

Title	ウィーンの数理経済学とヒルベルト主義
Sub Title	Mathematical economics in Vienne and Hilbert's view of mathematics
Author	武藤, 功
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1993
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.86, No.1 (1993. 4) ,p.70- 99
JaLC DOI	10.14991/001.19930401-0070
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19930401-0070

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

ウィーンの数理経済学とヒルベルト主義

武 藤 功

1. はじめに
2. 経済学史におけるヴァルト
3. ヒルベルト主義と「抽象数学」の黎明
4. ウィーンの中のヒルベルト
5. モルゲンシュテルンにとってのヒルベルト
6. 時代の終り

補論：ヴァルトの論文の数学的構造

- (1)線形計画問題との関連
- (2)数学史の観点から

1. はじめに

1930年代のウィーンでは、経済学史上特筆されるべき論文が公表された。数学者ヴァルト (Abraham Wald, 1902-1950) とフォン・ノイマン (John von Neumann, 1903-1957) の均衡解の存在証明に関する二つの論文が、それである。ヴァルトは、1935年に「ワルラス=カッセル体系」の均衡解の存在証明の論文⁽¹⁾を、フォン・ノイマンは1937年に斉一的均衡成長経路の存在証明の論文⁽²⁾をそれぞれ発表した。

ヴァルトとフォン・ノイマンの論文は共に、雑誌 *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums* に掲載されたものである。この雑誌は、ウィーン大学の数学の教授であったカール・メンガー (Karl Menger) の主宰する数学セミナーの研究成果を報告する目的で刊行された年刊雑誌である。

メンガーの主宰するこのセミナーには、数学基礎論のゲーデル (K.Gödel)、解析学のハーン (H.Hahn)、そして位相幾何学のネーベリング (G.Nöbeling) らが常時参加していた。更に時折ク

注 (1) Wald, A., "Über die eindeutige positive Lösbarkeit der neuen Produktionsgleichungen", *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums* 6,(1935)12-18.

(2) Neumann, J.von., "Über eines Ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzs", *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums* 8. (1937)73-83. English translation by G.Morton, "A Model of General Economic Equilibrium", *Review of Economic Studies* 13,(1945) 1-9.

ナスター (B.Kunaster), ボルスク (K.Borusk), そしてマツルケヴィッチ (S.Mazurkiewicz) らが顔を出していた。

ヴァルトとフォン・ノイマンに始まる均衡解の存在証明そのものは、周知のように1954年のアロー＝ドブリュー (K.J.Arrow & G.Debreu) の決定的業績⁽³⁾へと結実していく問題の出発点であったことは言うまでもない。しかし、彼らの業績の経済学史上の意義は、単にそれに止まるものでもないのである。そこには、数理経済学史の上で、一つの方法論的な革新があったといえる。それは、「公理的」数理経済学の誕生と言ってよいであろう。「公理的」数理経済学とは、経済理論の構築に際して、用いられる公理系を明示し、それに基づいて——そして、そのみに基づいて——論理的整合性をもった理論体系を築き上げる流儀のことを意味する。そして、経済学においてこのような基本的姿勢を明確に打ち出したのは、ヴァルトとフォン・ノイマンとを嚆矢とするのである。

こうした動きは、まさに1930年代のウィーンで始まった。さらに、それはこの時期のウィーンの他では見られない特殊な動きであったといえる。それでは、この時期のウィーンには、このような動きを生じさせるような特殊な要因があったのではないだろうか。このような疑問が自然と浮かんでくる。この点に関しては既に何人かの論者によって考察がなされている。そこでまず、それらの論稿による指摘をここで総括的に整理しておくこととしよう。

(1) 数学の発展との関連

さて今日では、均衡解の存在証明には、凸解析の手法と不動点定理とが用いられるが、それらの数学的手法がまさにこの時期のウィーンでは、生成されつつあった。これが、考慮されるべき第一点目である。例えば、線形不等式論に関する「ミンコフスキー＝ファルカスの定理」を、無限次

注(3) Arrow, K. J. and Debreu, G., "Existence of equilibrium for a competitive economy", *Econometrica* 22,(1954) 265-90.

(4) これらは、以下の文献である。

Arrow, K. J., "von Neumann and the Existence Theorem for General Equilibrium" in Dore et al eds.

Punzo, L.F., "von Neumann and Karl Menger's Mathematical Colloquium" in Dore et al eds. ———, "The School of Mathematical Formalism and the Viennese Circle of Mathematical Economists," *Journal of the History of Economic Thought* 13, Spring(1991) 1-18.

Dore, M., S.Chakravarty and R. Goddwin, *John von Neumann and Modern Economics*, Clarendon Press, Oxford,(1989).

Weintraub, E.R., "On the Existence of a Competitive Equilibrium: 1930-1954", *Journal of Economic Literature* 21,(1983)1-39.

Ingrao, B. and Israel, G., *The Invisible Hands.*, The MIT Pr., Cambridge,(1990).

丸山徹「ヴァルトのウィーン——数学・哲学そして経済学」『創文』4. 320 (1991. 4) 21-24。

さらに、

Menger, K., "Austrian Marginalism and Mathematical Economics" in J.R. Hicks and W. Weber eds., *Carl Menger and the Austrian School of Economics*, Oxford Univ. Press, Oxford, (1973)38-60.

Debreu, G., "The Mathematization of Economic Theory", *The American Economic Review*, Vol. 81. No.1, (1991)1-7.

元のノルム空間に拡張するという仕事は、メンガー・セミナーの一員であるハーンによって成された。無限次元空間においては、凸性と結びついて豊かな結果がもたらされる。この業績は、局所凸空間の一般的定義へと導いていく。

また、ウィーン大学のヘリー (E. Helly) は、1923年に凸集合族の共通部分の存在に関する定理を得、これによって線形不等式論に重要な基礎が与えられた。⁽⁵⁾ 以下で述べるように、「不等式化」の着想に基づく均衡解の存在証明が、メンガー・セミナーのメンバーに関心をひきおこさせたのは、このようなウィーンにおける数学上の動向によるものである。

さらに、ブラウアーの不動点定理に関する仕事が、クナスターやマツルケヴィッチらによって精力的に研究されたのもこの時期である。

均衡解の存在証明には欠かせない、これらの具体的な数学上の道具が生成されつつあった。ヴァルトやフォン・ノイマンが、数学上の新しい息吹にふれる魅力を、経済学の問題にみてとり、それを応用してみたとしても、⁽⁶⁾ なんら不思議なことではない。

(2) ウィーン学団の動向との関係

さらに第二点目として、この時期のウィーンにおける哲学上の動向として、ウィーン学団を見なければならぬ。シュリック (M. Schlick) やカルナップ (R. Carnap) らを中心とする、この学団の中心的主張は以下のように要約できよう。

(i) それはまず、いわゆるカントの「ア・プリオリな総合的判断」の可能性を認めない、という主張である。そして、

注 (5) ヘリーの定理とそれに関することは、次の論文を参照のこと。

Danzer, L., B. Grünbaum and V. Klee, "Helly's Theorem and its Relatives" in *Convexity, Proceedings of symposia in pure mathematics*, vol.7. AMS, (1963)101-180.

(6) これに、関しては次のことが注意されてよい。

まず、ヴァルトもフォン・ノイマンもともに「不等式化の構想」を用いていることである。

さらに、フォン・ノイマンは1937年の論文で、ブラウアーの不動点定理から角谷の不動点定理を事実上導き出していることである。ヴァルトは1935年の論文では、不動点定理を用いることはなかったが、*Ergebnisse* 8巻に予告された論文——実際は延期されて9巻に掲載される予定であった——ではそれを用いていた可能性が大きい。というのは、ヴァルトによればその論文では純粋交換経済の均衡解の存在証明がなされる予定だったからである。ヴァルトは繰り返しその証明には現代数学の方法が必要であると述べている。Uzawa(1962)の結果を考慮すれば、それはおそらく不動点定理であると推測されよう。しかしその論文は、ヴァルトがアメリカに渡るときに紛失されてしまい、missing paper となってしまった。この事情はArrow (1989)の論文に詳しく述べられている。

Wald, A., "Über einige Gleichungssysteme der mathematischen Ökonomie", *Zeitschrift für Nationalökonomie* 7.(1936)637-70. English translation by Otto Eckstein, "On some Systems of Equations of Mathematical Economics," *Econometrica* 19, (1951) 368-403.

Uzawa, H., "Walras's Existence Theorem and Brouwer's Fixed-Point Theorem," *Economic Studies Quarterly* 13, (1962)59-62.

Kakutani, S., "A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem", *Duke Mathematical Journal* 8, (1941)457-459.

(ii)哲学固有の役割として、命題の構文論的分析を重視する、ということである。

メンガーやハーン、そしてゲーデルを中心とする何人かのメンガー・セミナーの数学者は、このウィーン学団のセミナーにも参加していた。たまたま父親が著名な経済学者であり、経済学の素養をも持ち合わせていたメンガーは、経験科学としての経済学の命題が、論理的分析に耐えうるものでなければならないこと、そのために経済学の形式的な構造の吟味へと眼を向けることを学んだのであろう。

(3) ヒルベルト主義の影響

そして第三点目として、ヒルベルト (D.Hilbert) の数学基礎論上の立場の影響があげられる。それは、数学的概念の「存在」が、公理系の無矛盾性と同等とみなされるといふものである。これによれば、数学的理論の展開に先行して、まずその体系の厳格な公理化・形式化を行い、その公理系の無矛盾性を証明するという手続きが踏まれなければならない。このヒルベルト主義の精神が、ウィーンの数学者にも浸透していった、と考えられよう。

そして、このヒルベルト主義はウィーン学団の哲学と容易に結びついていく。実際、カントの「ア・プリオリな総合的判断」の可能性を否定する際には、ヒルベルトの『幾何学の基礎』⁽⁷⁾が引き合いに出された。それは、カントが「ア・プリオリな総合的判断」の例として挙げた幾何学は、ヒルベルトの『幾何学の基礎』における本質的貢献を考えれば、数学的幾何学と物理的幾何学との混同による誤りだからである。

このようにして、数学、哲学上の動向が、経済学に結び付けられることになった、といふものである。以上のように、数学・哲学・経済学の発展と、それに関心をもつ共通の人物が、この時期のウィーンには揃っていたこと、このことがウィーンの「公理論的」数理経済学を産み出した要因であると一応は考えられよう。

さて本稿では、標題にもみられるように、これらの要因の中から、とりわけ「公理論的」数理経済学とヒルベルト主義との関連についての考察を進めていく。その際の問題の焦点をより明確にするため、まずはヴァルトの論文の革新的意義を明確にし、併せてその経済学史上の位置づけを検討する。これが第2節である。そこでは、ヴァルトの論文とヒルベルトとの相関関係が確認される。そして第3節では、ヒルベルト主義の実体を正確に規定する。そして、なぜとりわけヒルベルトが重要なのかということを見るために、それと同時代の数学全般の動向とを比較してみる。ヒルベルト主義の数学的概念の「存在」に関するいわば哲学的な側面の重要性が浮き彫りにされるであろう。そして第4節では、ウィーンにおけるそうしたヒルベルト主義の受容のされ方をみることにな

注(7) Hilbert.D., *Grundlagen der Geometrie* 初版 Teubner, Leipzig.(1889). 第7版 (1930) Teubner, Leipzig-Berlin. (邦訳) 寺阪英孝・大西正男訳『幾何学の基礎』(現代数学の系譜7) 共立出版 (1970)。

る。最後に、経済学者モルゲンシュテルン (O. Morgenstern) に焦点を当て、ウィーンの学問上の動向との関係を述べることにする。

2. 経済学史におけるヴァルト

ヴァルトの論文における問題の出発点は、いわゆる「ワルラス=カッセル体系」である。この体系が考える経済は、所与とされる本源的生産要素を用いて、最終生産物を生産している経済である。その最終生産物を生産する技術的条件は生産係数で示され、これは固定的とみなされる。すると、この体系は次の方程式群で構成されることになる。すなわち、

(1)生産要素の需要と供給の均等を示す方程式

そして、完全競争下で成立する、

(2)価格と平均費用の均等を示す方程式

これらに、さらに

(3)需要函数

を加えたものである。

この体系に対しては、方程式の本数と未知数の個数とが一致しているので、均衡解の存在が保証されていると考えられてきた。しかし、この体系の解の存在、ましてや経済学的に意味のある非負解の存在をめぐる⁽⁸⁾は、何人かの経済学者によって疑念が表明されてきた。

メンガーのセミナーでも、この「ワルラス=カッセル体系」が議論に取り上げられた。その議論の焦点は、この体系の整合性に絞られていた。すなわち、この体系には経済学的に意味のある解が存在するか否か、という一点にのみ議論は集中していたのである。口火を切ったのは、経済学者シュレジンガー (K. Schlesinger) である。シュレジンガーは、この体系の均衡解の存在に疑念を抱くようになり、この困難を脱却する解決法として、いわゆる「不等式化の構想」を提唱する⁽⁹⁾。このようにして彼は、この体系に均衡解が存在することを証明しようとするのであるが、厳密な証明はヴァルトの手に委ねられた。

注 (8) 「ワルラス=カッセル体系」の批判としては、次のものを参照のこと。

柴田 敬「カッセル氏の『価格形成の機構』の吟味」『経済論叢』第30巻第6号 (1930)。

福岡正夫「柴田博士のカッセル批判をめぐる」(1974)『均衡理論の研究』創文社 (1985) 所収。

Neisser, H., "Lohnhöhe und Beschäftigungsrad in Marktgleichgewicht", *Weltwirtschaftliches Archiv* 36, (1932)415-55.

Stackelberg, H. von., "Zwei Kritische Bemerkungen zur Preistheorie Gustav Cassels," *Zeitschrift für Nationalökonomie* 4, (1933) 456-72.

Zeuten, F.L.B., "Das Prinzip der Knappheit, technische Kombination und ökonomische Qualität", *Zeitschrift für Nationalökonomie* 4, (1932-3)1-24.

(9) Schlesinger, K., "Über die Produktionsgleichungen der ökonomischen Weltlehre", *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums* 6, (1935)10-11.

メンガー・セミナーにおける議論の詳細については Menger (1973) で詳しく扱われている。

そして、ヴァルトはシュレジンガーによって提案された体系に、必要な仮定を洗い出し、その下で、均衡解の存在証明を完遂した。

それでは、このヴァルトの論文の経済学史における意義を正確に評価してみることにしよう。

[I] 存在問題

まずそれは、存在問題の必要性とその重要性とを明確に意識し、それを解決したということである。考察している体系に関する研究が、まったく無意味なものとならないためには、まずその体系で考えられている数学的概念の「存在」が確保されていなければならない。そしてそれは従来考えられてきたように、方程式の本数と未知数の個数とが一致することによっては必ずしも保証されていない。これらのことを明確にし、「ワルラス＝カッセル体系」に関してはその問題を解決した、ということである。

[II] 経済学の公理化 (axiomatization)

さらに、経済学への公理化の方法の適用が挙げられる。そしてこれは、存在問題を解決するための前提条件でもある。考察している概念の「存在」を確保するためには、まず厳格に公理化・形式化を行い、その整合性によって初めてその概念の「存在」が保証されたと考えられるからである。

これらの視点は、ヴァルトによって初めて経済学に導入された。このことによって数理経済学の歴史において、ヴァルトを分水嶺とする質的な差異がもたらされることになった。

もちろん広い意味での数理経済学は、ヴァルト以前にも存在している。クールノー (A. Cournot) やワルラス (L. Walras), あるいはジェヴォンズ (W.S. Jevons) といった人々の業績があることは周知のことである。⁽¹⁰⁾

クールノーにも、それ以前の経済学者と比較してみた場合に、その数理的思考という点では飛躍的な前進がある。クールノー以前の経済学者における数理的思考とは、高々議論の筋道を明確にするために数値例を持ち出す、といった程度のものに止まっていた。それに対してクールノーは、

(1) 経済学上の概念を、数学の言葉に翻訳して語る、ということを経済学に初めて導入した。

(2) さらに、それに数学的演繹を用いて直感的には必ずしも自明ではない結論を導きだした。

換言すれば、クールノーは数学を援用しなければ得られない結論を、数学を適用することによって初めて得ることに成功したといえる。そして、これらの点にクールノーの革新性が認められる。ワ

注 (10) Cournot, A., *Recherches sur les Principes Mathématique de la Théorie des Richesses*, Paris, Hachette, (1838). (邦訳) 中山伊知郎訳『富の理論の数学的原理に関する研究』岩波書店 (1936)。

Walras, L., *Element d'économie politique pure*, Lausanne Rouge, (1874-77). (邦訳) 久武雅夫訳『純粋経済学要論』岩波書店 (1983)。

Jevons, W.S., *Theory of Political Economy*, London, Macmillan, (1871). (邦訳) 小泉信三他訳『経済学の理論』日本経済評論社 (1979)。

ルラスもジェヴォンズも、こうした学統の上に立っている。

また、クールノーは以上のことをなしつつ、

(3)経済学をラプラス (P.S.Laplace) = ラグランジュ (J.L.Lagrange) の解析力学の伝統の中に引き込んできた、

といえる。

これらの経済学者と比較したとき、さらにヴァルトにはその数理的思考という点で革新的な進歩がみられる。すなわちヴァルトは、ワルラスの連立方程式体系のような、より複雑に表現された数学的体系を問題とするにあたって、まずその体系の整合性に眼を向けたのである。これを明らかにするために先行してなされなければならない手続きが、公理化だった。クールノーをはじめワルラスやジェヴォンズにも、こうした発想はなかった。⁽¹¹⁾

以上の [I] と [II] については、まさにヴァルトをもって嚆矢とするのであり、このことはどのように強調するにしても、強調しすぎることはないであろう。

しかし、それにもまして次のことも重要であると考ええる。

[III] 日常的意味・解釈からの解放

それはヴァルトの論文を契機として、経済学の扱い方に一つの転換が訪れたということである。すなわちそれは、経済学の問題を、日常的な解釈あるいは経験的な意味内容から少なくとも論理的には解放したということである。言ってみれば、それは数学者にも理解できるように、純粋に論理的な言葉で語られるようになった、ということであろう。そしてこのことも、ヴァルトによって初めてなされたのである。

ヴァルトによって確立されたこの方向は、例えば数理経済学における一つの里程碑である、ドブリューの『価値の理論』の序文では次のように述べられている。

「事を厳密に運ぶためには、どうしても分析を公理的に行わざるを得ない。そこでは厳密な意味における理論は、その解釈から論理的に完全に切り離されている。」⁽¹²⁾と。

注 (11) クールノーとヴァルトを比較してみた場合、数学的な処理の厳密性に関しても格段の差があるといえる。クールノーは次のように述べている。

「われわれは需要あるいは販売の法則を表す函数 $F(p)$ をもって連続函数なりと仮定する。すなわちそれは突然にある値より他の値に移ることなく一切の中間的値をとって変動する函数である。……いま函数 $F(p)$ をもって連続なりとすれば、それはこの種の函数すべてに共通なる特質を有する。数学解析の幾多の応用はこの性質の上に築かれているのである。すなわち価格の変動が原価格の微小部分なる限り、需要量の変動は明白に価格の変動に比例する。」A.Cournot, *ibid.* 邦訳書79-80ページ。

ここから明らかなように、クールノーにおいては、函数の連続性と微分可能性との区別がなされていない。これらの点の厳密な取り扱い、コーシー (A.L.Cauchy) やアーベル (N.H. Abel) らの手を経ることによってなされるのである。

(12) Debreu, G., *Theory of Value*, New York. John Wiley (1959). (邦訳) 丸山徹訳『価値の理論』東洋経済新報社, (1977)。

(13) Debreu, G., *ibid.* 同邦訳書 vii ページ。

この意味で、ヴァルトの論文を契機として経済学の一つの方法論上の革新があったといえるのである。考える問題のこうした性格こそが、メンガーの数学セミナーで、この種の問題が積極的に取り上げられ、数学者達もその議論に関心をもち、討論にも参加することを可能にしたのである。すでにメンガー自身も、均衡解の存在証明に関しては、十分な思索を重ねていた。そして、ヴァルトの報告に際しては、その意義を認める発言をしている。また、ゲーデルもヴァルトの論文に対して、的確なコメントをしていることが、*Ergebnisse* には記録されている。これらのことは、今述べた問題の扱い方の「転換」を物語る一つの傍証となるであろう。

[IV] 凸解析の発展の機動力

最後に、ヴァルトの論文における数学的構造の実体について触れておかねばならない。この時期のウィーンでは、凸解析の分野が生成・発展を遂げつつあった。ヴァルトの証明を詳細にみると、そこには凸解析の手法が明示的には用いられていないことが分かる。

しかし筆者は既に、ヴァルトの証明の数学的な「深さ」を測るという観点から次のことを明らかにした。⁽¹⁴⁾それは、ヴァルトの証明と線形計画問題における双対性定理との関連およびミンコフスキー＝ファルカスの補題との関連である。双対性定理の証明は、通常ミンコフスキー＝ファルカスの補題を用いてなされる。ヴァルトは、このミンコフスキー＝ファルカスの補題から双対性定理を導き、そこから均衡解の存在を証明するという連鎖そのものを使わずに、単に表面的なところで問題を処理しているように見える。しかし実際は、ヴァルトの証明法に則り、あるいはそれを若干手直しすることによって、これらの問題はすべて導かれてしまうことが分かるのである。これらの凸解析には欠かせない重要な定理が、事実上ヴァルトによって解かれてしまっているといえる。あるいは、あと一步のところまで事実上達していたのである。1950年代にアメリカを中心として発展する凸解析の萌芽をヴァルトの論文の中にみてとることができる。⁽¹⁵⁾

以上がヴァルトの論文の経済学史上の評価と考えられる。「存在問題」そのための「公理化・形式化」そして「日常的な意味・解釈からの解放」といったようにヴァルトの論文の評価を定めてみると、その論文が産み出された背景には、ヒルベルト主義の影響があるのではないかと問うてみるのは極めて自然なことであろう。実際、数学的理論の展開に先行して存在問題が解決されねばならないということと、そのための理論の厳格な公理化・形式化ということは、まさにヒルベルトの意識そのものである。ヴァルトの論文を見るとき、ヒルベルト主義の重要性は自ずと浮き彫りにされてくると思われる。

これまでの論文においても、ヒルベルト主義の影響についての指摘はあるが、尚以下の理由でそ

注 (14) 1991年度理論・計量経済学会報告「A・ヴァルトによる均衡点の存在証明をめぐる一ウィーン数理経済学史のひとこま一」

(15) この点についての詳しい議論は、「補論」を参照されたい。

これらの指摘は不十分であるとする。

それはまず、それらの論者の中には「ヒルベルト主義」という名のもとに語ろうとしている具体的な内容を必ずしも正確に理解していないということが、挙げられる⁽¹⁶⁾。これらの論者の一部は、単に経済学の公理化の動きそのものをもって、ヒルベルト主義の影響とみなしている。しかし、ヒルベルト主義の本質的な点は、決して単なる公理化の動きそのものではないはずである。むしろ数学的実在（＝数学的概念の存在）として何を認めるか、という点にこそその本質がある。ヒルベルトの立場からは、公理系の無矛盾性が、その数学的概念の存在と同義とみなされる。ヒルベルトにとっては、公理系の無矛盾性を証明するための前提として、数学が体系化、形式化されねばならないのである。公理化は、無矛盾性の証明の前提でしかない。したがって、この公理化の動きそのものをもって、ヒルベルト主義の影響と断定することは、物事の一面しか見ていないことになるだろう。

そこでまず、「ヒルベルト主義」の内容を明確に規定する。そして、その上でヒルベルト主義がいかなる経路を辿ってウィーンの数学者に浸透していったのか、という点を論じる。

3. ヒルベルト主義と「抽象数学」の黎明

そこでまず、ヒルベルト主義の実体を正確に見極めることから始めることにしたい。ヒルベルトは公理的方法に対し、深い洞察力をもって新しい一つの原理を打ち建てた。それは数学的概念の「存在」をどの範囲まで許容するか、という点に関係するものである。

ブルバキ (N. Bourbaki) によればそれは、

「伝統的論理学においては、ある概念が無矛盾であるとはその概念を《可能》ならしめるだけのことであったのが、ヒルベルトにとって、その無矛盾性とは（少なくとも公理論的に定義された数学的概念に対しては、）その概念の存在性と同等の価値をもつ⁽¹⁷⁾」
という原理である。

この意味するところを明らかにしておこう。ヒルベルトは、彼の定式化した公理系が、ある論理的要請を満たさなければならないとした。それは、完全性と独立性、そして無矛盾性である。ヒルベルトのこの部分において、最も重要であるのは、最後の要請である公理系の無矛盾性の証明の試みである。公理系の無矛盾性の証明とは、この公理系に基づく推論が自己矛盾に陥ることがないこと、これを示すことである。そして実際、ヒルベルトは1899年の『幾何学の基礎』においてユークリッド幾何学の無矛盾性を明らかにしている。それは、実数体あるいはその部分体を取り、その上でユークリッド幾何学の「解釈」を作ることによってである。これにより、ユークリッド幾何学の

注 (16) 例えば, Ingrao, B. & G. Israel. (1990) あるいは Punzo (1989) (1991) においては公理化の動きそのものをヒルベルトの影響とみなしている。

(17) Bourbaki, N., *Elément d'histoire des Mathématiques*, Hermann, Paris, (1969). (邦訳) 村田全他訳『ブルバキ数学史』東京図書 (1970), 邦訳書57ページ。

無矛盾性の問題は、算術の無矛盾性の問題に還元されることとなった。

そしてヒルベルトは、1900年のパリで開催された第2回国際数学会議における「数学の問題」⁽¹⁸⁾と称する講演では、第2番目の問題に、この算術の理論の無矛盾性の証明を掲げた。この講演では同時に、ヒルベルトの数学的実在に関する見解が明確に表明されているので、それを引用しておく。

「もしもある概念から相矛盾する命題がみちびかれるならば、私はそのような概念は数学的には実在しないということにする……われわれが問題としている、算術の理論における実数の公理系に関していえば、そのような公理系の無矛盾性が証明されれば、それは同時に完全な系としての実数、あるいは連続体の数学的実在の証明がえられることをも意味する。実際、このような公理系の無矛盾性の証明が完全になされれば、完全な系としての実数の実在に関して、時折なげかけられた疑いは、まったく根拠をもたないものとされることになる。⁽¹⁹⁾」

ここから、ヒルベルト自身の言葉でもって、公理系の無矛盾性の証明が数学的概念の存在証明と同義であることが分かる。

現代的なコンテキストの中に移し換えてヒルベルトの立場を理解しようとすれば、それはブラウアー (L.E.J.Brouwer) に代表される直観主義の立場と、ヒルベルトの立場とを対比して理解するのがよいだろう。ブラウアーにとって数学的概念の存在は、それを有限回のステップによって構成しうるとき、そのときに限り確保されたということの意味する。ブラウアーにとっては、数学的対象が存在するということは、少なくとも原理的にそのようなものを見出す方法、あるいは構成する方法が示されることを意味している。ヒルベルトは、それを必要としない。

また、ヒルベルトの立場との決定的な対立点は、直観主義が無限集合に対して排中律を用いることを是認しないということである。これによって、実数、函数などの概念、あるいはそれに関する古典的定理の大部分が数学の世界から失われることになる。

今後はヒルベルト主義を、数学的概念の存在と公理系の無矛盾性と同義であるという立場として理解していく。以上見てきたように、数学的実在に関するヒルベルトの立場は、この時期においては決して確固とした唯一の立場ではありえなかった、ということを確認しておく。

こうした上で、ヒルベルト主義がウィーンの数理経済学に与えた影響を具体的に考察していくことにする。

その前に、このヒルベルト主義のこの時代における影響を考えるためには、この時代の数学者達の数学上の学問理念、いわば「時代精神」なるものを明確にしておくのがよいだろう。このことによって、数学の公理化・形式化の動きは決してウィーンに特有のものではなかったことが明らかになる。さらにこのことは、ウィーンにおいてヒルベルトが独特な受容のされ方をした可能性を示唆

注 (18) Hilbert, D., "Mathematische Probleme". *Archiv für Math. und Phys.* 3-1, (1901)44-63. (邦訳) 一松 信訳『数学の問題』(現代数学の系譜4) 共立出版 (1969)。

(19) Hilbert, D., *ibid.* 同邦訳書13-14ページ。

することになるであろう。

さて、20世紀初頭からの数学上の学問理念は簡潔に表現すれば、「抽象数学」の生成ということになる。これは函数解析学をはじめ、代数学などの数学全般における動向でもあった。⁽²⁰⁾ここでは函数解析学を例にとり、それを簡単にみておこう。

「抽象数学」の一つの源は、フレッシェ (M. Fréchet) に発するものである。フレッシェは1906年に「函数解析のいくつかの問題点について」と題する学位論文を公表し、1910年には論文「抽象集合と函数解析」⁽²²⁾を発表した。

フレッシェは、1906年の学位論文において、函数解析の目標を次のように述べている。

「われわれは勝手な素性の元 (数, 曲線, 点など) からなる集合 E を考え、 E の各元 A にある決まった数値 $U(A)$ が対応するとき、 E において函数作用 (opération fonctionnelle) U が定義されたということにする。これらの作用の諸性質を研究するのが函数解析の目標である。⁽²³⁾」と。

フレッシェは、解析学上の古典的諸結果が関係している問題の根底にある原理を引き出すため、対象そのものの性質を特定せず、ある条件を満たしている任意の集合を一挙に考察する。

函数解析の発展は、積分方程式論の研究によって強力に促された。19世紀に支配的だった積分方程式の解法は、有限次元における線形方程式の類推にもとづくものであった。そこに現れる作用素の概念から自然と導かれて、汎函数やより一般的な作用素の概念が明確に取り出されてくる。問題の根底にある考え方は、次第に方程式の概念から汎函数のそれへと移行していく。数学的对象に対するこうしたアプローチは、古典解析のそれとは実質的に異なっている。函数解析学では函数を函数空間の元とみなし、そこでは代数的構造と位相的構造とがともに考慮される。問題は自然とその枠組みの中に位置づけられて考察されるようになった。

ヒルベルトも、対称核をもつ積分方程式論の研究から、その固有値とそれに属する固有函数の決定問題を有限二次形式の直接の一般化によって解決した。そして引き続いて実数列で、 $\sum x_n^2 < \infty$ を満たすものを考えた。⁽²⁴⁾これは、今日「ヒルベルト空間」と呼ばれるものの一例を成している。ヒ

注 (20) これについては、例えば Bourbaki (1969) 邦訳書88-145ページを参照のこと。

(21) Fréchet, M., "Sur quelques points du calcul fonctionnel", *Rendiconti del Circolo di Palermo*, t. XXII (1906) 1-74. (邦訳) 斎藤正彦他訳『フレッシェ抽象空間論』共立出版 (1987)。

(22) Fréchet, M., "Les ensembles abstraits et le calcul fonctionnel", *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, tom XXX, (1910) 1-26. 前掲邦訳書所収。

(23) Fréchet, M. (1906) 邦訳書7ページ。

(24) Hilbert, D., *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Linearen Integralgleichungen*, Teubner, Leipzig-Berlin, (1924). 尚, ヒルベルトの人と業績については, Weyl, H., "David Hilbert and his mathematical work", *Bull. Amer. Math. Soc.* 50. (1944) 612-654, Reid, C., *Hilbert*, Springer-Verlag Berlin, Heiderberg (1970). (邦訳) 彌永健一訳『ヒルベルト』岩波書店 (1972) を参考にした。

(25) Neumann, J. von., "Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren", *Math. Ann.* 102, (1930). 49-131.

(26) Neumann, J. von., *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, (1932). (邦訳) 井上健他訳『量子力学の数学的基礎』みすず書房 (1954)。

ルベルト空間の拡充とその公理論的呈示は、フォン・ノイマンによって1930年の論文⁽²⁵⁾と1932年の『量子力学の数学的基礎』⁽²⁶⁾とにおいて成され、完成の域に達した。

さらに1922年には、ポーランドの数学者バナッハ (S. Banach) によって、今日「バナッハ空間」と呼ばれている空間の公理が呈示されている⁽²⁷⁾。

このような一連の動向は、すべて「抽象数学」の系譜の中に位置づけることができる。こうした「抽象化」への道は、公理的方法を推し進めていくということが注意されなければならない。

「この認識の進展は最終的に、対象の集まりにおいて、あらかじめ《公理》として置かれる少数の性質と関係とから導かれるもの以外はすべて体系的に無視するに至る⁽²⁸⁾」のである。

こうした「抽象数学」の動向と、そこから至る公理化・形式化の方法は、いわば「時代精神」であった。パリヤゲッテンゲンばかりではなく、世界中の数学者達がそのような動向に巻き込まれていった。もちろん、ウィーンの数学者達もその例外ではありえなかった。したがって、単なる公理化の動きは特殊ウィーンの状況ではなかったのであり、そうした動きだけからでは、「公理論的」数理経済学の誕生という1930年代のウィーンに特有な現象を説明したことにはならない。パリヤゲッテンゲンからは、そうした現象は生じなかった。

そこで、この時期のウィーンには、ヒルベルトがある特異な形で入り込んできた、という可能性を検討する必要に迫られることになる。

それはヒルベルトが、単に数学的な側面だけではなく、数学的概念の存在をどこまで許容するかという問題に関する、いわば哲学的な側面をももっていたということである。そして実はこのヒルベルトの哲学的な側面が、ウィーンにおけるヒルベルトの受容という問題にとっては重要である。そのことを明らかにするために、ウィーンにおいてヒルベルトが受容されていく具体的なルートを解明しておこう。

4. ウィーンの中のヒルベルト

ヒルベルトの受容のされ方には、二つのルートが考えられる。一つは、数学者としてのヒルベルトを受容していくルートであり、もう一つはヒルベルトの哲学的な側面を受容していくルートである。本節では、これらのルートについてそれぞれどのようにヒルベルトが受容されていったか、をまず明らかにしよう。

ヒルベルトは数学上の問題として、不変式論、積分方程式論などの分野で貢献し、また「数学の問題」と称する講演では20世紀に解かれるべき数学の問題として23の問題を提示した。これらは、

注 (27) Banach, S., “Sur les opérations dans les ensemble abstraits et leurs application aux équations intégrales”, *Fund. Math.* III, (1922)133-181.

(28) Dieudonné, J., *Abrégé d'histoire des Mathématique*, Hermann, Paris, (1978). (邦訳) 金子晃他訳『デュドネ数学史』岩波書店 (1985) 邦訳書15ページ。

数学者達に大きな影響を与えた。しかし、*Ergebnisse* を見る限りでは『幾何学の基礎』を除き、ウィーンの数学者達がヒルベルトに触発されて、これらの具体的な問題に取り組んだという形跡は希薄である。したがって、以下ではヒルベルトの影響を『幾何学の基礎』に焦点を当てて見ていくことにする。

具体的にはヒルベルトの『幾何学の基礎』が、ウィーンでどのように受容されていったのか、このことを明らかにしよう。

まず、数学者の世界に眼を向けてみる。ヒルベルトが『幾何学の基礎』を著したその前後では、幾何学の研究が客観的にどのように変わったか、ということのみておく。ヒルベルトの『幾何学の基礎』が数学者の世界に与えた影響は、特殊ウィーン的なものではなかった。むしろ、当時の幾何学研究の中心地であったゲッチンゲンにおいての方が、その影響は大きかったといえる。

ゲッチンゲン大学は、19世紀になってから、数学と物理学とで、輝かしい業績を挙げた。それを知るには、ガウス (F.Gauss), リーマン (B.Riemann), ディリクレ (L.Dirichlet), あるいはクライン (F.Klein) といった人物の名を挙げれば十分であろう。さしあたりの関心からは、1895年にヒルベルトがクラインに招かれてゲッチンゲン大学に着任していること、そして『幾何学の基礎』を著したのもこの地であることを述べておけばよい。

このゲッチンゲンを中心とする幾何学の研究が発表されたのは、第一級の数学の専門雑誌である、*Mathematische Annalen* であった。まず、この雑誌に掲載された論文によって、ヒルベルトの『幾何学の基礎』の公刊の前後で、どのような変化が見られるか、を確認しておこう。もちろん、その全景を見渡すことは不可能なので、代表的なものを取り上げてみることにする。⁽²⁹⁾

『幾何学の基礎』以前の、幾何学研究の特徴は次のようである。中心テーマは、射影的方法による幾何学であり、中心人物は、クラインである。1871年と1873年にクラインは、*Mathematische Annalen* 誌上に論文「いわゆる非ユークリッド幾何学について」の第一報と第二報をそれぞれ公表している。それは、ケーリー (A.Cayley) の計量にもとづいて、非ユークリッド幾何学の「モデル」をユークリッドの世界の中につくったものである。これによって、非ユークリッド幾何学の無矛盾性は、ユークリッド幾何学の無矛盾性と同等のものとなった。⁽³¹⁾

これらのクラインの論文において貫かれている基本的な幾何学思想は、1872年の有名な「エルラ

注 (29) この時代の幾何学については、次の文献も参考にした。

L. Boi, D. Flament & J.-M. Salanakis(eds.), *1830-1930 : A Century of Geometry*, Springer-Verlag, (1992).

(30) Klein, F., "Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie", *Math. Ann.* IV, (1871) 573-625., "Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie", *Math. Ann.* IV, (1873) 112-145.

(31) 非ユークリッド幾何学については、次の文献が基本的に重要である。

R.Bonola., *Non-Euclidean Geometry*. (1911) reprint Dover.

(32) Klein, F., *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*, *Deichert, Erlangen*, (1872). (邦訳) 寺阪英孝他訳『エルランゲン・プログラム』(現代数学の系譜7) 共立出版 (1970)。

ンゲン・プログラム⁽³²⁾という講演において表明されている。そこでは、幾何学は変換群によって不変な量を扱うものという宣言がなされる。そして、いわゆる複比(非調和比)は、これに相当するものであり、これにもとづいて距離や角度を定義し、非ユークリッド幾何学の基礎づけを行った。

また、ケーリー自身もクラインのこの論文に触発されて、その解説論文を書いている。これが、『幾何学の基礎』以前の、基本的な特徴である。

それでは、『幾何学の基礎』の公刊後、*Mathematische Annalen*に掲載された論文には顕著な変化が見られるであろうか。それは、内容の点で明らかに変わったといえる。つまり、ヒルベルトの『幾何学の基礎』そのものを研究対象とする論文が増えた、ということである。これは、ヒルベルトの『幾何学の基礎』が数学者に注目されていたことを物語るものである。デーネ(M. Dehn)、シュール(F. Schur)、ローゼンタール(A. Rosenthal)らをはじめとして、多くの論文が、それに対して書かれるようになった。⁽³³⁾

ヒルベルト自身も、「ボヤイ=ロバチェフスキー幾何学の新しい基礎づけ⁽³⁵⁾」という論文を発表している。そこでは、平行線の公理をボヤイ=ロバチェフスキー幾何学において該当するものに置き換え、さらに連続の公理を除いた公理群によって、その基礎づけを行った。

ウィーンに眼を転じてみよう。ウィーンでは、ほかならぬヴァルト自身が、ヒルベルトの『幾何学の基礎』を研究し、その中の公理のあるものは、より弱い公理に置き換えられることを示した。^{(36) (37)}そしてまた、ヴァルトが行った証明の一つは、『幾何学の基礎』の第7版からヒルベルトによって取り入れられている。

では次に、哲学者がどのようにヒルベルト主義を受容していったか、を問題としよう。

1930年代のウィーンでは、哲学上の経験論に革新をもたらす出発点となる母胎が誕生した。ウィ

注 (33) Cayley, A., "On the Non-Euklidian Geometry", *Math. Ann.* V, (1872)630-634.

(34) 例えば,

Dehn, M., "Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck", *Math. Ann.* Bd. 53, (1900) 404-439.

———, "Über den Inhalt der sphärischen Dreiecke", *Math. Ann.* Bd.60, (1905)166-174.

Schur, F. "Über die Grundlagen der Geometrie", *Math. Ann.* Bd. 55, (1902) 265-292.

Rosenthal, A., "Über d.dritte Hilbertsche Axiom d.Verknüpfung", *Math. Ann.* Bd.69, (1910) 223-226.

———, "Vereinfachungen des Hilbertschen Systems der Kongruenzaxiome", *Math. Ann.* Bd.71, (1912) 257-274.

(35) Hilbert, D., "Neue Begründung der Bolyai-Lobatschewskischen Geometrie", *Math. Ann.* Bd.57, (1903) 137-150.

(36) Wald, A., "Über das Hilbertsche Axiomensystem der Geometrie", *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums.* 3, (1931)23-24.

(37) ヴァルトの初期の数学研究については,

Menger, K., "The Formative Years of Abraham Wald and his Work in Geometry", *The Annals of Math. Statistics.* Vol.23. No.1. March,(1952) 14-20.が参考になる。

ーン学団がそれである。ウィーン学団は、ウィーン大学のシュリック教授の周辺に集まった哲学者集団である。30年代に、指導的役割を果たした人物は、カルナップ、ノイラート (O.Neurath)、そしてハーンやゲーデルらであり、そのメンバーは物理学をはじめとするさまざまな問題領域からの出身者によって構成されていた。

さて、ウィーン学団は、カントの「ア・プリオリな総合的判断」の可能性を否定する際には、ヒルベルトの『幾何学の基礎』を引き合いにだした。彼らにとって、ヒルベルトの『幾何学の基礎』における本質的貢献あるいは非ユークリッド幾何学の発見は、重要な論題でもあった。それは、物理学の依拠する時空論の一方の空間の構造の分析に関わってくるからである。

非ユークリッド幾何学の発見によって、カントの認識論およびその根拠にある空間論は、根本的に揺さぶられることになった。空間がどのような幾何学的構造であるか、またはどのような空間を考えるかという問いは、アインシュタイン (A.Einstein) の相対性理論の創造を契機として、緊急の課題となったのである。それはユークリッド幾何学と非ユークリッド幾何学を、いかに相対化するかという問題である。

ところで、ウィーン学団の議論では、この問題に対しては完全な同意が得られていたようである。⁽³⁸⁾それは、数学的幾何学と物理的幾何学の区別を強調するものである。言い換えれば、数学的幾何学は数学の一部であり、それは経験的世界については何も語っていない。そして、物理的幾何学は物理学の一部であり、その妥当性は経験科学の問題である、との認識である。空間がどのような幾何学的構造であるかと問うことは、経験的な問題となるのである。この二つの幾何学の区別は、とりわけヒルベルトの『幾何学の基礎』によって明確にされたといえる。なぜならヒルベルトによって、ユークリッド幾何学も非ユークリッド幾何学も、無矛盾な公理系の下では、その存在を許容される数学的对象として相対化されることになったからである。それは経験的な世界における意味や解釈からは、完全に解き放たれたのである。

ここに、ウィーン学団が『幾何学の基礎』を援用する理由があるのである。そしてこれは、カントの「ア・プリオリな総合的判断」を否定することにもつながっていく。

しかしながら、数学全般の基礎づけをめぐることは、同意に達していたわけではない。しかも、その当初からヒルベルト主義が受け入れられていたわけではない。彼らは、ヒルベルトの形式化の方法そのものには共感を示していたが、例えばカルナップは、フレーゲ (G.Frege) やラッセル (B.Russel) の論理主義の立場に立っていたと回顧している。⁽³⁹⁾

われわれが、ウィーン学団の立場とヒルベルトの立場とが接近していくのを見いだせるのは、ウィーン学団における構文論をめぐる議論とその形成の中にある。ウィーン学団は、言語について語ることに、とりわけ言語表現の構造について語ることに可能であると考えた。この議論の過程から

注 (38) Carnap, R., "Autobiography" p.49. in Schlipp (ed), *The Philosophy of Rudolf Carnap*. Open Court, (1963).

(39) Carnap, R., *ibid.* p.46-50.

1930年には、構文論の構想が浮かび上がってきた。哲学固有の役割を、命題の論理的分析にあるとするウィーン学団にとって、構文論は本質的な重要性をもっている。これに本質的な貢献をしたのは、カルナップである。彼は、構文論を構築していくにあたって、ヒルベルトの超数学を研究している。そしてカルナップは、ヒルベルトが「数学体系の無矛盾性を証明するという特定の目的だけのために超数学を意図したのに対し、私の目的は言語形式の一般的理論である⁽⁴⁰⁾」と述べている。またカルナップは、ゲーデルとの議論を重ねていく。構文論は、表現に現れる記号及び記号列そのものが考察の対象となり、その指示する意味は完全に切り離されるのである。

それでは、経験的な意味内容から切り離された形式的体系における「存在」は、どのように考えられたのであろうか。それは、その形式的体系における内部の問題になるのであるが、この点については、カルナップがアメリカに渡ってから後に、明確に述べているので、それを引用しておくことにする。そこには、ウィーン学団が、より深いところでヒルベルト主義と結びついている様子が見てとれるのである。それはウィーン学団が、数学的実在に関するヒルベルトの見解を受容しているという事実である。ヒルベルトは、公理系においてその無矛盾性が証明されれば、それは同時に数学的実在としての証明がなされたものとする。この数学的実在に関するヒルベルト主義は、カルナップにおいては、「存在者」として受容されていく。ヒルベルトの『幾何学の基礎』に関して言えば、「点」、「直線」、「平面」は「公理で言明された関係を満たす存在者⁽⁴¹⁾」なのである。そしてカルナップは、次のように言う。

「こんにち、わたくしたちはしばしば、ある公理体系に対して純粋に形式主義的なアプローチを行う。その公理体系がもちうる解釈や適用がどんなものなのかを問わずに、ただ公理体系が論理的に整合であるかどうか、そしてある言明がそれからみちびきだされうるかどうかを問題にするだけである。」⁽⁴²⁾

ここには、明らかにヒルベルトの影響をみてとることができよう。そしてこれらのことから、当時のウィーンの数学上の動向と、哲学上の動向とが共鳴しあっている様相が浮かびあがってくるだろう。

このように見てくるならば、ウィーン学団の議論は、ウィーンの数学者にも理解できるものが含まれていたことが分かる。彼らはいつでも、ヒルベルトの『幾何学の基礎』を念頭において、それを理解すればよかったからである。メンガーは幾何学者であり、ヴァルトも幾何学の研究を志してメンガーの門を叩いたのである。そして既に述べたようにヴァルトはヒルベルトの『幾何学の基礎』の公理系を研究し、それをメンガーのセミナーで報告していることが、*Ergebnisse*には記録

注 (40) Carnap. R., *ibid.* p.54.

(41) Carnap. R., *Philosophical Foundations of Physics*. Basic Books, N.Y., (1966). (邦訳) 沢田・中山他訳『物理学の哲学的基礎』岩波書店 (1968) 邦訳書184ページ。

(42) Carnap. R., *ibid.* 邦訳書132ページ。

されている。ウィーンの数学者の精神に、ヒルベルトの『幾何学の基礎』は確実に浸透していたといつてよいだろう。このようにウィーン学団が、ヒルベルトを援軍としたこと、具体的には『幾何学の基礎』を採用したこと、このことがウィーンの数学者と哲学者の交流をまさに可能としたのである。

メンガーらが、ヒルベルト主義を共通項として、ウィーン学団の哲学者と関心を共有していたということは、経済学の上にも新たな展開をもたらすことになった。それは、ウィーン学団の哲学上の流儀を、経済学に実践していくという、この一点においてである。ウィーン学団は、哲学固有の役割として科学の命題の論理的分析を重視する。物理学をはじめとする自然科学ばかりではなく、経済学のような社会科学も、それが科学としての資格を得るためには、論理的分析に十分耐えうるものでなければならなかった。そして、このことを経済学において推進しようとしたのは、メンガーであった。偉大な経済学者を父とするメンガーは、経済学の素養をも持ち合わせていた。事実「ワルラス＝カッセル体系」に関して、その論理的整合性に眼を向けさせる議論を支援し、ヴァルトにその結果をセミナーで報告するようにしむけたのはメンガーである。それが、われわれの問題としている、ヴァルトの均衡解の存在証明に関する論文である。

フォン・ノイマンは、ブダペスト出身の数学者であり、このウィーンで研究活動をしていただけではない。しかし彼は、しばしばウィーンに立ち寄り、その学問的雰囲気をも十分に肌で感じていた。そして、1937年の斉一的均衡成長経路の存在証明の論文は、このウィーンの学問的環境の中から産み出された。フォン・ノイマンとヒルベルト主義との関係については、既に周知の事と思われるので、ここでは触れないことにする。

5. モルゲンシュテルンにとってのヒルベルト

最後に、経済学者モルゲンシュテルンを、これまで述べてきたような学問上の動向との関連で取り上げることにする。

この時期には、経済学者としてミーゼス (L. Mises)、ハーバラー (G. Habeler)、ハイエク (F. Hayek) など、錚々たるメンバーがこの地ウィーンで研究活動⁽⁴³⁾をしていた。これらの経済学者が、これまで述べてきたような学問上の動向を、どのように眺めていたのであろうか。これも興味をかき立てるテーマではあるが、その全景を見渡すことは別稿に委ねることとして、ここでは一人の経済学者モルゲンシュテルンに限定して考察するに止めたい。

モルゲンシュテルンは、ウィーン学団の活動そのものには積極的に参加はしていなかったが、メンガーと親交を結び、ウィーン学団とも学問上の個人的な交遊があった。そして経済学の公理化を積極的に押し進めようとした人物である。

注 (43) Craver, E., "The Emigration of The Austrian Economists", *History of Political Economy* 18: 1, (1986) 1-32 が大変参考になる。

ここでの問題は、次のことである。 Morgenstern は、これまで述べてきたようなウィーンにおける学問上の動向を、どのように眺めていたのか。あるいは、彼はこれらの動きの中から、果たして何を理解していたのか、ということである。

これまでの意味でのヒルベルト主義に影響されたウィーンの学問上の動きの中から、 Morgenstern が何を理解し、何を理解していなかったか、という点を仕分けする作業は必要であると思われる。

まず Morgenstern が、ヴァルトとフォン・ノイマンの均衡解の存在証明に関する論文を、高く評価していることを確認しておく。

Morgenstern は、ヒックス (J.R.Hicks) の『価値と資本』の書評論文⁽⁴⁴⁾において、ヒックスが方程式の本数と未知数の個数との一致をもって、均衡解の存在が確保されるとしている点の論理的な誤りを指摘している。そして、ヴァルトとフォン・ノイマンの論文における功績を強調する。しかし、彼がヴァルトやフォン・ノイマンの論文を高く評価しているのは、単にそれだけの理由からではないようである。 Morgenstern は、そこに「精密」科学としての経済学の姿を見て取っているのである。それでは、 Morgenstern の考える「精密」科学とは一体何だったのであろうか。この点を明らかにしておこう。

それには、1936年の「数理論理学と社会科学」と題する論文⁽⁴⁵⁾をみるのがよいだろう。この中で彼は、「精密」科学の典型として物理学を代表とする自然科学を考えている。それは、それらの科学が単に「精密」的な思考法——とりわけ、数学——を用いているからだという。しかしながら、数学と論理学の適用範囲は自然科学にとどまらない。それには、ホワイトヘッド (A.N.Whitehead) = ラッセルの『プリンキピア=マテマティカ』 (*Principia mathematica*) 以来の「新しい論理学」の発展による所が大きい。これによって数学と論理学は、その「分析的」な性格が明らかになり、経験科学である自然科学とは論理的に異なることが明確になったからである。したがって、それらは等しく社会科学にも適用することができる、という。彼はこの意味で、経済学も「精密」科学化することが可能であると考えている。

Morgenstern が、経済学に「精密」的方法を適用することを提唱するとき、念頭にあるのはヒルベルトの公理化の方法である。彼は、公理系の満たすべき要請として、その独立性、完全性、無矛盾性を掲げている。彼は、公理的方法の発展とそれが広く用いられるようになったことは、

注 (44) Morgenstern, O., "Professor Hicks on Value and Capital", *Journal of Political Economy*. vol. 49, (1941) pp.361-393 in Schotter, A.,(ed), *Selected Economic Writings of Oskar Morgenstern*, N.Y. Univ. pr.,(1976) 185-217.

(45) Morgenstern, O., "Logistik und Sozialwissenschaften", *Zeitschrift für Nationalökonomie*. vol.7, (1936) pp.1-24., English translation by D. Intrator. "Logistics and the Social Sciences" in Schotter, A.(ed), 389-404.

(46) Morgenstern, O., "Vollkommene Voraussicht und Wirtschaftliches Gleichgewicht", *Zeitschrift für Nationalökonomie* vol.6, (1935)337-357, English translation by F.h.Knight "Perfect Foresight and Economic Equilibrium" in Schotter, A.(ed), 169-183.

ヒルベルトに負うものであるとして、ヒルベルトに対して共感を示している。

また、モルゲンシュテルンは1936年に「完全予見と経済均衡」と題する論文⁽⁴⁶⁾を書いている。その論文では、経済主体の完全予見の仮定が、均衡の実現には欠かせない、との見解を検討している。その論文の詳細については触れる必要はないであろう。その論文の中で彼は、次のように述べていることに注意すればよい。

「……仮定によって、変化の生じた経済について何もいうことができない均衡理論は、科学的観点からしてまったく重要ではない⁽⁴⁷⁾。」と。

彼は、完全予見の仮定が経済理論から、排斥されるべきであると結論的に述べている。モルゲンシュテルンはその論文の中で、ある経済主体の行動と他の経済主体の行動の予測の相互依存について述べている。これが科学的観点からして正当化される仮定なのである。モルゲンシュテルンは、経験科学として仮定の現実的な妥当性を重視している。そして、その分析を行うにあたっては、数学を広汎に用い、論理的厳密性をもっていなければならないと考える。そしてそれはモルゲンシュテルンにとっては、公理的方法によらなければならないことを意味してもいた。

われわれはここに、モルゲンシュテルンの主張がウィーン学団のそれに極めて近いことを見いだすであろう。彼は経験科学者として、一方で経験的な言語で経済学を語ることに、他方で論理的に厳密にそれを語ることを重視した。これらは、ウィーン学団の経験主義と論理主義の側面と符合するものである。そうであるが故に、モルゲンシュテルンはウィーンの学問上の動向に一定の理解と共感を示したものと考えられる。経済学の公理化を推進するのに一定の役割を果たした、ということとは確実であろう。

しかしながら、『見えざる手』の著者のように、モルゲンシュテルンをメンガーと同格に評価してよいであろうか⁽⁴⁸⁾。これまで検討してきたように、ウィーンにおけるヒルベルト主義の受容のされ方は、かなり哲学的なものであった。それは数学的概念の存在をどこまで許容するか、という点に関連するものである。そしてそれは、経済学の体系を日常的な意味・解釈から解放した。数学者メンガーは、この点を正確に理解していた。しかし、モルゲンシュテルンの理解する公理的方法の理解は、この点に関していえば距離があるものと思われる。なぜなら、モルゲンシュテルンが経験科学の「精密」的方法というとき、それは自然科学における仮説—演繹体系と本質的には変わらないからである。彼は本来的に経験科学者であった⁽⁴⁹⁾。

しかし、このことが経済学的发展にとってはむしろ幸いであったのかもしれない。前に述べたモルゲンシュテルンの経済主体の「戦略」(strategy)の定式は、フォン・ノイマンとの共同研究の端

注 (47) Morgenstern, O., *ibid*, (1935) in Schotter, A.(ed), (1976) p.180-181.

(48) Ingrao, B & G. Israel, (1990) chap.7. pp.188-197 を参照のこと。

(49) 「公理的」数理経済学に関しても、その経験主義との結び付きが当然問われるべき問題となろう。それが経済理論である以上、現実の経済現象の説明などといった何らかの経験との関連が求められるべきものと考えられるからである。しかしこの問題は、それ自体大きな問題であるので、別の機会に論じることとしたい。

緒にもなっていったからである。

6. 時代の終り

本稿は、ヴァルトの均衡解の存在証明の論文に焦点を当てて、その論文を産み出したとされる要因を考察してきた。それらには既にいくつかのものが指摘されているが、ここではそれらのうちとりわけヒルベルト主義の影響を取り上げた。その要点を簡単に整理しておく。

最初に、ヴァルトの論文の経済学史上の意義を評価した。そこで確認されたことは、ヴァルトをもって嚆矢とする、経済学の公理化、存在証明という問題そのものの意義である。そしてそれは経済学の問題の語られ方に一つの転換をもたらした、ということ述べた。すなわち経済学の問題が、その日常的な意味や解釈からは解放されて語られるようになった、ということである。これもヴァルトの論文を契機とするものである。

そしてヴァルトの論文に対してこのような評価を下してみると、その論文を産み出した背景にはヒルベルトの影響があるのではないかと考えるのは極めて自然である。

そこで、ヒルベルト主義の名の下で語る内容を規定した。それは、公理系の無矛盾性の証明が数学的概念の存在と同等のものとなされる、という立場である。このように規定した後に、いかなる経路を辿ってウィーンの数学者にヒルベルト主義が受容されていったのか、という点を明らかにしようと試みた。

ウィーンにおけるヒルベルトの影響を考えると、決定的に重要なのは『幾何学の基礎』である。それは、数学者に対してのみならず、哲学者に対しても重要であったからである。

そこで、ヒルベルトの『幾何学の基礎』が公刊された1899年の前後で、まず数学者の幾何学研究がどのように変わったか、ということ明らかにした。

さらに、この時期の重要な哲学者集団であるウィーン学団に対する影響を考察した。彼らにとっても物理的空間の構造に関わるこの問題は、重要かつ緊急な課題であった。そしてそれは、カントの認識論の否定にもつながっていく。彼らは、カントの「ア・プリオリな総合的判断」を否定する際には、ヒルベルトの『幾何学の基礎』を援用した。

さらに、ウィーン学団が、深い意味でのヒルベルト主義を受容していることを、カルナップによって明らかにした。

この学団にメンガーが参加していたことは、経済学に新しい展開をもたらした。経済学にウィーン学団の哲学の流儀を適用してみようという機縁が生じたことである。その結果が、ヴァルトによる「ワルラス＝カッセル体系」の均衡解の存在証明であった。以上が、本稿の主要な論点である。

最後に、こうしたウィーンの学問上の動向に共感を示していた経済学者モルゲンシュテルンに焦点を当ててみた。彼も経済学の公理化を推し進めようとしたが、その根底にある思想にしていえば、これらのウィーンの動向とは距離があるものと評価した。

こうしてウィーンの数理経済学は花を開かせたのである。しかし、それはウィーンに根づくことはなかった。軍靴によって踏みじられていったのである。政治の混迷とともに、ユダヤ人排斥の動きは高まっていく。

1933年1月、ヒットラーがドイツの首相に就任した。1938年3月14日、ヒットラーはウィーンに進駐して、オーストリアを併合した。

こうした中で、メンガーはシカゴへと去っていく。モルゲンシュテルンは、1月来アメリカに出張中であり、そのままアメリカにとどまることになった。ヴァルトも、モルゲンシュテルンの説得に応じて、ウィーンを去ることにためらいながらも、アメリカへ旅立った。ひとりシュレジンガーだけはウィーンにとどまり、ヒットラーがウィーンに進駐したその日に自らの命を断ったのである。

補論：ヴァルトの論文の数学的構造⁽⁵⁰⁾

既に本論において述べたように、ヴァルトの論文は、当時のウィーンにおける数学の発展と関連がある。さらに、ヴァルトの論文は凸解析の発展の機動力となった、と評価できる。ここでは、これらの主張の論拠を示しておく。

そしてこのことはまた、当時のウィーンの数学と経済学とが互いに共鳴しあったのか否かという学史上の問題に解答を与える際の必須の前提作業でもある。

こうした点を明らかにするためには、ヴァルトの証明の実質的内容は一体何なのかということがまず示されなければならない。それは、ヴァルトの証明そのものの数学的構造を明らかにし、その構造の「深さ」を測ることもある。それは、ヴァルトの証明を一瞥しただけでは必ずしも明らかではない。ヴァルトの証明は、帰納法を用いた初等的な証明方法によっている。それにもかかわらず、ヴァルトの証明は一般に「煩雑難解である」とされ、その煩雑さゆえに長い間研究者の接近を妨げてきた嫌いがある。ようやく1950年代になってH・W・クーン(H.W.Kuhn)⁽⁵¹⁾とR・ソロー(R.Solow)⁽⁵²⁾によって、ヴァルトの証明に明快な別証が与えられた。クーンやソローの証明は、線形計画問題の双対性定理と角谷の不動点定理を用い、当該の体系に非負解の存在することを、きわめて明快な形で証明することには成功した。しかし彼らは、ヴァルトの証明方法を内在的に考察して、その数学的構造を明らかにすることはしていない。ヴァルトの証明の数学的構造を明らかにす

注 (50) この「補論」は、1991年度理論・計量経済学会での報告論文から、本論の理解に参考となると思われる部分を、加筆修正を施した上で掲載するものである。

(51) Kuhn, H.W., "On a Theorem of Wald", in *Linear Inequalities and Related Systems*, (1956) 265-273.

(52) Dorfman, R., P.A. Samuelson and R.M. Solow., *Linear Programming and Economic Analysis*, McGraw-Hill, (1958). (邦訳) 安井琢磨・福岡正夫・渡部経彦・小山昭雄訳『線形計画と経済分析』I・II, 岩波書店, 1958-59.

るということは、別証を与えることでもなく、それを反駁することでもない。

以下では、ヴァルトの証明に含まれている実質的内容を明らかにする。具体的には、ヴァルトの証明と線形計画問題との関連およびミンコフスキー＝ファルカスの定理との関連を考察することにする。この二つの定理を選ぶのは以下の理由にもとづく。クーンやソローがしたように、線形計画問題の双対性定理と不動点定理を用いると、均衡解の存在を証明することができる。ところで、双対性定理は、通常ミンコフスキー＝ファルカスの定理を用いて証明される。ヴァルトは、このミンコフスキー＝ファルカスの定理から、双対性定理を導き、そこから均衡解の存在を証明するという連鎖を使わないで、単に表面的なところで処理しているように見えるが、果してそうなのであろうか。実際は、ヴァルトの証明法と同一の精神によって、これらの定理が導かれることが明らかになる。したがって、ヴァルトの証明の精神に則り、あるいはそれを若干手直しすることによって、これらの定理が事実上導かれるのであり、これらの定理は事実上ヴァルトによって解かれていることが分かるであろう。

ここで議論の対象となる「ワルラス＝カッセル体系」を厳密に定式化しておく。

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & A s = r \\ \text{(II)} \quad & {}^t A q = \overset{(53)}{p} \\ \text{(III)} \quad & s = f(p) \end{aligned}$$

記号を説明すると、 s は n 種類の最終生産物の需要量、 p はそれら最終生産物の価格を表す、ともに n 次元のベクトルである。また、 r は本源的生産要素の供給量、 q はそれら生産要素の価格を表す、ともに m 次元ベクトルである。さらに、 A は生産係数行列を表す。そして、 r と A とは外生的に所与とする。

シュレジンガーによって提案された「不等式化の構想」とは次のようなものである。(I) 式を不等式化し、均衡において各種生産要素がすべて使い尽くされないことを是認する。この場合、均衡において余ってしまった生産要素は、いわゆる自由財であるから、その価格はゼロでなければならない。したがって、

$$\text{(IV)} \quad {}^t q (A s - r) = 0$$

という条件を補うのである。

シュレジンガーはこうした上で、このカッセルの体系の非負解の存在を検討することを提案するのである。

改めて、シュレジンガーの定式化した「ワルラス＝カッセル体系」を記しておく。

$$\begin{aligned} A = (a_{ij}), \quad s = (s_j), \quad p = (p_j), \quad r = (r_i), \quad q = (q_i) \\ (i = 1, \dots, m ; j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

$$\text{(1)} \quad A s \leq r$$

注 (53) 行列の左肩に記した“ t ”は「転置行列」を表す。

$$(2) \quad 'q(As - r) = 0$$

$$(3) \quad 'Aq = p$$

$$(4) \quad p_j = f_j(s_j)$$

ヴァルトはこのシュレジンガーによって示唆された体系に、以下の仮定の下で、均衡点の存在証明を完遂した。

1. $r > 0$
2. $A \geq 0$ かつ A の各列には少なくとも一つは正の成分がある。
3. $f_j(s_j)$ は、 $s_j > 0$ の領域で定義される非負の連続かつ狭義の単調減少函数
4. $s_j^{(*)} > 0$ であるような点列が、 $s_j = 0$ に収束するとき、 $f_j(s_j) = +\infty$

さて、ヴァルトが存在証明を行った上記の体系の特徴をここで整理しておくことにする。

①まず、(1)式のみ不等式化されていて、(3)式は等式のままで考察されている。

②この体系のなかには、(1)～(3)が線形であるのに対し、非線形の函数(4)が含まれている。

③さらに、この体系では、 r が外生的に所与の正のベクトルであるが、 p は所与のベクトルではなく、(4)式を媒介として s と連動して解かれなければならないとされている。

④また、第 j 財の価格は、その第 j 財の需要量にのみ依存して決められる。

とりわけ上記の④は、ヴァルトがメンガーの主宰する数学セミナーで報告を行った際に、メンガーによっても批評された点である。さらにメンガーは、現実性の観点からすると、逆需要函数が狭義の単調減少函数であるという条件を緩和し、単調減少函数とするほうがより望ましいこと、そして各財の価格が、すべての財に依存して決定される形で均衡解の存在証明を遂行することが残された課題であることを述べた。これらの点は、ヴァルトによって受け入れられ、変更された仮定のもとでの存在証明が翌年1936年に *Ergebnisse* 第7巻に掲載された。

(1)線形計画問題との関連

上述した主旨に従って、証明を行うことにするが、そのためにヴァルトの体系を以下のように修正する。

$$\text{体系 } A = (a_{ij}), \quad s = (s_j), \quad r = (r_i), \quad p = (p_j), \quad q = (q_i)$$

$$(i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$$

とする。(ただし、体系の式にはここで改めて番号をつけ直す。)

$$(1) \quad As \leq r$$

$$(2) \quad 'q(As - r) = 0$$

$$(3) \quad 'Aq \geq p$$

$$(4) \quad 's('Aq - p) = 0$$

重要な変更点は、価格・平均費用の関係式をも不等式化し、相補性の条件式を導入したこと、さらに p と s とが連動して解かれなければならないという条件をはずし、 p を外生的に所与の非負ベクトルとしたことである。また、仮定 1 も緩めて r を非負のベクトルとする。

このとき、この体系に非負解 s , q が存在することを以下の仮定の下で証明する。

仮定 1 p と r は、所与の非負ベクトルとする。

仮定 2 A は非負行列で、かつ A の各列には少なくとも一つ正の成分がある。

証明

n についての帰納法により証明する。

$n = 1$ のとき (1) は

$$\begin{cases} a_{11} s_1 \leq r_1 \\ a_{21} s_1 \leq r_2 \\ \vdots \\ a_{m1} s_1 \leq r_m \end{cases}$$

である。

仮定 2 より、 $a_{i1} \neq 0$ となる i が少なくとも一つは存在するから、そのような i について

$$\text{Min} \left(\frac{r_i}{a_{i1}} \right)_{\substack{a_{i1} \neq 0 \\ i=1, 2, \dots, m}}$$

を計算し、その値を α とすると、 $s_1 = \alpha$ は (1) の解となる。

$s_1 = \alpha = 0$ のときは、残りの (2)(3)(4) を満たす q が存在することは自明であるから、 $s_1 = \alpha > 0$ の場合についてのみ考察すればよい。

$s_1 = \alpha > 0$ のとき、(2) より一般性を失うことなく

$${}^t q = ({}^t q_k, \underbrace{0}_{(m-k)\text{個}}) \quad \text{但し, } q_k \neq 0$$

とできる。この q を (3) から

$$a_{11} q_1 + \dots + a_{k1} q_k = p_1$$

を満たすように決める。実際 $q > 0$ に対しては (1) 式が等号で成立しており、 $\alpha > 0$ より $r_i > 0$ ($i = 1, \dots, k$) であり、したがってこのような a_{i1} ($i = 1, \dots, k$) は正であるから、上記の式を満たす q_k は確かに存在する。この q に対して (4) 式が成立することは明らか。

ここで

$$\bar{\lambda} = \text{Min} \{ \lambda \mid r_i - a_{in} \lambda = 0 \text{ for some } i \}$$

とし、

$$= q_1 \left(\sum_{j=1}^{N-1} a_{1j} s_j - r_1' \right) + \cdots + q_m \left(\sum_{j=1}^{N-1} a_{mj} s_j - r_m' \right) = 0$$

$a_{1N}q_1 + a_{2N}q_2 + \cdots + a_{mN}q_m > p_N$ のときは、 $s_N = \lambda = 0$ とすれば、(1)(2)(3)(4)式がともに満たされる。

[Case2] 解集合 q_1, \dots, q_m のいかなる値に対しても

$$a_{1N}q_1 + \cdots + a_{mN}q_m < p_N$$

となるとき。

このとき、仮定2により、 $\bar{\lambda}$ を達成する i が少なくとも一つ存在するからそのような i を一つ選び、 i^* とする。いま $\lambda = \bar{\lambda}$ とおくと、そのような i^* については $a_{i^*N} \neq 0$ で、

$$r_{i^*}' = 0 \quad \text{かつ} \quad a_{i^*1}s_1 + \cdots + a_{i^*N}s_{N-1} = 0 \text{ である。}$$

ここで

$$f(t) = a_{1N}q_1 + \cdots + a_{i^*N}(q_{i^*} + t) + \cdots + a_{mN}q_m \quad (t > 0)$$

とする。 $f(0) < p_N$ かつ $f(+\infty) = +\infty$ であり、 f は連続関数であるから、中間値の定理より、ある t^* が存在して $f(t^*) = p_N$ となる。

そこで新たに、 $q = (q_1, \dots, q_{i^*} + t^*, \dots, q_m)$ を考える。

このとき(2)'式は、 $a_{i^*1}s_1 + \cdots + a_{i^*N}s_{N-1} = 0$ であることに注意すればこの新たな q に対しても成立する。(3)'式の成立することは殆ど明らか。

(4)'式の成立することは次のようにして確認できる。

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= s_1 [a_{11}q_1 + \cdots + a_{i^*1}(q_{i^*} + t^*) + \cdots + a_{m1}q_m - p_1] \\ &\quad + s_2 [a_{12}q_1 + \cdots + a_{i^*2}(q_{i^*} + t^*) + \cdots + a_{m2}q_m - p_2] \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + s_{N-1} [a_{1m}q_1 + \cdots + a_{i^*N}(q_{i^*} + t^*) + \cdots + a_{mN-1}q_m - p_{N-1}] \end{aligned}$$

であるが、 $a_{i^*j} = 0$ のときは $s_j \geq 0$ であり、 $a_{i^*j} \neq 0$ のときは $s_j = 0$ であることに注意すれば、 q_{i^*} を $q_{i^*} + t^*$ ($t > 0$) に変更した影響はない。よってこのような q と $s_N = \bar{\lambda}$ および帰納法の仮定による s_1, \dots, s_{N-1} が $n = N$ に対する体系の解となる。

(証明終)

ヴァルトの証明の精神に忠実に則り、当該の体系に非負解が存在することの証明を行えば、以上によるのである。ヴァルトの証明から、ヴァルトが設けた仮定に本質的に依存している部分を、除去して比較されたい。ヴァルトの証明は、逆需要関数 f_j に課した仮定に本質的に依存した証明になっている。この部分を取り除き、新たに不等式化した(3) (および(4)) を満たすように解を構成する点にのみ注意すれば、ほぼ同一のものに帰するはずである。この結果明らかとなったことは、ヴァルトの証明は、 r と A に関する仮定1と2の下における線形計画問題の双対性定理

の証明になっていること、このことである。従って、ヴァルトの証明方法によって事実上、線形計画問題の双対性定理は、解かれてしまうのである。

(2) 数学史の観点から

以上のことから、ヴァルトの証明は事実上、線形計画問題における双対性定理を証明していたことが明らかとなった。ところで、標準的な双対性定理の証明は、ミンコフスキー＝ファルカスの定理を用いてなされる。したがって、ヴァルトの証明あるいは前節での証明の中には陰伏的に、ミンコフスキー＝ファルカスの定理ないしはそれと同等の内容が含まれているのではないだろうか。あるいは、事実上ヴァルトの証明方法によって、この定理も解かれてしまうのではないか。この疑問に答えようとするのが、ここでの課題である。

ミンコフスキー＝ファルカスの定理とは、次のような内容のものである。

A は $(m \times n)$ の実行列、 $r \in R^m$ とする。このとき、次の二命題のいずれか一方が必ず成り立つ。

- (1) 一次方程式 $As = r$ が非負解を有する。
- (2) $tAq \geq 0, tqr < 0$ が解を有する。

この定理は、次のように直感的に理解される。いま行列 A の各列を構成するベクトルを $a_1, a_2, \dots, a_n (\in R^m)$ とし、これらが生成する凸錐を、

$$\angle \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

と書くことにする。すると、 $As = r$ が非負解を有することは

$$r \in \angle \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

であることと同値である。そして、もし $As = r$ が非負解をもたないならば、(2) は原点を通過して、 $\angle \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ とベクトル r とを分離する超平面が存在することを主張しているのである。

さて、先に提出した問題に答えるべく以下のような考察を行う。すなわち、ミンコフスキー＝ファルカスの定理を、ヴァルトの証明の方法を若干の手直しをするのみで、 n についての帰納法で証明する。

以下、 $As = r$ が非負解を持たないと想定して議論を進めていく。

証明 n についての帰納法による。

$n = 1$ のとき(1)は、

$$\begin{cases} a_{11} s_1 = r_1 \\ a_{21} s_1 = r_2 \\ \vdots \\ a_{m1} s_1 = r_m \end{cases}$$

となり、非負解が存在しないとする。そこでまず

$$a_{11} q_1 + a_{21} q_2 + \dots + a_{m1} q_m = 0$$

となる $q \neq 0$ を選ぶ。その q に対して $\langle q, r \rangle \neq 0$ である。(なぜなら、 A の第一列からなるベクトルと r とは、仮定より一次独立であるから。) そこで、符号の調整のみによって、 $\langle q, r \rangle < 0$ とすることができるので、(2) を満たす q は確かに存在する。

そこで $n = N - 1$ のとき主張が成り立つと仮定しよう。そのとき $n = N$ について成り立つことを示す。そのためには、

$$(*) \begin{cases} a_{11} q_1 + \dots + a_{m1} q_m \geq 0 \\ \vdots \\ a_{1, N-1} q_1 + \dots + a_{m, N-1} q_m \geq 0 \end{cases}$$

かつ

$$\langle q, r \rangle = q_1 r_1 + \dots + q_m r_m < 0$$

となる q に対して

$$a_{1N} q_1 + \dots + a_{mN} q_m \geq 0$$

が成り立ったとしたら、この q が(2) を満たし定理は証明されたことになる。

この q に対して

$$a_{1N} q_1 + a_{2N} q_2 + \dots + a_{mN} q_m < 0$$

となったとする。このときは、 A の各行ベクトルを a_j ($j = 1, \dots, N$) で表すこととして

$$\overline{a_j} = \langle q, a_N \rangle a_j - \langle a_j, q \rangle a_N$$

$$\overline{r} = \langle q, a_N \rangle r - \langle r, q \rangle a_N$$

$$(j \leq N - 1)$$

とする。

こうすると、 $r \notin \angle \{a_1, \dots, a_{N-1}\}$ である。

実際もしそうでないとすると、 $r = \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_j a_j$, $\lambda_j \geq 0$ とならなければならない。

しかし、

注 (54) 以下の証明は、慶應義塾大学商学部の小宮英敏助教授の「私信」を参考にした。また、Gale, D., *The Theory of Linear Economic Models*. McGraw-Hill, (1960) における証明も参考にした。

$$\begin{aligned}
& \langle q, a_N \rangle r - \langle q, r \rangle a_N \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_j [\langle q, a_N \rangle a_j - \langle a_j, q \rangle a_N] \\
&= \sum_{j=1}^{N-1} (\lambda_j \langle q, a_N \rangle a_j) + \sum_{j=1}^{N-1} (-\lambda_j \langle a_j, q \rangle a_N)
\end{aligned}$$

であるから,

$$r = \sum_{j=1}^{N-1} \lambda_j a_j + \frac{\langle q, r \rangle + \sum_{j=1}^{N-1} (-\lambda_j \langle a_j, q \rangle)}{\langle q, a_N \rangle} a_N$$

が得られ、 $r \in \{a_1, \dots, a_{N-1}, a_N\}$ となり仮定に反するからである。

したがって、帰納法の仮定より、 $\bar{a}_j \bar{q} \geq 0$ 、 $\bar{q} \bar{r} < 0$ となる \bar{q} を得る。

そこで、 $q^* = \langle q, a_N \rangle \bar{q} - \langle \bar{q}, a_N \rangle q$ とする。

$$\begin{aligned}
\langle q^*, a_j \rangle &= \langle q, a_N \rangle \langle \bar{q}, a_j \rangle - \langle \bar{q}, a_N \rangle \langle q, a_j \rangle \\
&= \langle a_j, \bar{q} \rangle \geq 0 \\
\langle q^*, a_N \rangle &= \langle q, a_N \rangle \langle \bar{q}, a_N \rangle - \langle \bar{q}, a_N \rangle \langle q, a_N \rangle \\
&= 0 \\
\langle q^*, r \rangle &= \langle q, a_N \rangle \langle \bar{q}, r \rangle - \langle \bar{q}, a_N \rangle \langle q, r \rangle \\
&= \langle \bar{q}, r \rangle < 0
\end{aligned}$$

となることが確認できる。よって q^* は (2) を満たし定理は証明された。

(証明終)

以上のように、ヴァルトの証明方法を若干手直しするだけで、ミンコフスキー＝ファルカスの定理は、帰納法で証明できる。すなわち、ヴァルトの証明とほぼ同様の手法でもって「凸集合の分離定理」を証明することができるのである。したがって、ヴァルトの証明のアイデアは、単に「ワルラス＝カッセル体系」の均衡解の存在証明に止まるものではなく、それを越えて、線形計画問題の双対性定理やミンコフスキー＝ファルカスの定理をも解決してしまう。

こうした考察を踏まえて、ヴァルトの証明にその数学的構造の観点から、評価を行うことにする。まず、ヴァルトの不等式の処理方法に貢献が認められなければならない。ヴァルトの体系は先にも記したように、

- (1) $As \leq r$
- (2) $\bar{q}(As - r) = 0$
- (3) $\bar{A}q = p$
- (4) $p_j = f_j(s_j)$

$$(j = 1, \dots, n)$$

である。ここでは、(1)式が解くことが問題にされよう。もし(1)が解けたとしたらば、(4)式から p が

決まる。これは、逆需要関数に関する仮定から、容易に決定されるので、数学的な処理は簡単になっている。そして p が決まると(3)式から q を決定しなければならないが、これを解く問題はまさしくミンコフスキー＝ファルカスの定理の問題である。そしてそれは歴史的には、既に20世紀の初頭には解決されている。したがってヴァルトが(1)式の不等式を、その相補性の条件を導入して解いたこと、この点に必要な貢献が認められる。

次に、ヴァルトの証明を詳細にみると、そこには凸解析の手法は explicit には用いられていない。ヴァルトの体系には、凸解析の手法は必要がなく、それをを用いることは問題のレベルに対して重装備だといえよう。ではなぜそうなのであろうか。前述したように、ヴァルトの手法を準用することによって、ミンコフスキー＝ファルカスの定理が解けてしまうが、その意味する「凸集合の分離定理」と、今日われわれが知っている「凸集合の分離定理」とは、問題のレベルに相違が見られる。有限次元に限って比較をしてみても、一般の「凸集合の分離定理」は、多くの解析的な道具を用いなければならない。まず、問題とする集合が、閉・凸であるとして、その集合に属さない点との距離の最小値を attain する点が一意に決まることを必要とする。他方、ミンコフスキー＝ファルカスの定理では、有限個のベクトルが張る凸錐が問題となるのであって、いわば有限錐とそれに属さないベクトルとの分離が問題となっている。したがって、それは有限回の手続きによって、分離超平面を求めうるのである。ヴァルトの体系に一般の凸集合の分離定理は重装備である。ヴァルトは問題のレベルに応じて、それに見合う道具で問題を処理しているといえよう。

それでは、このようなヴァルトのアイデアは、当時の数学の発展段階から考えて、特殊なものなのか、あるいは標準的な枠組に属するものなのであろうか。当時の数学史との関連でいうと、この時期は、凸解析の生成期である。その黎明期には、例えば、1907年には凸包の表現に関するカラテオドリー (Carathéodory) の定理が、1923年には凸集合族の共通部分に関するヘリー (Helly) の定理が確立された。これらは共に、数学的構造が類似していて、有限の範囲で解決できるものである。ヴァルトの証明の発想は、凸解析の黎明期に、その問題の処理の仕方そのもの、あるいはそれを処理する視点という点で、当時の数学の発展と関連があったといえる。

(防衛大学校社会科学教室専任講師)