X_n))_n$ も $C(\tilde{X})$ に一様収束する。すると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$m \geq n \geq m_0$ のとき，

$$\forall s \in [0, T], \quad h(C(X_m(s)), C(X_n(s))) < \varepsilon$$

となる $m_0 \in \mathbb{N}^*$ が存在する。（ここで，h は $\mathbb{R}^d$ 上の Hausdorff の距離を表す。）従って，任意の $x' \in \mathbb{R}^d$ および $s \in [0, T]$ に対して，$m \geq n \geq m_0$ のとき，

$$|\delta^*(x', C(X_m(s))) - \delta^*(x^*, C(X_n(s)))| \leq \varepsilon \| x' \|.$$

よって，

$$\int_{[0,t]} \delta^*(-Z_m(s), C(X_n(s))) \, d\mu(s)$$
$$\leq \int_{[0,t]} \delta^*(-Z_m(s), C(X_m(s))) \, d\mu(s) + \int_{[0,t]} \varepsilon \| Z_m(s) \| \, d\mu(s).$$

従って，

$$\int_{[0,t]} \langle Y_m(s) - Y_n(s), Z_m(s) \rangle \, d\mu(s) \leq \int_{[0,t]} \delta^*(-Z_m(s), C(X_m(s))) \, d\mu(s)$$
$$+ \varepsilon \int_{[0,t]} \| Z_m(s) \| \, d\mu(s) + \int_{[0,t]} \langle Y_m(s), Z_m(s) \rangle \, d\mu(s) \tag{5.5.2}$$

を得る。

$$Z_m(s) \in -N_{C(X_m(s))}(Y_m(s)) \quad \mu\text{-a. e.}$$

および

$$\sup_{n \geq 1} \int_{[0,T]} |DY_n| = \sup_{n \geq 1} \int_{[0,T]} \| Z_n \| \, d\mu < +\infty$$

が成り立つので，(5.5.2) により

$$\int_{[0,t]} \langle Y_m(s) - Y_n(s), Z_m(s) \rangle \, d\mu(s) \leq \varepsilon \sup_{n \geq 1} \int_{[0,T]} |DY_n|. \tag{5.5.3}$$

さて，(5.5.1) の右辺の第 3 項を評価しよう。$m \geq n \geq n_0$ のとき，

$$\int_{[0,t]} \langle Y_n^m(s) - Y_m(s), Z_n(s) \rangle \, d\mu(s)$$

$$\le \left(\sup_{n\ge 1} \int_{[0,T]} \| Z_n \| \, d\mu\right) \sup_{s\in[0,T]} \| Y_n^m(s) - Y_m(s) \|$$

$$= \left(\sup_{n\ge 1} \int_{[0,T]} | DY_n |\right) \sup_{s\in[0,T]} d(Y_m(s)), C(X_n(s)))$$

$$\le \left(\sup_{n\ge 1} \int_{[0,T]} | DY_n |\right) \sup_{s\in[0,T]} h(C(X_m(s)), C(X_n(s)))$$

$$\le \varepsilon \sup_{n\ge 1} \int_{[0,T]} | DY_n |$$

を得る。そこで，前の不等式 (5.5.2)，(5.5.3) と組み合わせて，既に述べたように $(Y_n)_n$ が Cauchy 点列であることがわかる。従って，$(Y_n)_n$ は $\int_{[0,T]} | D\tilde{Y} | \le \sup_n \int_{[0,T]} | DY_n |$ を満たす有界変動の連続函数 $\tilde{Y}$ に一様収束する。定理５．４により，$(\tilde{X}, \tilde{Y})$ は二階 sweeping 過程 $\mathscr{SW}(C, a, b)$ の解である。これで被積分函数 ϕ に系３．７を適用する準備が整った。$(X_n, Y_n)_n$ は一様に $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ に収束し，Banach の定理により $(DY_n)_n$ は DY に弱収束するので（[V 5]，[MM 1]，[C 2] を見よ），

$$a := \lim_{n\to\infty} \int_{[0,T]} \phi\left(t, \frac{dDY_n}{d\,|DY_n|}, X_n(t), Y_n(t)\right) d\,|DY_n|(t)$$

$$\ge \int_{[0,T]} \phi\left(t, \frac{dD\tilde{Y}}{d\,|D\tilde{Y}|}, \tilde{X}(t), \tilde{Y}(t)\right) d\,|D\tilde{Y}|(t)$$

を得る。　　　□

6．付録：測度からなる空間上の積分汎函数の下半連続性について

この付録では，有界変動のベクトル測度からなる空間上で定義される積分汎函数の下半連続性に関するいくつかの結果を述べる。

次の結果は Y.Reshetnyak（[Re, Theorem 2]）によるよく知られた結果を Polish 空間上で定義され，Banach 空間に値をとる測度に一般化したものである。

定理 6.1　$\phi: T\times B' \longrightarrow [0,+\infty]$ を $T\times B'$ 上の下半連続函数で，すべての $t\in T$ に対して，$\phi(t,\cdot)$ は B' 上で凸かつ正の一次同次とする。すなわち，すべての $x\in B'$ およびすべての $\lambda\in[0,1]$ に対して，$\phi(t,\lambda x) = \lambda\phi(t,x)$. $(m_k)_k$ を $m\in\mathscr{M}^b(T,E')$ に弱収束する有界でタイトな $M^b(T,E')$ の点列とする。このとき，

$$\liminf_k \int_T \phi\left(t, \frac{dm_k}{d\,|m_k|}(t)\right) d|m_k|(t) \ge \int_T \phi\left(t, \frac{dm}{d\,|m|}(t)\right) d|m|(t).$$

証明　ここでの証明は，T が局所コンパクトの場合に Y. Reshetnyak（[Re]，[C3]）によって展開されたいくつかのステップを必要な修正を加えながらおう。

部分列を取ることにより，最初から

$$a=\liminf_k \int_T \phi\left(t,\frac{dm_k}{d\mid m_k\mid}(t)\right)d|m_k|(t)=\lim_k \int_T \phi\left(t,\frac{dm_k}{d\mid m_k\mid}(t)\right)d|\,m_k\,|(t)$$

としてよい。各 $k\in\mathbb{N}$ に対して，写像 $t\longmapsto\left(t,\frac{dm_k}{d\mid m_k\mid}(t)\right)$, $T\longrightarrow T\times B'$ による $\mid m_k\mid$ の像によって定義される測度 $\nu_k\in M_+^b(T\times B',\mathbb{R})$ を考える。([DM, III(73)]) により

$$\nu_k=\int_T \delta_t\otimes\delta_{\left(\frac{dm_k}{d\mid m_k\mid}(t)\right)}d|\,m_k\,|(t),$$

ここで，δ_x は x に重みをもつ Dirac 測度を表す。$(m_k)_k$ は有界で $\|\nu_k\|=\int d\mid m_k\mid=\|m_k\|$ であるから，点列 $(\nu_k)_k$ も有界である。さらに，点列 $(m_k)_k$ はタイトであるから，任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\sup_k\mid m_k\mid(T\backslash K)\leq\varepsilon$ となる T のコンパクト部分集合 K が存在する。すると，

$$\nu_k([T\times B']\backslash[K\times B'])=\nu_k([T\backslash K]\times B')=|m_k|(T\backslash K)$$

となるから，$\sup_k\mid\nu_k\mid([T\times B']\backslash[K\times B'])\leq\varepsilon$. $K\times B'$ はコンパクトであるから，$(\nu_k)_k$ がタイトであることが示せた。したがって，Prokhorov の定理（定理2．1）により，それは $T\times B'$ 上の非負有界ラドン測度からなる空間 $\mathscr{M}_+^b(T\times B',\mathbb{R})$ において弱相対コンパクトである；$\mathscr{M}_+^b(T\times B',\mathbb{R})$ は弱位相を与えると Polish 空間となることを想起しよう－[Bo 2，Proposition 5 .10] を見よ。したがって，$(v_k)_k$ の部分列 $(v_{k_p})_p$ および測度 $v\in\mathscr{M}_+^b(T\times B',\mathbb{R})$ を適当にとり，$(v_{k_p})_p$ を v に弱収束させることができる。ϕ は $T\times B'$ 上で非負かつ下半連続であるから，$\mathscr{M}^b{}_+(T\times B',\mathbb{R})$ 上で定義される写像 $\tau\longmapsto\int\phi\,d\,\tau$ は弱下半連続である（[DM，Théorème III. 55]）. すると

$$\begin{aligned}a=\lim_k \int_T \phi\left(t,\frac{dm_k}{d\mid m_k\mid}(t)\right)d|m_k|(t)&=\lim_p \int_{T\times B'}\phi(t,x)\,d\nu_{k_p}(t,x)\\ &\geq\int_{T\times B'}\phi(t,x)\,d\nu(t,x).\end{aligned}\tag{6.1.1}$$

ν の T の上への射影を μ とする。これは

$$\mu=\int_{T\times B'}\delta_t\,d\,\nu(t,x)$$

で与えられる。測度の積分分解に関する結果（[V 1 ,Théorème 9]，[V 2，Théorème 2]，[C 1]，[S P]，[C V]，[I T] を見よ）により，T で定義され，値を弱位相が与えられた B' 上の Radon 確率の空間 $M_+^1(B')$ の中にとる μ-可測函数 $\lambda: t\longmapsto\lambda_t$ で

$$\nu=\int_T \delta_t\otimes\lambda_t\,d\mu(t)$$

を満たすものが存在する。(6.1.1) に戻って，

$$a \geq \int_{T\times B'} \phi(t,d)\, d\nu(t,x) = \int_T \int_{B'} \phi(t,x)\, d\lambda_t(x)\, d\mu(t) \tag{6.1.2}$$

を得る。$b(\lambda_t) \in B'$ を

$$b(\lambda_t) = \int_{B'} x\, d\lambda_t(x)$$

で定義される λ_t の重心としよう。$b(\lambda): T \longrightarrow B',\ t \longmapsto b(\lambda_t)$ は可測で，任意の $t \in T$ に対して，函数 $\phi(t,\cdot)$ は B' 上で凸かつ下半連続であるから，

$$\int_{B'} \phi(t,x)\, d\lambda_t(x) \geq \phi(t, b(\lambda_t)), \quad \forall t \in T.$$

(6.1.2) により，

$$a \geq \int_T \phi(t, b(\lambda_t))\, d\mu. \tag{6.1.3}$$

$m = b(\lambda)\mu$ となることを示そう。$f \in \mathscr{C}^b(T,E)$ とする。すると，各 $k \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\int_T f(t)\, dm_k(t) = \int_T \langle f(t), \frac{dm_k}{d|m_k|}(t) \rangle\, d|m_k|(t) = \int_{T\times B'} \langle f(t), x \rangle\, d\nu_k(t,x).$$

他方，$(m_{k_p})_p$ は m へ弱収束するから，

$$\int_T f(t)\, dm(t) = \lim_p \int_T f(t)\, dm_{k_p}(t).$$

さらに，$\langle f(\cdot), \cdot \rangle \in \mathscr{C}^b(T\times B', \mathbb{R})$ で，点列 $(\nu_{k_p})_p$ は ν に弱収束するから，

$$\int_{T\times B'} \langle f(t), x \rangle\, d\nu(t,x) = \lim_p \int_{T\times B'} \langle f(t), x \rangle\, d\nu_{k_p}(t,x)$$

となる。ここで，前記の三つの式を組み合わせると，

$$\begin{aligned}\int_T f(t)\, dm(t) &= \int_{T\times B'} \langle f(t), x \rangle\, d\nu(t,x) = \int_T \int_{B'} \langle f(t), x \rangle\, d\lambda_t(x)\, d\mu(t) \\ &= \int_T \langle f(t), \int_{B'} x\, d\lambda_t(x) \rangle\, d\mu(t) = \int_T \langle f(t), b(\lambda_t) \rangle\, d\mu(t) \\ &= \int_T f(t)\ d(b(\lambda)\mu)(t).\end{aligned}$$

これで，$m = b(\lambda)\mu$ となることが示せた。よって，$\dfrac{dm}{d\mu} = b(\lambda)$. (6.1.3) を考慮すると，

$$a \geq \int_T \phi(t, b(\lambda_t))\, d\mu(t) = \int_T \phi(t, \frac{dm}{d\mu}(t))\, d\mu(t). \tag{6.1.4}$$

$|b(\lambda)|: T \longrightarrow [0,1]$ を $t \longmapsto \| b(\lambda_t) \|$ で定義しよう。μ は T 上の非負測度であるから，$d|m| = |b(\lambda)|\, d\mu$ となり，したがって，

$$dm = \frac{dm}{d\,|\,m\,|}\ \frac{d\,|\,m\,|}{d\,\mu}\,d\mu = \frac{dm}{d\,|\,m\,|}\,|\,b\,(\lambda)\,|\,d\mu.$$

このことから，ほとんどすべての $t \in T$ に対して，

$$\phi\left(t, \frac{dm}{d\mu}(t)\right) = \phi\left(t, \|\,b\,(\lambda_t)\,\|\,\frac{dm}{d\,|\,m\,|}(t)\right) = \|\,b\,(\lambda_t)\,\|\,\phi\left(t, \frac{dm}{d\,|\,m\,|}(t)\right).$$

最後に，(6.1.4) を用いると，

$$\begin{aligned} a &\geq \int_T \phi\left(t, \frac{dm}{d\mu}(t)\right) d\mu\,(t) = \int_T \phi\left(t, \frac{dm}{d\,|\,m\,|}(t)\right) \|\,b\,(\lambda_t)\,\|\,d\mu\,(t) \\ &= \int_T \phi\left(t, \frac{dm}{d\,|\,m\,|}(t)\right) d\,(|\,b\,(\lambda)\,|\,\mu)(t) = \int_T \phi\left(t, \frac{dm}{d\,|\,m\,|}(t)\right) d\,|\,m\,|\,(t) \end{aligned}$$

がわかる。これで定理の証明を終える。 □

注意 6．2　1．Reshetnyak の定理により汎函数

$$I_\phi : \mathscr{M}^b\,(T, E') \longrightarrow \mathbb{R}^+,\ m \longmapsto \int_T \phi\left(t, \frac{dm}{d\,|\,m\,|}(t)\right) d|m|\,(t)$$

が $\mathscr{M}^b\,(T, E')$ の有界でタイトな部分集合上で列下半連続であることがわかる。

2．［C 3］において，第一筆者は，T が（必ずしも距離づけ可能ではない）局所コンパクト位相空間のとき，タイト性の仮定なしに同じ結果を証明している。

3．($E = \mathbb{R}^n$ の下で) Reshetnyak の定理の非常に異なる証明が Buttazzo の本（[Bu, Theorem 3.4.3]）に見いだされる。

次に，**右**劣半連続な多価写像に対応する有界変動のベクトル測度からなる空間上で定義される積分汎函数に関する結果を与える。この結果は，C.Castaing（[C 4]），R.Rockafellar（[Ro 2]），そして M.Valadier（[V 3]）などの論稿に刺激された。

$T > 0$ とする。$[0, T]$ 上で**自然**（natural）位相 τ と**右**（right）（あるいは**半開区間**，half-open interval）位相 τ_d を考える。(Kelly［K］を見よ)。もちろん $\tau \subset \tau_d$．さらに，$([0, T], \tau_d)$ がパラコンパクト位相空間であることはよく知られている（[K, p172]）。

BRC $([0, T], E)$ を $[0, T]$ で定義され，E の中に値をとる有界で右連続な（すなわち，$[0, T]$ 上で右位相 τ_d に関して連続な）函数のすべてからなる空間とする。BRC $([0, T], E)$ は $\mathscr{L}^\infty_E([0, T])$ の部分空間であることに注意する。したがって，$u \in$ BRC $([0, T], E)$ の $m \in \mathscr{M}^b([0, T], E')$ に関する積分は

$$\int u\, d m = \int_{[0,T]} \langle u(t), \frac{dm}{d|m|}(t) \rangle\, d|m|(t)$$

で定義される。BRC $([0, T], E)$ には $\mathscr{M}^b([0, T], E')$ との分離された双対によって導入される弱位相を与える。

非空・弱コンパクト・凸値多価写像 $\Gamma:[0, T] \to\!\!\to E$ は $\cup_{t\in[0,T]} \Gamma(t)$ が有界であるとき，**有界** (bounded) という。

S_Γ^{BRC} は Γ の右連続な選択子のすべてからなる集合とし，$\mathscr{S}_\Gamma^\infty(|m|)$ は $\mathscr{L}_E^\infty([0, T], E)$ に属する Γ の選択子のすべてからなる集合を表すものとする。

$\mathscr{M}^b([0, T], E')$ との双対に関する，$u \in \mathrm{BRC}([0, T], E)$ における $\mathscr{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}$ の**正則錘** (normal cone) を

$$N\mathscr{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}(u) := \{m \in \mathscr{M}^b([0, T], E') : \langle u, m \rangle = \delta^*(m, \mathscr{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}})$$

で定義する。ここで，$\delta^*(\cdot, \mathscr{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}})$ は，$\mathscr{M}^b([0, T], E')$ との双対に関する，集合 S_Γ^{BRC} の支持函数を表す。

定理 6.3 $\Gamma:[0, T] \to\!\!\to E$ を $[0, T]$ で定義された，有界で右劣半連続な非空・弱コンパクト・凸値多価写像とする。

このとき，$\mathscr{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}$ は BRC $([0, T], E)$ において非空・凸・弱閉であり，$\mathscr{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}$ の支持函数は，すべての $m \in \mathscr{M}^b([0, T], E')$ に対して，

$$\delta^*(m, \mathscr{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}) = \int_{[0,T]} \delta^*\left(\frac{dm}{d|m|}(t), \Gamma(t)\right) d|m|(t)$$

与えられる。

さらに，$u \in \mathrm{BRC}([0, T], E)$ における $\mathscr{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}$ の正則錘は

$$N_{\mathscr{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}}(u) = \left\{m \in \mathscr{M}^b([0, T], E') : \frac{dm}{d|m|}(t) \in N_{\Gamma(t)}(u(t)) \quad |m|\text{-}a.e.\right\}$$

で与えられる。ここで，$N_{\Gamma(t)}(u(t))$ は点 $u(t)$ における $\Gamma(t)$ の正則錘を表す。

証明 $\mathscr{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}$ が非空であることは，Michael の連続選択子定理（[M]）によりわかる：$([0, T], \tau_d)$ はパラコンパクト位相空間で $\Gamma:([0, T], \tau_d) \to\!\!\to E$ は劣半連続有界であるから，Γ の有界で τ_d-連続な選択子 u が存在する。

$\Gamma(t)$ の凸性により，$\mathscr{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}$ も凸であることがわかる。$\mathscr{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}$ が弱位相について閉であることを示そう：

$(u_{\hat{\alpha}})_{\hat{\alpha}}$ を，$u\in\mathrm{BRC}([0,T],E)$ に収束する $\mathscr{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}$ 上のネットとする。任意の $x'\in E'$ と $t\in[0,T]$ に対して，$x'\delta_t$ は $\mathscr{M}^b([0,T],E')$ に属する。したがって，

$$\langle u_{\hat{\alpha}}(t),x'\rangle=\langle u_{\hat{\alpha}},x'\delta_t\rangle\xrightarrow[\alpha]{}\langle u,x'\delta_t\rangle=\langle u(t),x'\rangle.$$

これで，$(u_\alpha(t))_{\hat{\alpha}}$ が $u(t)$ に弱収束することがわかった。$\Gamma(t)$ は閉であるから，$u(t)\in\Gamma(t)$. したがって，$u\in S_\Gamma^{\mathrm{BRC}}$ が成り立つ。

$\psi:[0,T]_{\tau_d}\times E\longrightarrow[0,+\infty]$ および $\phi:[0,T]_{\tau_d}\times E'\longrightarrow]-\infty,+\infty]$ をそれぞれ

$$\psi(t,x)=\delta(x,\Gamma(t)),\quad\forall(t,x)\in[0,T]\times E,$$

すなわち，x における $\Gamma(t)$ の指示函数，および

$$\phi(t,x')=\delta^*(x',\Gamma(t)),\quad\forall(t,x')\in[0,T]\times E',$$

すなわち，x' における $\Gamma(t)$ の支持函数で定義されるふたつの下半連続函数とする。

任意の $\overline{m}\in\mathscr{M}^b([0,T],E')$ をひとつ固定する。$I_\psi:L_E^\infty([0,T],|\overline{m}|)\longrightarrow]-\infty,+\infty]$ および I_ϕ: $L_{E'}^1([0,T],|\overline{m}|)\longrightarrow[-\infty,+\infty]$ をそれぞれ ψ，ϕ に対応する積分汎函数とする。

よく知られた双対性に関する結果［C V，Corollary VII. 15］により，各 $v\in L_{E'}^1([0,T],|\overline{m}|)$ に対して，

$$I_\phi(v)=(I_\psi)^*(v)=\sup\{\langle v,u\rangle-I_\psi(u):u\in L_E^\infty([0,T],|\overline{m}|)\}.$$

$\dfrac{d\overline{m}}{d|\overline{m}|}\in L_{E'}^1([0,T],|\overline{m}|)$ であるから，

$$\begin{aligned}\int_{[0,T]}\delta^*\left(\frac{d\overline{m}}{d|\overline{m}|}(t),\Gamma(t)\right)d|\overline{m}|(t)&=\sup\left\{\int_{[0,T]}\langle u,\frac{d\overline{m}}{d|\overline{m}|}(t)\rangle\,d|\overline{m}|(t):u\in\mathscr{S}_\Gamma^\infty(|\overline{m}|)\right\}\\&\geq\sup\left\{\int_{[0,T]}\langle u,\frac{d\overline{m}}{d|\overline{m}|}(t)\rangle\,d|\overline{m}|(t):u\in\mathscr{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}\right\}\\&=\delta^*(m,\mathscr{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}).\end{aligned}$$

次に，逆の不等式を示そう。そのために，$\bar{u}\in S_\Gamma^\infty(|\overline{m}|)$ および $\alpha\in\mathbb{R}$ を

$$\alpha<\int_{[0,T]}\langle\bar{u}(t),\frac{d\overline{m}}{d|\overline{m}|}(t)\rangle\,d|\overline{m}|(t)\tag{6.4.1}$$

を満たすようにとる。このとき，

$$\alpha<\int_{[0,T]}\langle u(t),\frac{d\overline{m}}{d|\overline{m}|}(t)\rangle\,d|\overline{m}|(t)$$

となる $u\in\mathscr{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}$ の存在を示せばよい。$\beta>0$ を $\|\bar{u}\|_\infty<\beta$ を満たすように十分大きくとり，$\varepsilon>0$ を

$$\alpha<\int_{[0,T]}\langle\bar{u}(t),\frac{d\overline{m}}{d|\overline{m}|}(t)\rangle\,d|\overline{m}|(t)-2\beta\varepsilon\tag{6.4.2}$$

を満たすようにとる。Lusin の定理により，$|\overline{m}|([0,T]\backslash K)<\varepsilon$ を満たし，かつ $\bar{u}$ が K 上で τ-連続（したがって，τ_d-連続）となる τ-コンパクト（従って，τ_d-閉）な集合Kが存在する。各 $t\in$

$[0, T]$ に対して，

$$\Lambda(t)=\begin{cases}\bar{u}(t), & \text{if } t\in K,\\ \Gamma(t)\cap B(0,\beta), & \text{otherwise}\end{cases}$$

で定義される多価写像 $\Lambda:[0, T]\rightarrow\!\!\rightarrow E$ を考える。Λ が非空・凸値であることは明らかである。cl Λ が τ_d-劣半連続であることを示そう。(ここで，$\mathrm{cl}\,\Lambda(t)=\mathrm{cl}(\Lambda(t))$.) U を E の開部分集合とする。すると，

$$\begin{aligned}\mathrm{cl}\,\Lambda^-(U) &= \{t\in[0,T]:\mathrm{cl}\,\Lambda(t)\cap U\neq\emptyset\}\\ &= \{t\in[0,T]:\Lambda(t)\cap U\neq\emptyset\}\\ &= \{t\in[0,T]:\Gamma(t)\cap(U\cap B(0,\beta))\neq\emptyset\}\backslash\{t\in K:\bar{u}(t)\in U\}.\end{aligned}$$

U は開集合であるから，Γ が τ_d- 劣半連続であること，および $\bar{u}$ が τ_d-連続であることにより，$\mathrm{cl}\,\Lambda^-(U)$ は $[0, T]_{\tau_d}$ において開集合である。これで，cl Λ の τ_d-劣半連続性が示された。

したがって，Michael の定理（[M]）により，cl Λ の τ_d-連続な選択子 u が存在する。u は明らかに有界であるから， $u\in\mathscr{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}$. また K 上では $u=\bar{u}$ であるから，(6.4.1) と (6.4.2) を用いて，

$$\begin{aligned}\int_{[0,T]}\langle u(t),\frac{d\bar{m}}{d|\bar{m}|}(t)\rangle\, d|\bar{m}|(t) &= \int_{[0,T]}\langle \bar{u}(t),\frac{d\bar{m}}{d|\bar{m}|}(t)\rangle\, d|\bar{m}|(t)\\ &\qquad+\int_{[0,T]\backslash K}\langle u(t)-\bar{u}(t),\frac{d\bar{m}}{d|\bar{m}|}(t)\rangle\, d|\bar{m}|(t)\\ &\geq \int_{[0,T]}\langle \bar{u}(t),\frac{d\bar{m}}{d|\bar{m}|}(t)\rangle\, d|\bar{m}|(t)-2\beta|\bar{m}|([0,T]\backslash K)\\ &> \alpha.\end{aligned}$$

これで，定理の前半の部分の証明を終える。

$u\in\mathscr{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}$ とする。前の結果により，

$$\begin{aligned}N_{\mathscr{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}}}(u) &= \{m\in\mathscr{M}^b([0,T],E'):\langle u,m\rangle=\delta^*(m,\mathscr{S}_\Gamma^{\mathrm{BRC}})\}\\ &= \Big\{m\in\mathscr{M}^b([0,T],E'):\\ &\qquad\int_{[0,T]}\Big[\delta^*\Big(\frac{dm}{d|m|}(t),\Gamma(t)\Big)-\langle u(t),\frac{dm}{d|m|}(t)\rangle\Big]\,d|m|(t)=0\Big\}\\ &= \Big\{m\in\mathscr{M}^b([0,T],E'):\delta^*\Big(\frac{dm}{d|m|}(t),\Gamma(t)\Big)-\langle u(t),\ \frac{dm}{d|m|}(t)\rangle=0\ |m|\text{-a. e.}\Big\}\\ &= \Big\{m\in\mathscr{M}^b([0,T],E'):\frac{dm}{d|m|}(t)\in\partial[\delta(\cdot,\Gamma(t))](u(t))\ |m|\text{-a. e.}\Big\},\end{aligned}$$

ここで，$\partial[\delta(\cdot,\Gamma(t))](u(t))$ は $u(t)$ における $\delta(\cdot,\Gamma(t))$ の劣微分を表す。この劣微分は実際 $u(t)$ における $\Gamma(t)$ の正則錐であるから（[Ro]），これで定理の後半が示されたことになる。

□

参 考 文 献

[A] H. Attouch, *Variational Convergence for Functions and Operators,* Pitman, London, 1984.

[AG] P. Aviles & Y. Giga, *Variational integrals on mappings of bounded variation and their lower semicontinuity,* Arch. Rational Mech. Anal. **115** (1991), 201-255.

[Ba] E. J. Balder, *An extension of Prohorov's theorem for transition probabilities with applications to infinite-dimensional lower closure problems,* Rend. Circ. Mat. Palermo (2) **XXXIV** (1985), 427-447.

[Bt 1] G. Bouchitté, *Représentation intégrale des fonctionnelles convexes sur un espace de mesures,* Publications AVAMAC n°2 (1986), Université de Perpignan.

[Bt 2] G. Bouchitté, *Calcul des variations en cadre non réflexif. Représentation et relaxation de fonctionnelles intégrales sur un espace de mesures. Application en plasticité et homogénisation,* Thèse de Doctorat d'Etat, Perpignan, 1987.

[BV 1] G. Bouchitté & M. Valadier, *Integral representation of convex functionals on a space of measures,* J. Funct. Anal. 80 (1988), 398-420.

[BV 2] G. Bouchitté & M. Valadier, *Multifonctions s. c. i. et régularisée s. c. i. essentielle,* Congrés franco-québécois d'analyse non-linéaire appliquée, Perpignan, 22-26 juin 1987, Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Non Linéaire **6-suppl.** (1989), 123-149.

[Bo 1] N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique. Intégration,* Chapitres I-IV, Second edition, Hermann, Paris, 1965.

[Bo 2] N. Bourbaki, *Eléments de Mathématique. Intégration,* Chapitre IX, Hermann, Paris, 1969.

[Bu] G. Buttazzo, *Semicontinuity, Relaxation and Integral Representation in the Calculus of Variation,* Longman Scientific & Technical, Harlow, 1989.

[C 1] C. Castaing, *Application d'un théorème de compacité à la désintégrati*on des mesures, C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A **273** (1971), 1056-1059.

[C 2] C. Castaing, *Sur une nouvelle classe d'équation d'évolution dans les espaces de Hilbert,* Sém. Anal. Convexe **13** (1983), 10. 1-10. 28.

[C 3] C. Castaing, *Validité du théorème de Reshetnyak dans les espaces hilbertiens,* Sém. Anal. Convexe **17** (1987), 8. 1-8. 9.

[C 4] C. Castaing, *Quelques résultats de convergence dans les inclusions différentielles,* Sém. Anal. Convexe **17** (1987), 12. 1-12. 37.

[C 5] C. Castaing, *Quelques problèmes d'évolution du second ordre,* Sém. Anal. Convexe **18** (1988), 5. 1-5. 18.

[CDV] C. Castaing, T. X. Duc Ha & M. Valadier, *Evolution equations governed by the sweeping process,* Set-Valued Anal. **1** (1993), 109-139.

[CV] C. Castaing & M. Valadier, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions,* Lecture Notes in Math., vol. 580, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[DM] C. Dellacherie & P. -A. Meyer, *Probabilités et Potentiel,* Hermann, Paris, 1975; English transl., *Probabilities and Potential,* North-Holland, Amsterdam, 1978.

[DU] J. Diestel & J. J. Uhl, *Vector Measures,* Mathematical Survey, vol. 15, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1977.

[D 1] N. Dinculeanu, *Vector Measures,* Pergamon Press, Oxford, 1967.

[D 2] N. Dinculeanu, *Integration on Locally Compact Spaces,* Noordhoff International Publ., Leyden, 1974.

[Ga] A. Gavioli, *Approximation from the exterior of a multifunction and its application in the "sweeping process"*, J. Differential Equations **92** (1991), 373-383.

[GMS] M. Giaquinta, G. Modica & J. Soucek, *Functionals with linear growth in the calculus of variations.* I, Comment. Math. Univ. Carolin. **20** (1979), 143-156; II **20** (1979), 157-171.

[GS] C. Goffman & J. Serrin, *Sublinear functions of measures and variational integrals,* Duke Math. J. **31** (1964), 159-178.

[IT] C. Ionescu Tulcea, *Two theorems concerning the desintegration of measures,* J. Math. Anal. Appl. **26** (1969), 376-380.

[J] G. W. Johnson, *The dual of C (S, F),* Math. Ann. **187** (1970), 1-8.

[K] J. L. Kelley, *General Topology,* Graduate Texts in Math., vol. 27, Springer-Verlag, Berlin, 1955.

[M] E. Michael, *Continuous selections,* I, Ann. of Math **63** (1956), 361-382.

[MM 1] M. D. P. Monteiro Marques, *Rafle par un convexe semi-continu inférieurement d'intérieur non vide en dimension finie,* Sém. Anal. Convexe **14** (1984), 6. 1-6. 24.

[MM 2] M. D. P. Monteiro Marques, *Rafle par un convexe continu d'intérieur non vide en dimension infinie,* Sém. Anal. Convexe **16** (1986), 4. 1-4. 11.

[Mo 1] J. J. Moreau, *Rafle par un convexe variable.* I , Sém. Anal. Convexe **1** (1971), 15. 1-15. 43; II, Sém. Anal. Convexe **2** (1972), 3. 1-3. 36.

[Mo 2] J. J. Moreau, *Sur les mesures différentielles des fonctions vectorielles à variation localement bornée,* Sém. Anal. Convexe **5** (1975), 17. 1-17. 39.

[Mo 3] J. J. Moreau, *Sur les mesures différentielles de fonctions vectorielles et certains problêmes d' évolution,* C. R. Acad. Sci, Paris Ser. A **282** (1976), 837-840.

[Mo 4] J. J. Moreau, *Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space,* J. Differential Equations **26** (1977), 347-374.

[N 1] M. -F. Nouguès (Sainte-Beuve), *Some topological properties of vector measures with bounded variation and its applications,* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **CXVI** (1978), 317-379.

[N 2] M. -F.Nouguès (Sainte-Beuve), *Mesures vectorielles à variation bornée, et applications à la semi-continuité inférieure d'une fonctionnelle intégrale,* Thèse de Doctorat d'Etat, Université Montpellier II, 1987.

[Re] Y. G. Reshetnyak, *Weak convergence of completely additive vector functions on a set,* Sibirsk. Mat. Zh. **9** (1968), 1386-1394 (Russian); English transl., Siberian Math. J. **9** (1968), 1039-1045.

[Ro 1] R. T. Rockafellar, Convex Analysis, Princeton University Press. New Jersey, 1970.

[Ro 2] R. T. Rockafellar, *Integrals which are convex functionals.* II, Pacific J. Math. **39** (1971), 439 -469.

[SP] J. Saint-Pierre, *Désintégration d'une mesure non bornée,* Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **11** (1975), 275-286.

[Sa] A. Salvadori, *On the M-convergence for integral functionals on $L^p{}_X$*, Sém. Anal. Convexe **15** (1985), 5. 1-5. 25.

[T] H. Tanaka, *Stochastic differential equations with reflecting boundary conditions in convex regions,* Hiroshima Math. J. **9** (1980), 163-177.

[V 1] M. Valadier, *Comparaison de trois théorèmes de désintégration,* Sém. Anal. Convexe **2** (1972), 10. 1-10. 21.

[V 2] M. Valadier, *Désintégration d'une mesure sur un produit,* C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A **276** (1973), 33-35.

[V 3] M. Valadier, *Une propriété de l'ensemble des sélections à variation bornée d'une multiapplication à rétraction bornée,* Sém. Anal. Convexe **7** (1977), 13. 1-13. 7.

[V 4] M. Valadier, *Approximation lipschitzienne par l'intérieur d'une multifonction sci,* Sém. Anal. Convexe **17** (1987), 11. 1-11. 12.

[V 5] M. Valadier, *Lipschitz approximation of the sweeping (or Moreau) process.,* J. Differential Equations **88** (1990), 248-264.

[V 6] M. Valadier, *Young measures,* Methods of non convex analysis (A. Cellina, ed.), Lecture Notes in Math., vol. 1446, Springer-Verlag, Berlin, 1990, pp. 152-188.

翻訳：**立　石　　寛**
（拓殖大学政経学部専任講師）