慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	グッドウィン成長循環模型の構造安定サイクル
Sub Title	On structurally stable cycles of goodwin's growth cycle model
Author	伊藤, 幹夫
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1993
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.85, No.4 (1993. 1) ,p.681(153)- 698(170)
JaLC DOI	10.14991/001.19930101-0153
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19930101-0153

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

「三田学会雑誌」85巻4号（1993年1月）

グッドウィン成長循環模型の構造安定サイクル

伊藤幹夫*

1. 序

チョウ [5,4] とヒックマンその他 [15] が「現在のマクロ経済学の知識に照らしてみて，確率的ショックにさらされている安定的な体系のほうが，確率的ショックがあろうがなかろうが不安定な体系より，現実を正確に描写しているように思える。」[(1)] という見解を発表して以来，多くの経済学者が，最終的には時系列モデルの VAR や ARMA に帰着される実景気循環理論に関心を集中させてきた。[(2)] 実際，これまで非線形な内生的景気循環の理論の可能性は見過ごされるか，ほとんど無視されるといった状態であった。純粋な理論家をのぞく多くの経済学者は，観察された経済変動を，内生変数間の相互関係から引き起こされるものではなく，確率的ショックによって引き起こされるものだと考えている。実景気循環理論が周知のものになって以降，内生的要因によって説明される景気循環は，もはや存在しそうもないと考える傾向も強い。

国民総生産や消費などの主要な経済時系列を，トレンドを除去した後観察すると，その変動は確かに確率的ショックによって引き起こされたように思えるが，なにかの比率であるような変数によっては内生的景気循環理論が成立しそうなものがある。実際，設備投資とＧＮＰの比率をとると，日本の場合10年から12年の，アメリカの場合９年の，かなりはっきりした周期性の変動が観察できる。また労働分配率も石油ショック前，石油ショック後それぞれで安定した変動を示している。

グッドウィン [10, 11] は，そうした「比率」変数を動学変数とするロトカ＝ボルテラ方程式に基づく成長循環模型を示した。グッドウィンの成長し続ける経済の模型では，雇用は固定された資本・産出比率をもつ生産技術のもとで定まるとされ，捕食循環が雇用率と総所得に占める賃金所得の比率の間で生ずる。その循環の過程を簡単に記述すると以下のようになる。好況期を通じての高

* 神谷傳造教授，川又邦雄教授，長名寛明教授，細田衛士助教授ならびにレフェリーに，貴重なご意見をいただいた。

注（1） ラウ [24] を見よ。

（2） たとえばロング＝プロッサー [18] を見よ。

い実質賃金率は利潤率を圧迫し，投資を徐々に抑える。そして，雇用の成長率が鈍化する。その結果，失業が増加し実質賃金の伸びが抑えられ，利潤が回復し，投資も徐々に上向く。これが，雇用の増加をもたらし再び好況をもたらす，という循環が以下続く。

興味深いロトカ＝ボルテラ方程式そのものが持つ性質のため，模型の中の循環の発生は，カルドア［19］などの非線形模型と異なり，模型のパラメターの値と関係がない。[3] また，グッドウィン模型は恒常成長経路上どの変動を描写する。これは，最近の実景気循環理論をのぞく通常の景気循環理論が，トレンドを除去したのちのデータについての理論になっているのと対照的である。トレンドの除去方法についてはさまざまのものがあり，通常の景気循環理論にとっての説明対象である循環が，どう観察されるかはトレンドの除去方法に依存してしまう。よって，トレンドの除去方法についての恣意性を回避するためにも，成長と循環を同時に扱う模型が望ましいのはいうまでもない。

発表以来，資本主義経済についてのグッドウィンの模型は，その簡潔さから多くの経済学者の注目を集め，様々な方向での拡張が試みられてきた。[4] それらの研究の中で，グッドウィン模型が元々のロトカ＝ボルテラ方程式と同様の弱点を，もつことが明らかになった。つまり，構造的に不安定であり，かつ循環の振幅が初期値から独立でないということである。[5] 構造不安定性は模型の基本性質が，相対的に小さな摂動に対しても非常に敏感だということである。つまり，いかなる構造変化，例えばほんのちょっとした緩衝要因が入ってきても永続的な循環が壊されてしまう。この論文では，情報の伝達ラグを導入した上で，グッドウィン模型本来の一定の労働増加率の仮定を緩和し，労働人口の増加率と雇用率の間に関係があるとして，構造安定的な成長循環模型を提示する。

以下では，ホップの分岐定理を用いて修正されたグッドウィン模型において漸近安定な極限閉軌道が存在することを示す。その場合，4節で見るように分岐パラメターとしてラグの長さをとる。そうすることで，情報伝達のラグの長さが構造安定的な景気循環の振幅にどのように関係するかを明らかにできる。ここで注意すべきは，我々が修正したグッドウィン模型，がもはや構造的パラメターの大きさによらず循環を生ずる本来の2次元ロトカ＝ボルテラ模型ではないという点である。[6]

この論文は以下のような構成になっている。2節では，グッドウィン［10］によって示された本来の模型を示す。3節では，位相図上で孤立的でない閉軌道の存在や定常均衡点の比較静学など，グッドウィン模型の性質を調べる。4節では，この論文の主要論点，つまり修正されたグッドウィ

注（3） カルドア模型の厳密な定式化としてチャン＝スミス［3］をみよ。カルドア模型を含めて，既存の非線形模型では，景気循環としての極限閉軌道が生ずるには投資関数の非線形性を始めとして，模型の構造・パラメターに関して様々な条件が必要である。

（4） デサイ［6］，ヴェルピライ［29］，ウルフステッタ［30］，ブロエグ［21］，フラッシェル［7］，佐藤［26］，ポジョラ［22］，グロンボウスキー＝クリューゲル［8］．等を見よ。

（5） 内生的景気循環理論にとって緩和振動がそれほど重要ではないと考える人にとっては，二番目の問題点は，欠点というほどのものとは感じられないかもしれない。しかし，通常科学的に振動現象を考えるとき，初期条件から独立に振動するような模型が望ましいとされる。緩和振動では，循環の振幅から独立になる。緩和振動の正確な定義については，グラスマン［12］を参照せよ。

（6） 構造安定性を手にいれる代わりに，グッドウィン模型本来の興味深い性質が失われたと考える読者もいるかもしれない。

ン模型に極限閉軌道が存在することを，ホップ分岐定理を用いて示す。

2. グッドウィン模型

グッドウィンの模型は以下の変数を用いる。[7]

q：産出量

k：資本

w：賃金率

y：労働生産性

α：労働生産性の成長率 $\left(=\frac{\dot{y}}{y}\right)$

l：雇用

σ：資本産出比率（資本の生産性の逆数）

Π：利潤（$=q-wl$）

u：労働分配率（w/y）

n：労働供給

β：労働供給の成長率 $\left(=\frac{\dot{n}}{n}\right)$

v：雇用率（n/l）

s_k：資本家の平均貯蓄性向

s_w：労働者の平均貯蓄性向

s：経済全体の平均貯蓄性向

c：消費

S：貯蓄（$=q-c$）

なお，労働供給を人口そのものではなく潜在労働力の供給と考えてもよい。

以下の式(1)から(10)までは次に述べる，若干修正されたグッドウィンの仮定から導出される。

- 体化された技術進歩は定常的である。つまり，αは定数。
- 労働供給の成長率は一定。つまり，βは定数。
- 生産要素は，資本と労働のみである。
- 資本と労働はそれぞれ同質的であり，製品差別はない。
- すべての変数は実質表示。
- 労働所得・利潤所得の一定率が貯蓄される。
- 資本産出比率は一定である。つまり，σは定数。

注（7） ここでのモデルはグッドウィンの本来の模型を若干拡張したものであるが，本質にはいささかの変更もない。

・減価償却は考慮しない。

・実質賃金率は完全雇用水準の近傍で，雇用率の増加関数になっている。

最後の仮定はいわゆるフィリップス曲線の存在である。さらに，我々は，資本家の貯蓄率は労働者の貯蓄率よりも大きいと仮定する。つまり$s_k > s_w$である。[8]

減価償却を無視したため，本来のグッドウィン模型同様，純投資と粗投資の区別はない。そこで，財市場の均衡条件は以下のように書かれる。

$$S=\dot{k}. \tag{1}$$

消費は以下の方程式に従うものとする。

$$c=(1-s)\,q \tag{2}$$

これは，実質残高効果がない場合の消費関数にほかならない。式(1)と(2)から

$$\frac{s}{\sigma}=\frac{\dot{k}}{k}. \tag{3}$$

を得る。

他方，資本産出比率σが一定であることから，次の方程式が導かれる。

$$\frac{\dot{k}}{k}=\frac{\dot{q}}{q}. \tag{4}$$

また，$\frac{\dot{q}}{q}-\frac{\dot{l}}{l}=\alpha$と$\frac{\dot{l}}{l}-\beta=\frac{\dot{v}}{v}$から

$$\frac{\dot{q}}{q}=\alpha+\beta+\frac{\dot{v}}{v}. \tag{5}$$

が得られる。貯蓄に関しての仮定から次の方程式が導かれる。

$$sq=s_k\Pi+s_w wl. \tag{6}$$

両辺を算出量qで割って，利潤の定義から，

$$s=s_k(1-u)+s_w u. \tag{7}$$

が容易に得られる。経済全体の平均貯蓄性向は労働分配率uに依存していることに注意せよ。この点は本来のグッドウィン模型と異なっている。とはいっても，この相違点はグッドウィン模型の動学的特性を変えない。変わるのは，むしろ定常均衡点の性質である。より具体的にいうと，この論文での定常均衡点は労働者と資本家の貯蓄性向に依存するが，本来の模型では定常均衡点は貯蓄性向から独立になっている。

式(3)と(4)，(5)，(7)からロトカ＝ボルテラ方程式体系のうち一本を得る。

$$\frac{\dot{v}}{v}=\left\{\frac{1}{\sigma}s_k-(\alpha+\beta)\right\}-\frac{s_k-s_w}{\sigma}u \tag{8}$$

注（8） 労働者の貯蓄率 s_w をゼロとすると本来のグッドウィンの模型になる。

グッドウィン [11] に従って，以下のようにフィリップス曲線の線形近似を考える。[9]

$$\frac{\dot{w}}{w} = -\gamma + \rho v. \tag{9}$$

さて，労働分配率の定義を考慮すれば，方程式(9)はロトカ＝ボルテラ方程式系のもう一本の式が得られる。

$$\frac{\dot{u}}{u} = -(\gamma + \alpha) + \rho v. \tag{10}$$

方程式(8)と(10)は，よく知られたロトカ＝ボルテラ力学系を形成する。これ以降，この体系について調べてみる。u も v も共に経済学的にはゼロと1の間になければならないから，体系の位相図を考える場合，われわれは非負象限に関心を集中する。[10] 非負象限は不変集合であることに注意せよ。[11] まず，動学体系の定常均衡点を計算する。[12]

$$(v^*, u^*) = \left(\frac{\alpha+\gamma}{\rho},\ \frac{s_k}{s_k - s_w} - (\alpha+\beta)\frac{\sigma}{s_k - s_w}\right) \tag{11}$$

定常均衡点が正方領域 $(0, 0)^2$ に存在するためには，

$$s_k > \sigma(\alpha+\beta) > s_w$$

と

$$\alpha + \gamma < \rho$$

を仮定しなくてはならない。2節と3節でもこの仮定を堅持する。

方程式(11)は労働者と資本家の平均貯蓄性向の差が小さければ小さいほど，均衡点での労働分配率が大きいことを示唆する。これに対して，われわれの模型の特殊な場合である元々のグッドウィン模型では，定常均衡点での労働分配率は，平均貯蓄性向から独立になっているように見える。[13]

最後に定常均衡点の比較静学上の性質をまとめておこう。

$$\frac{\partial u^*}{\partial s_k} = \frac{\sigma(\alpha+\beta) - s_w}{(s_k - s_w)^2} > 0$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial s_w} = \frac{s_k - \sigma(\alpha+\beta)}{(s_k - s_w)^2} > 0$$

注（9） ヴェルピライ [29] が示したように，この線形近似はグッドウィン模型の動学特性を変化させない。

（10） あとで見るように，グッドウィン模型では，いかなる大きさの振幅の循環も存在しうる。よって，定常均衡点の各座標値がゼロと1の間にある限り，労働分配率 u，雇用率 v ともにゼロと1の間にあり続けるような循環の存在が保証される。

（11） 位相図のある領域が不変集合であるとは，そこから出発するいかなる経路もその領域からはずれることがないことをいう。

（12） ここで，われわれは，自明な定常均衡点（0, 0）を無視する。

（13） 元々のグッドウィン模型では，資本家は利潤のすべてを投資に廻すと仮定されているため，見た目上，定常均衡点が平均貯蓄性向から独立に見えているにすぎない。実際，$s_w = 0$，$s_k = 1$ とすることでグッドウィンと同じ結論が得られる。

$$\frac{\partial u^*}{\partial \sigma}=-\frac{\alpha+\beta}{s_k-s_w}<0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial \alpha}=\frac{\partial u^*}{\partial \beta}=-\frac{\sigma}{s_k-s_w}<0$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial \alpha}=\frac{\partial v^*}{\partial \gamma}=\frac{1}{\rho}>0$$

$$\frac{\partial v^*}{\partial \rho}=-\frac{\alpha+\gamma}{\rho^2}<0$$

興味深いことに，資本家の平均貯蓄性向 s_k の増加はつねに資本家の所得の取り分を減らすのに対して，労働者の平均貯蓄性向 s_w は常に労働分配率を引き上げる。また，われわれの成長経済の模型では，労働生産性の成長率 α と人口の成長率 β の増加は，ともに所得分配における労働者の立場を悪化させる。労働生産性の上昇は，定常均衡点での雇用率を改善する。また，フィリップス曲線の傾きが急になると雇用率は悪化する。

3. 閉軌道

この節では，前節で示した模型の動学的特性を調べる。このため，まず位相図を描いてみる。すでに前節で示したように，この体系はふたつの定常均衡点を持つ。一つは原点，もう一つは非負象限の内点である。非負象限はこの体系の不変集合であるから，われわれはこの領域に関心を限定する。まず始めに，前節の動学体系を考慮して，非負象限を以下のように四つの部分に分割する。

$$A_1=\left\{(v,u)\in\mathbb{R}^2_{++}\mid \quad u<\frac{s_k}{s_k-s_w}-(\alpha+\beta)\frac{\sigma}{s_k-s_w} \text{ and } v\leq\frac{\alpha+\gamma}{\rho}\right\}$$

$$A_2=\left\{(v,u)\in\mathbb{R}^2_{++}\mid \quad u\leq\frac{s_k}{s_k-s_w}-(\alpha+\beta)\frac{\sigma}{s_k-s_w} \text{ and } v>\frac{\alpha+\gamma}{\rho}\right\}$$

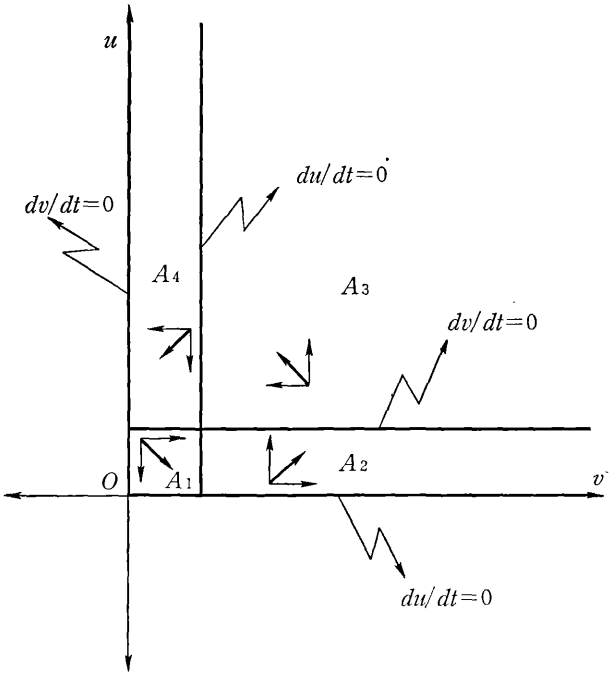
$$A_3=\left\{(v,u)\in\mathbb{R}^2_{++}\mid \quad u>\frac{s_k}{s_k-s_w}-(\alpha+\beta)\frac{\sigma}{s_k-s_w} \text{ and } v\geq\frac{\alpha+\gamma}{\rho}\right\}$$

$$A_4=\left\{(v,u)\in\mathbb{R}^2_{++}\mid \quad u\geq\frac{s_k}{s_k-s_w}-(\alpha+\beta)\frac{\sigma}{s_k-s_w} \text{ and } v<\frac{\alpha+\gamma}{\rho}\right\}$$

図1にこの位相図を示す。正象限に留まる動学経路は，A_1, A_2, A_3, A_4, A_1 の順にこの四つの領域を訪れる。グッドウィン模型の位相図上のこの特性を次のように表現することができよう。まず，好況期の高い実質賃金率は利潤を圧迫し，ひいては投資を抑える。次に，雇用率の増加が鈍る。その結果，不況期に突入し，失業が徐々に増加し実質賃金率の下落を招く。これにより，利潤率が改善し，投資も再び盛んになる。同時に雇用の状況も改善し，好況期に入る。そして，以上の過程を繰り返す。

位相図において，一方の定常均衡点である原点は，グッドウィンの動学体系において鞍点になっている。より具体的に言うと，v の任意の点から出発する経路は v 軸にとどまりつつ原点から離れてゆき，他方 u 軸の任意の点から出発する経路は u 軸にとどまりつつ原点に近づく。このことは，グッドウィン動学体系，(8)，(10)のヤコビ行列を原点で評価したとき，

図 1



$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma}s_k-(\alpha+\beta) & 0 \\ 0 & -(\alpha+\gamma) \end{pmatrix}$$

となることからも容易にわかる。実際，前の節で設けた仮定により，この行列から生成される特性方程式の根は，$\frac{1}{\sigma}s_k-(\alpha+\beta)$ と $-(\alpha+\gamma)$ であり，それぞれ正と負の実数である。結局，原点でないほうの定常均衡点が正象限に入るための条件は，原点が鞍点になるための条件でもある。

他方，正象限にあるほうの定常均衡点で評価した体系のヤコビ行列は，

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{-(\alpha+\gamma)(s_k-s_w)}{\rho\sigma} \\ \frac{-\rho\sigma(\alpha+\beta)+s_k\rho}{s_k-s_w} & 0 \end{pmatrix}$$

となる。定常均衡点が正象限に存在するように設けた仮定を再び考慮すると，(1，2)要素は負，(2，1)要素は正となる。よって，線形化された体系において正象限にある定常均衡点は渦心点となるが，元々の体系は非線形力学系なのでこの場合の定常均衡点の性質を即断することはできない。そこで，定常均衡点の動学的性質を調べるため別の手だてを考えなくてはならない。

方程式(8)と(10)からなる，グッドウィンの体系は幸いなことに次のような第一積分を持つ。[14]

$$H(v,u)=v^{\alpha+\gamma}e^{-\rho v}u^{\frac{1}{\sigma}s_k-(\alpha+\beta)}e^{-\frac{s_k-s_w}{\sigma}}=g(v)h(u) \tag{13}$$

注 (14) 第一積分とは位相図において，各解経路上で一定になるような関数のことをいう。

$$g'(v)=e^{-\rho v}v^{\alpha+\gamma}\left(\frac{\alpha+\gamma}{v}-\rho\right)$$

かつ

$$h'(u)=e^{-\frac{s_k-s_w}{\sigma}}u^{\frac{1}{\sigma}s_k-(\alpha+\gamma)}\left(\frac{\frac{1}{\sigma}s_k-(\alpha+\gamma)}{\sigma}-\frac{s_k-s_w}{\sigma}\right)$$

であるから，関数 $g(v)$ と関数 $h(u)$ は同じような形状の関数になっている。実際，各関数は正の実数半直線 $\mathbb{R}_{++}$ 上において v, v が定常均衡点の値をとるとき一意な正の最大値をとる。よって，関数 $H(v, u)$ の等高線は定常均衡点を囲む閉曲線群となる。これで，グッドウィンの体系の解経路が定常均衡点を囲む閉軌道（の群）からなることがわかった。[15]

命題 1（グッドウィン）(8)と(10)からなる系の解は，

$$s_k>\sigma(\alpha+\beta)>s_w$$

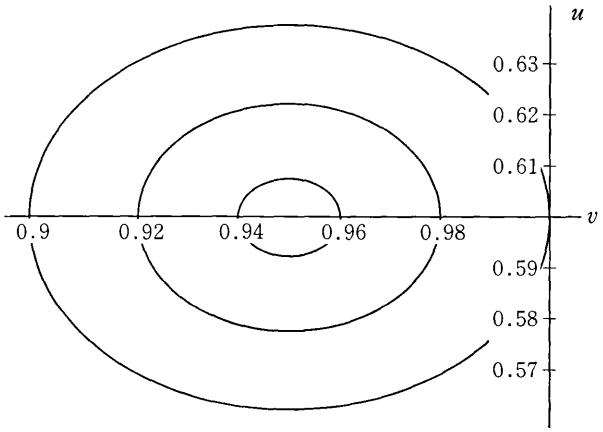
と

$$\alpha+\gamma<\rho$$

が満たされるとき，正象限上で定常均衡点を除いて閉軌道群として特徴づけられる。

関数 $g(v)$ と関数 $h(u)$ は，ともに最大点を境にして非対称であるため，解曲線である閉軌道は，図2に見られるように定常均衡点の近傍ではほとんど楕円に近い形状をもつが，正確には楕円ではなく大きめの循環の場合には上昇過程と下降過程で非対称になる可能性がある。もっとも，極端な場合でも10パーセント内外である現実的な変動ではそうした循環経路の非対称性が生ずることはほ

図 2



注 (15) ここで得られた閉軌道は決して極限閉軌道にはならない。というのも，リャプノフ関数 $\log(H(v^*, v^*))-\log(H(v, u))$ が任意の開集合で一定にならないからである。この議論についてはハーシュ＝スメール [16] の 12 章をみよ。

とんどないと思われる。[16]

尚，上の命題は，定常均衡点が経済学的に意味のある解，つまり v^* も u^* もともにゼロと1の間にあるとき，それ自体がゼロと1の間にとどまり続けるような意味のある循環の存在も保証していることに注意せよ。次の節では，グッドウィン模型を若干修正し，極限閉軌道が生ずる条件を調べる。

4. 漸近安定閉軌道

伊藤 [17] に従って，この節では漸近安定な極限閉軌道を持つ成長循環模型を示す。議論と記法を単純化するため，$s_w=0$ と $s_k=1$ を仮定する。つまり，労働者は貯蓄することなく資本家は消費することがないとする。この仮定は，本質的ではない。実際この仮定を緩和しても結論は変わらないが，以下で示す分岐の計算はずっと煩雑になる。

まず，デサイ [6] と同様にフィリップス曲線を労働市場における交渉を反映したものと考えて，グッドウィン模型の修正を試みる。つまり，実質賃金率の上昇や下降は，雇用率 v で表現される交渉の場での労働需要・供給の状況を反映すると考える。つぎに，反応過程に一種の経済統計の認知に関するラグを導入する。つまり，労働者は賃金交渉の場において雇用状況についての過去のデータのみ利用可能だとする。形式的には，方程式(10)において，現在の雇用率 v を τ 期間だけ前の雇用率 $v(t-\tau)$ で置き換えることで，ラグを導入する。その結果，われわれの体系は方程式(8)ならびに

$$\frac{\dot{u}}{u}=-(\alpha+\gamma)+\rho v(t-\tau), \tag{14}$$

からなる微分・差分混合体系になる。この体系はやや扱いにくいため，グッドウィン [9] にならって，ラグ付き動学変数 $v(t-\tau)$ を時間についてテーラー展開をし，2次以上の項を無視するという以下の近似を行う。

$$v(t-\tau)\approx v(t)-\tau\dot{v}(t), \tag{15}$$

もちろんこの近似を行うとき，τ は十分小さくなくてはならない。

次に，われわれは人口の成長率が不変であるという仮定を緩和する。具体的には，人口成長率あるいは労働供給の成長率が，雇用率 v の増加関数であると想定する。ここでも簡単化のため，以下の一次関数による近似を考える。

$$\frac{\dot{n}}{n}=\beta_0+\beta_1 v. \tag{16}$$

以降，この論文では β_0, β_1 ともに定数とする。符号，大きさについてはのちにふれる。われわれは，ゼロに十分近い実数と考えて，β_1 を分岐パラメターとして採用する。人口成長率と雇用率に相関が

注 (16) 図2は4次のルンゲ＝クッタ法によるコンピュータ・シミュレーションを用いて描いた。

あるとするこの式は，雇用率で表される労働者の生活水準と労働者の労働供給意欲あるいは出生率の間に，なんらかの関係があるとしている。[17]

数学的には，方程式(16)の右辺の第2項は，ロトカ＝ボルテラ体系に対して緩衝要因を導入する。サミュエルソン [25] が指摘したように，緩衝要因を導入したときロトカ＝ボルテラ系の渦心点は，緩衝要因を打ち消すような反緩衝要因が存在しない限り，安定渦状点あるいは不安定渦状点に変化する。

方程式(15)と(16)を使って，次の方程式体系を得る。

$$\frac{\dot{v}}{v}=\frac{1-u}{\sigma}-(\alpha+\beta_0+\beta_1 v) \tag{17}$$

$$\frac{\dot{u}}{u}=-(\alpha+\gamma)+\rho v-\tau\rho\dot{v}. \tag{18}$$

分析の便宜上，(17)と(18)を次のように書き直す。

$$\dot{v}=av-buv-\beta_1 v^2 \tag{19}$$

$$\dot{u}=-du+\rho(1-a\tau)\,uv+b\rho\tau u^2 v+\rho\tau\beta_1 uv^2 \tag{20}$$

ここで，$a=\frac{1}{\sigma}-\alpha-\beta_0,\ b=\frac{1}{\sigma},\ d=\alpha+\gamma$ である。

われわれは後で，定常均衡点が経済学的に意味のある領域に位置することを保証するための仮定を設けるが，今，一時的に a を正と仮定し，u, v ともに非負になる領域に関心を限定する。このことは，すでにみたように，非負領域が不変集合になることから正当化されよう。

われわれの模型において安定な極限閉軌道の存在を証明する前に，もともとの模型とこの節で修正された模型の比較を行ってみよう。まず，v-u 平面上で $\dot{v}=0$ かつ $\dot{u}=0$ となる条件をもとめてみる。元々の模型では，

$$\dot{v}=0 \iff (v=0 \text{ or } u=1-(\alpha+\beta)\sigma)$$

$$\dot{u}=0 \iff \left(u=0 \text{ or } v=\frac{\alpha+\gamma}{\rho}\right)$$

となるのに対し，修正された模型では

$$\dot{v}=0 \iff (v=0 \text{ or } a-bu-\beta_1 v=0)$$

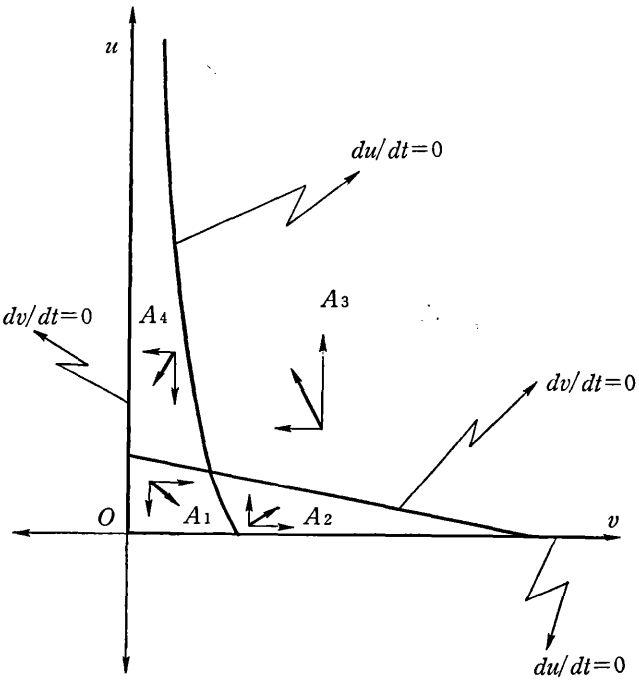
$$\dot{u}=0 \iff (u=0 \text{ or } -d+\rho(1-a\tau)\,v+b\rho\tau uv+\rho\tau\beta_1 v^2=0)$$

となる。

図1と図3でわかるように，もともとの模型で水平と垂直であった，$\dot{v}=0$ と $\dot{u}=0$ に対応する

注 (17) 細田衛士助教授から，前出の定常均衡の雇用率 v^* の背後に，$\frac{\dot{n}}{n}=\zeta(v-v^*)$ という人口成長率の調整方程式を考えうるというご指摘をいただいた。その場合，上の (16) の β_1 と ζ が等しくなることに注意せよ。つまり，その場合定常雇用率への調整速度が分岐パラメターになるという解釈ができる。

図 3



v-u 平面の軌跡が，緩衝要因が入ると v に関しての曲線が負の勾配をもつように変化する。一方，ラグの導入はもう一方の曲線を歪める。ふたつの模型とも非負領域は不変集合になる。前の節で分けた位相図の四つの領域の性質は，修正された模型においても基本的に不変のままであることに注意せよ。つまり，対応する各領域での変化の矢印の向きは二つの模型で同一である。

これから，ホップ分岐定理を用いて，分岐パラメターがある範囲にあるとき，方程式(19)と(20)からなる系が，少なくともひとつの安定な極限閉軌道を持つことを示そう。

2次元の非線形景気循環模型を扱った論文のほとんどは，ポアンカレ＝ベンディクソン定理を使って極限閉軌道の存在を示している。われわれの場合，コンパクトでありかつ不安定な定常均衡点をもつ不変集合，あるいはあるコンパクト集合内に留まり続けながら均衡点に収束もしない経路のどちらかを見つけるのも，困難であるためポアンカレ＝ベンディクソン定理はそれほど役にたたない。[18] 実際，図3において v 軸上の均衡点が経済学的に意味のある値をとるとして，その点の近傍から出発する経路で，$\dot{u}=0$ に対応する曲線にぶつかるものがみつかったとすると，ポアンカレ＝ベンディクソン定理で閉軌道の存在はとりあえず証明できる。しかし，そうしたことは分岐パラメターの大きさについての定量的な情報と位相図における上述の経路の大きさの関係が明確でないため，

注 (18) ア・プリオリに境界

$$\{(v,u)\in\mathbb{R}^2 \mid (0\leq v\leq 1 \text{ and } u=1) \text{ or } (v=1 \text{ and } 0\leq u\leq 1)\}$$

における系の挙動を考え，$[0,1]^2$ が u－v 平面の不変集合になるようにしてしまえばポアンカレ＝ベンディクソン定理が適用できる。

不可能であるし，経路上でuとvがともに1以下になるという保証もない。さらに，そこで存在が示された閉軌道がアトラクターになっているかどうかの判定もできない。われわれの模型のように関数形が具体的になっているとき，ポアンカレ＝ベンディクソン定理よりホップ分岐定理のほうが有用である。

われわれはつぎにあげる，単純なホップ分岐定理を用いる。

定理 1（Hopf）[19] パラメター化された体系

$$\dot{x}_1 = X_1(x_1, x_2, \tau)$$

$$\dot{x}_2 = X_2(x_1, x_2, \tau)$$

が任意の実パラメターτに対して原点が定常点になるとする。さらに，線形化された体系の固有値$\lambda_1(\tau)$と$\lambda_2(\tau)$が$\tau=\tau_0$のとき，純虚根であると仮定する。もし固有値の実部$Re[\lambda_1(\tau)]$（$=Re[\lambda_2(\tau)]$）が$\frac{d}{d\tau}(Re[\lambda_1(\tau)])|_{\tau=\tau_0}>0$を満たすとし，$\tau=\tau_0$のとき原点が漸近安定な不動点であるとすると，

（a） $\tau=\tau_0$は体系の分岐点。

（b） $\tau_1<\tau_0$であるτ_1とτ_0が存在して，$\tau\epsilon(\tau_1, \tau_0)$となる任意の$\tau$に対して原点は安定渦状点。

（c） $\tau_2>\tau_0$であるτ_2とτ_0が存在して，$\tau\epsilon(\tau_0, \tau_2)$となる任意の$\tau$に対して原点は不安定渦状点となり，それを漸近安定な極限閉軌道が囲む。さらにその極限閉軌道の大きさはτの大きさに比例する。

まず，ホップ分岐が起こると期待される均衡点（不動点）が原点になるように元の体系を変数変換する。方程式(19)と(20)はすでに指摘したように，三つ均衡点をv-u平面でもつ。原点（0, 0）とv軸上の点$\left(\frac{a}{\beta_1}, 0\right)$，$v$-$u$平面の内点$\left(\frac{d}{\rho}, \frac{1}{b}\left(a-\frac{d\beta_1}{\rho}\right)\right)$である。これらのうち，3番目の内点にある均衡点がホップ分岐の可能性がある。ここで，この均衡点が経済学的に意味をもつように，それぞれの要素がゼロと1の間に位置するための条件を仮定しておこう。

仮定 1

$$\alpha+\gamma<1$$

仮定 2

$$1>\sigma(\alpha+\beta_0+\beta_1).$$

仮定1は，vの均衡点が1より小さくなることを含意する。仮定2は，

注（19） アロウスミス＝プレース [1, Ch. 5] をみよ。また，ホップ分岐についてはハザードその他 [14] が詳しい。

$$1>\frac{\beta_1\sigma}{1-(\alpha+\beta_0)\sigma}$$

を含意する。このとき，さらに仮定1と併せて，

$$\rho>\frac{(\alpha+\gamma)\beta_1\sigma}{1-(\alpha+\beta_0)\sigma}$$

が含意される。この式の成立は，

$$a-\frac{d\beta_1}{\rho}>0$$

と同値であり，u が均衡で正になることを含意する。他方，

$$\frac{1}{b}\left(a-\frac{d\beta_1}{\rho}\right)<1$$

が

$$\alpha+\beta_0+\frac{d\beta_1}{\rho}>0,$$

と同値であるから，上の二つの仮定からは独立に u の均衡での値が1よりも小さくなることがわかる。

これらの仮定の下，次の式に従って変数変換を行なう。

$$v=y_1+\frac{d}{\rho}$$

$$u=y_2+\frac{1}{b}\left(a-\frac{d\beta_1}{\rho}\right)$$

これにより，われわれの体系は次のように変換される。

$$\dot{y}_1=-\frac{1}{\rho}(d+\rho y_1)(\beta_1 y_1+by_2) \tag{21}$$

$$\dot{y}_2=\frac{1}{b\rho}(a\rho-d\beta_1+b\rho y_2)((\rho+d\beta_1\tau)\,y_1+\rho\beta_1\tau y_1^2+bd\tau y_2+b\rho\tau y_1 y_2 \tag{22}$$

原点で評価されたヤコビ行列は，

$$A(\tau)=\begin{pmatrix} -\frac{d\beta_1}{\rho} & -\frac{bd}{\rho} \\ \frac{1}{b\rho}(a\rho-d\beta_1)(\rho+d\beta_1\tau) & ad\tau-\frac{d^2\beta_1\tau}{\rho} \end{pmatrix}$$

となる。この行列から次の特性方程式を得る。

$$\lambda^2-\mathrm{trace}\ A(\tau)\,\lambda+\det A(\tau)=0.$$

ここで，

$$\mathrm{trace}\ A(\tau)=-\frac{d}{\rho}(\beta_1-a\rho\tau+d\beta_1\tau) \quad と \quad \det A(\tau)=d\left(a-\frac{d\beta_1}{\rho}\right).$$

である。以下で，$A(\tau)$ の行列式が仮定1と仮定2から正となることに注意せよ。

$\tau=\dfrac{\beta_1}{a\rho-d\beta_1}$であるとき，$A(\tau)$ の固有値はふたつの純虚根

$$i\sqrt{d}\sqrt{a+\frac{d\beta_1}{\rho}} \qquad -i\sqrt{d}\sqrt{a-\frac{d\beta_1}{\rho}}$$

になる。ふたつの純虚根の積，trace $A(\tau_0)$ は

$$\frac{d(a\rho-d\beta_1)}{\rho}>0,$$

である。ここで，$\tau_0=\dfrac{\beta_1}{a\rho-d\beta_1}$である。このことは仮定1と仮定2から導かれる。これで，ホップ分岐が τ_0 の近傍で起こることがわかった。ここまでで，われわれは孤立した閉軌道の存在を証明した。

われわれの次の目標は，この閉軌道が循環的なアトラクタ（吸引域），つまり漸近安定な極限閉軌道かどうかを調べることである。この性質を調べるには変数変換した体系の原点が $\tau=\tau_0$ であるとき，漸近安定な渦心点であることを示さなくてはならない。このためには，リャプノフ関数を見つけるか，以下で行うように，ポアンカレの標準形を生成する体系をつくっていくつかの指数を計算しなくてはならない[20]。われわれは，ハザードその他 [14, Ch. 2] に従って，二番目の方法を採用する。この方法は多くの煩雑な計算をする必要があるが，閉軌道がアトラクタになるかどうかの判定は純粋に代数的に行えるという利点がある。

標準形をつくるために，もう一度変数変換をしておく必要がある。そのために以下の手続きに従う。

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=(\mathrm{Re}(v_1), -\mathrm{Im}(v_1))\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

ここで v_1 は $A(\tau_0)$ の一方の固有ベクトルとする。ちょっとした計算によって，次の行列を得る。

$$N=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{\beta_1}{b} & \dfrac{\rho\sqrt{a-\dfrac{d\beta_1}{\rho}}}{b\sqrt{d}} \end{pmatrix}$$

ここで，Nについて次の性質が成り立つことに注意せよ。

$$N^{-1}A(\tau_0)N=\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{d}\sqrt{a-\dfrac{d\beta_1}{\rho}} \\ \sqrt{d}\sqrt{a-\dfrac{d\beta_1}{\rho}} & 0 \end{pmatrix}$$

これは，実は分岐点で評価した標準形のヤコビ行列に他ならない。この変数変換によって，われわれは以下の動学体系を得る。

$$\dot{z}_1=-\frac{1}{\sqrt{d}}\left(d\sqrt{a-\frac{d\beta_1}{\rho}}z_2+\rho\sqrt{a-\frac{d\beta_1}{\rho}}z_1z_2\right)$$

注 (20)　ωを上の根の虚数部分とする。ポアンカレ標準形は係数行列の対角要素がゼロ，非対角要素がωと$-\omega$になる線形微分方程式に一階の非線形微小項をつけ加えたものである。

$$\dot{z}_2=\frac{1}{b\rho}\left(a\rho-d\beta_1+b\rho\left(-\frac{\beta_1 z_1}{b}+\frac{\rho\sqrt{a-\frac{d\beta_1}{\rho}}}{b\sqrt{d}}z_2\right)\right)$$

$$\left((\rho+d\beta_1\tau)z_1+\rho\beta_1\tau z_1^2+b\tau\left(-\frac{\beta_1 z_1}{b}+\frac{\rho\sqrt{a-\frac{d\beta_1}{\rho}}}{b\sqrt{b}}z_2\right)(d+\rho z_1)\right)$$

以下では，この微分方程式体系の第一式の右辺を f で，第二式の右辺を g で表すことにする。

最後に，閉軌道の漸近安定性を調べるために，分岐点で評価された f および g の高次導関数を計算し，安定性の指数を計算する。[21] もし，この指数の符号が負であるとき，すでに存在が示されている閉軌道は漸近安定である。[22]

$$I=|\omega|(f_{111}+f_{122}+g_{112}+g_{222})(f_{11}g_{11}-f_{11}f_{12}+g_{11}g_{12}+g_{22}g_{12}-f_{22}f_{12}-f_{22}g_{22}),$$

ここで

$$f_{111}=f_{122}=0,$$

$$g_{112}=-\frac{2\rho^2\beta_1\tau\sqrt{a-\frac{d\beta_1}{\rho}}}{b\sqrt{d}},$$

$$g_{222}=f_{11}=0,$$

$$f_{12}=-\frac{\rho}{\sqrt{d}}\sqrt{a-\frac{d\beta_1}{\rho}}$$

$$f_{22}=0,$$

$$g_{11}=-\frac{2\rho\beta_1}{b},$$

$$g_{12}=\frac{\rho\sqrt{a-\frac{d\beta_1}{\rho}}\,(\rho+\tau(a\rho-d\beta_1))}{b\sqrt{d}},$$

$$g_{22}=\frac{2\rho\tau(a\rho-d\beta_1)}{b}.$$

である。よって，

$$I=-\frac{2\beta_1\tau\rho^2\left(a-\frac{d\beta_1}{\rho}\right)}{b}<0.$$

を得る。

注 (21) グッケンハイマー＝ホームス [13, p. 152] を見よ。

(22) f をある開集合上で連続微分可能な関数として，$p(t)$ を $\dot{x}=f(x)$ の T-期周期解とする。つまり，$x=f(x)$，($p(t+T)=p(t)$ for all t in $\mathbb{R}$) である。このとき，p が漸近（軌道）安定であるとは，ある $\varepsilon>0$ が存在して $|\psi(t_0)-p(t_0)|<\varepsilon$ が任意の解 $\psi(t)$ に対して時点 t_0 で成立するとき，ある定数 ϕ が存在して t の増加に従って $|\psi(t)-p(t+\phi)|$ がゼロに収束することをいう。ハザードその他 [14, Ch. 1] を見よ。

仮定よりこの指数の符号が負であることがわかる。さらに，周期解の振幅はこの指数に近似的に比例する。この結果を元々の変数で表すと，

$$I=-2\beta_1\tau\rho(\rho-(\alpha+\beta_0)\sigma\rho-(\alpha+\gamma)\sigma\beta_1).$$

となる。以上から次の命題が得られた。

命題 2 修正されたグッドウィン模型，(19)と(20)は，仮定1と2のもとで漸近安定な極限閉軌道をもち，その振幅はラグの長さに比例する。

命題2は，仮定1と2の下でフィリップス曲線の傾きが急であるほど，極限閉軌道が生じやすくなることを示唆する。これは仮定1と2から

$$\rho>\frac{(\alpha+\gamma)\sigma\beta_1}{1-(\alpha+\beta_0)\sigma}$$

が導かれることから容易にわかる。さらに元々の模型同様，分岐パラメタの選び方によってその振幅はいくらでも小さくなる。よって，均衡点を囲むような経済学的に意味のある周期解は常に存在する。その場合周期解は正方形領域 $(0.1)^2$ に完全に含まれる。

5. 結　語

最初に，元々のグッドウィン模型が，非線形な微分方程式でありながら比較的単純な形式を持っていることを強調しておく。実際，グッドウィン体系を見ればわかるように，二つある動学変数それぞれの成長率は，もう一方の変数の一次関数になっている。このことは，体系の実証研究が行い易いことを示唆する。というのも，ふたつの動学変数の成長率データと，もう一方の変数を回帰すればよいからである。

4節では，情報の認識ラグと，労働供給の成長率と雇用率の間の関数関係を導入して，グッドウィン模型に安定な極限閉軌道が存在することを示した。さらに，その極限閉軌道の振幅がラグの長さに近似的に比例することを示した。つまり，情報伝達のラグが長いほど，景気循環の振幅が長くなる傾向がある。これは，情報伝達に障害が，景気変動に関係することを示唆する。こうした，性質は元々のグッドウィン模型にはなかったものである。また，フィリップス曲線の傾きが急であればあるほど，極限閉軌道の存在条件が満たされやすくなることもわかった。最後に，我々の模型では極限閉軌道が存在する条件と，それが漸近軌道安定性を保証する条件が同一であることに注意しよう。

4節でグッドウィン模型を修正するとき，カルドア [19] が採用したのとは違った内生的技術進歩を導入することができる。つまり，労働生産性の成長率が一人あたりの資本ではなく雇用率に依存するとおくのである。ここで，本来のグッドウィン模型が恒常成長経路上を循環する模型であり，

そこで仮定された技術進歩がハロッド中立なものであったことに注意せよ。こうした型の技術進歩を導入すると，カルドア型の内生的技術進歩の導入が，元々のグッドウィン模型の本質を変えないのに対し，緩衝要素が発生することになる。しかし，他の型，つまり，カルドア型技術進歩でもなくこの論文の技術進歩でもないもので，グッドウィン模型に緩衝要素をもたらすような技術進歩が存在するかどうかは，わからない。なお，4節で用いた労働供給の成長率と雇用率の一次関数による関係，あるいは上で触れた技術進歩関数が線形であるかどうかは，ホップ分岐の存在とは関係はないが，計算の量に関係してくる。

最後に，この論文で漸近安定な極限閉軌道の存在を証明するのに用いたホップ分岐定理について触れておこう。この定理は，極限閉軌道の存在証明によく使われる，ポアンカレ＝ベンディクソン定理と異なり，3次元以上の場合にも適用できる。また，極限閉軌道の漸近安定性までチェックできるが，ホップ分岐の計算はハザードその他 [14, Ch. 2] が言うように，しばしば煩雑である。また，この定理は基本的に常微分方程式体系の局所的な性質を扱うものであり，我々の模型における情報ラグの長さのような分岐パラメターが相対的に小さい場合にのみ適用できる。とはいうものの，いくつかの代数的指数を計算することで，最低限でも閉軌道の存在を，さらに場合によっては漸近安定的な極限閉軌道の存在をも，示せることは，この定理が非線形景気循環模型を考えるとき有用な分析用具になることを示唆する。

実際には，漸近安定な極限閉軌道の存在を示すのは，事実上困難な場合が多い。ホップ分岐定理を古典的なケインズ模型に応用して景気循環の存在を示した，トーレ [28] の場合も，定理1でホップ分岐が生ずることをケインズ模型における標準的な仮定から導いているが，極限閉軌道の存在に関する定理2では存在条件がポアンカレ写像についての条件になっており，その条件を満足する模型上の経済学的性質は不明のままである。少し前のセムラー [27] などでも状況は同じである。漸近安定性まで証明した論文としては，最近のボールドリンその他 [2] を挙げることができる。

参考文献

[1] Arrowsmith D.K. and Place C.M. *Ordinary Differential Equations.* Chapman and Hall, London-New York, 1982.

[2] Boldrin M.N. Kiyotani and R. Wright. "A Dynamic Equilibrium Model of Search, Production and exchange" *discussion paper*, 1991.

[3] Chang W.W. and Smyth D.J. "The Existence and Persistence of Cycles in a Non-Linear Model: Kaldor's 1940 Model Reexamined." *Review of Economic Studies*, 37 : 37-44, 1970.

[4] Chow G.C. "Multiplier, accelerator, and liquidity preference in the Determination of National Income in the United States." *Review of Economics and Statistics*, 39 : 39-69, 1967.

[5] Chow G.C. "The Acceleration Principle and the Nature of Business Cycles." *Quarterly Journal of Economics*, 83:39-69, 1968.

[6] Desai M. "Growth Cycles and Inflation in a Model of the Class Struggle." *Journal of Economic Theory*, 6:527-545, 1973.

[7] Flaschel P. "Some Stability Properties of Goodwin's Growth Cycle: A Critical Elaboration." *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 44:63-69, 1984.

[8] Glombowski J. and M. Krüger. "Generalization of Goodwin's Growth Cycle Model." In Casti J. Batten D. and Johansson B., editors, *Economic Evolution and Structural Adjustment*, pages 260-90. Springer Verlag, 1988.

[9] Goodwin R. M. "The Non Linear Accelerator and the Persistence of the Business Cycle." *Econometrica*, 19:1-17, 1951.

[10] Goodwin R. M. "Growth Cycle." In *Socialism, Capitalism and Economic Growth*. Cambridge, 1967.

[11] Goodwin R. M. "Growth Cycle." In *A Critique of Economic Theory*. Penguin, 1972.

[12] Grasman J. *Asymptotic Methods for Relaxation Oscillation and Application*. Springer, New York, 1987.

[13] Guckenheimer J. and P. Holmes *Nonolinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, New York, 1983.

[14] Hassard B. D. Kazarinoff N. D. and Wan Y-H. *Theory and Application of Hopf bifurcation*. Cambridge University Press, Cambridge, 1981.

[15] Hickman B. G. (ed.). "*Econometric Models of Cyclical Behaviour*," volume 36. Columbia University Press, 1972.

[16] Hirsch M. W. and Smale S. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press, New York, 1974.

[17] Ito M. "On a Limit Cycle of Goodwin's Growth Cycle Model." unpublished mimeograph, 1991.

[18] Long J. B. and Plosser C. I. "Real Business Cycle." *Journal of Political Economy*, 91:39-69, 1983.

[19] Kaldor N. "A Model of the Trade Cycle." *Economic Journal*, 50:78-92, 1940.

[20] Pliss V. A. *Nonlocal Problems of the Theory of Oscillations*. Academic Press, New York, 1966.

[21] Ploeg van der F. "Predator-Prey and Neo-Classical Models of Cyclical Growth." *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 43:235-56, 1983.

[22] Pohjola M. T. "Stable, Cyclical and Chaotic Growth: The Dynamics of A Discrete Version of Goodwin's Growth Cycle Model." *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 41, 1981.

[23] A. B. Poore. "On the Theory and Application of the Hopf-Friedrich Bifurcation." *Archive of Rational Mechanic Analysis*, 60:371-93, 1976.

[24] Rau N. "*Trade Cycles: Theory and Evidence*." Macmillan, London, 1974.

[25] Samuelson P. A. "A Universal Cycle?." In *The Collected Scientific Papers of P. A. Samuelson*, pages 473-86. MIT press, 1980.

[26] Sato Y. "Marx-Goodwin Growth Cycles in a Two-Sector Economy." *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 45:21-34, 1985.

[27] Semmler W. "A Macroeconomic Limit Cycle with Financial Perturbations" *Journal of Economic Behavior and Organization*, 8:469-495.

[28] Torre V. "Existence of Limit Cycles and Control in Complete Keynesian System by Theorem of Bifurcation" *Econometrica*, 45:1457-1466, 1977.

[29] Velupillai K. "Some Stability Properties of Goodwin's Growth Cycle." *Zeitschrift für Natinalökonomie*, 30:245-57, 1979.

[30] Wolfstetter E. "Fiscal Policy and the Classical Growth Cycle." *Zeitschrift für Nationalökonomie*, 42:375-93, 1982.

(経済学部専任講師)