

Title	公共財供給メカニズムの戦略的操作不可能性
Sub Title	Cost share rules and strategy-proof mechanisms in public good economies
Author	大瀬戸, 真次
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1992
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.85, No.3 (1992. 10) ,p.476(124)- 489(137)
JaLC DOI	10.14991/001.19921001-0124
Abstract	
Notes	特集：経済学会コンファレンス：公共経済学の新展開
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19921001-0124

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

公共財供給メカニズムの戦略的操作不可能性

大瀬戸 真次*

1. はじめに

公共財の供給に際して、意思決定をしなければならない事項が少なくとも2つある。公共財をどれだけ供給するかということと、各個人にどのように費用を負担させるかということである。本論文では、費用負担の方法が外生的に与えられると仮定して、公共財の供給量に焦点を絞ってメカニズム論の観点から考察する。メカニズム（あるいは社会選択関数）とは、社会を構成する個人の選好の組から社会的な帰結への関数である。すなわち、メカニズムを実行することによって、社会を構成する個人の選好を反映するような意思決定をしようというのである。通常メカニズムデザイナーは、メカニズムにパレート最適性や公平性を備えさせることにより、社会的に望ましい帰結を達成しようとする。ところが、メカニズムのインプットである選好の表明が正直になされないとしたら、メカニズムにいくら良い性能をもたせたところで意味がない。そこでメカニズムに、各個人が正直に選好を表明するような構造をもたせよう。メカニズムが戦略的操作不可能性（strategy-proofness）をもつとは、各個人にとって正直に選好を表明することが支配戦略であることをいう。戦略的操作不可能なメカニズムのもとでは、選好を偽って表明するインセンティブが存在しない。またメカニズムに対するもう1つの基礎的な要求は、自主的参加性（voluntary participation）である。自主的参加性とは、メカニズムに参加することによって不利益を被ることがないという条件である。本論文では、戦略的操作不可能性と自主的参加性という性質をもつメカニズムを模索していく。

Gibbard [3]-Satterthwaite [10] の定理によると、各個人が任意の弱順序選好をとりうるという環境のもとでは、値域が3点以上である戦略的操作不可能なメカニズムは独裁性をもつ。Barbera and Peleg [2] は個人の選好集合を連続性をもつ選好に限定しても、同様の不可能性定理が成り立つことを、Zhou [11] は連続性かつ凸性をもつ選好に限定しても、値域が2次元以上である戦略的

* この論文の作成にあたって、西條辰義、壺谷整克、笥晶昭の各氏から与えられた有益な示唆と助言に感謝したい。また、1992年9月に開催された慶應義塾大学経済学会主催のコンファレンスにおける報告に際して、コンファレンス参加者から頂いたコメントに感謝したい。

操作不可能なメカニズムは独裁性をもつことをそれぞれ示した。Moreno and Walker [4] は私的財の存在する場合においても、効率性に関する弱い条件を加えることにより同様の不可能性を示した。一方、Moulin [7] は私的財 1 財・公共財 1 財の経済で、個人のとりうる選好集合を連続性と凸性と単調性をもつものに限定して、提携による戦略的操作不可能性や自主的参加性などの性質をもつメカニズムを提示した。

本論文では、公共財供給における固定費用の存在に着目し、Moulin [7] では扱われていない固定費用がメカニズムの設計に与える影響を吟味する。また Moulin [7] のモデルとの違いは、費用負担ルールが外生的に与えられたもとでの、公共財の供給量を決定するメカニズムについての議論であるということである。但し、ここで得られた結果は Moulin [8] の結果を用いて、より一般的なメカニズムにおける議論に拡張することができる。与えられる費用負担ルールとは、公共財の任意の供給量に対して、個人の費用負担を記述する関数の組である。考察する費用負担ルールのクラスは、各個人の費用負担が公共財の費用関数と同様の性質（具体的には、単調増加性や凸性など）をもっているものに限定する。

まず、公共財供給の費用関数が凸性をもち固定費用を必要としない場合を考察する。このとき平均費用は逓増あるいは一定である。ここで扱う費用負担ルールは凸性をもつものである。公共財が 1 財のときには、最小供給メカニズムが戦略的操作不可能性と自主的参加性を満たすことがわかる。さらにメカニズムが上への写像であるという条件を要求するとその唯一性も示される。公共財が 2 財以上のときには、Zhou [11] の結果を用いて、戦略的操作不可能性と自主的参加性を満たすメカニズムが存在しないことを示すことができる。

次に、公共財供給の費用関数が固定費用を必要とする場合を考察する。このとき平均費用曲線は逓減あるいは U 字型となる。固定費用が存在することにより、もはや費用負担ルールに凸性をもたせることはできない。したがって、最小供給メカニズムは前述の性質をもたないのであるが、費用負担ルールが凸性をもつような公共財の供給量だけにメカニズムの値域を限定すれば、最小供給メカニズムはうまく機能する。逆に費用負担ルールが凸性をもたないような供給量を値域とするようなメカニズムで、戦略的操作不可能性と自主的参加性を満たすものはないことが示される。すなわちメカニズムに戦略的操作不可能性と自主的参加性を要求するならば、平均費用が逓減している部分を値域から排除しなければならないのである。このことは、固定費用の存在が人々の選択の幅を狭くし、したがって効率性の観点からみると望ましくない状況を生じさせることを意味している。

論文の以下の構成は次の通りである。2 章ではモデルの説明をする。3 章では固定費用のない場合、4 章では固定費用のある場合について論じる。5 章で関連事項との関係などを述べて結びとする。

2. モデル

$n(n \geq 2)$ 人の個人から構成される社会 $N = \{1, \dots, n\}$ を考える。社会には、2つのタイプの財があり、 x を負の私的財、 $y = (y_1, \dots, y_m)$ を m 財からなる公共財のベクトルとする。第 i 番目の公共財は、 $Y_i = [0, y_{i \max}]$ の範囲で任意の量の生産が可能であるとする。ここで、 $y_{i \max}$ はすべての i について有限の値である。可能な公共財の供給空間を $Y = \prod_{i=1}^m Y_i$ であらわす。公共財供給の費用関数は、 $c(y_1, \dots, y_m)$ で与えられる。 $X = [0, \max\{c(y_1, \dots, y_m)\}]$ は公共財供給の費用負担の可能な値域であるとし、負の私的財の空間に相当する。

個人 i の配分を $(y_1, \dots, y_m; x_i)$ であらわす。ここで x_i は公共財の供給量が $y = (y_1, \dots, y_m)$ であるときの個人 i の費用負担である。個人 i は、 $Y \times X$ 上に連続で強く凸かつ単調 (y_1, \dots, y_m に関して非減少、 x に関して非増加) な選好を持ち、これを u_i と記す。各個人は上記の性質を満たすすべての選好をとりうると仮定し、この集合を D とする。ここで扱う選好は効用関数表示が可能であり、任意の $a, b \in Y \times X$ に対して $u_i(a) \geq u_i(b)$ とかいて「選好 u_i において、 a は b よりも強く好まれるか無差別である」の意味とする。 $u_i(a) > u_i(b)$ と $u_i(a) = u_i(b)$ はそれぞれ強い選好と無差別をあらわす。 D 中の選好 u_i と任意の部分集合 $B \subset Y \times X$ が与えられたとき、 B 中で u_i の効用最大化の配分が唯一に定まるならば、その配分を $\operatorname{argmax}(u_i; B)$ と記す。 n 人の個人の選好を並べたリスト $u = (u_1, \dots, u_n)$ をプロファイルという。 D のカルテシアン積 D^n で可能なプロファイルの集合をあらわす。

個人 i の費用負担関数とは、公共財の任意の生産量 (これは消費量に等しい) に対して、個人 i の費用負担を与える関数である。

$$f_i: Y \rightarrow X$$

費用負担ルールとは、 n 人の費用負担関数のリストである。

$$f = (f_1, \dots, f_n)$$

定義 2.1 ある与えられた費用関数 c に対して、費用負担ルール $f = (f_i)_{i \in N}$ が実行可能であるとは、任意の $y = (y_1, \dots, y_m) \in Y$ に対して $\sum_{i \in N} f_i(y_1, \dots, y_m) \geq c(y_1, \dots, y_m)$ が成立することである。

ある費用関数 c に対して、実行可能な費用負担ルールの集合を F_c と記す。

例 2.2 (1) 費用を n 人で均等に負担するルールを均等負担ルールという。すなわち、任意の $i \in N$ に対して $f_i = c/n$ である。均等負担ルールは実行可能である。

(2) 任意の i に対して $p_i > 0$ 、 $\sum_{i \in N} p_i = 1$ となるようなベクトル $p = (p_1, \dots, p_n)$ を考える。個人 i が p_i に応じて費用を負担するルール $f_i = p_i c$ は実行可能である。

任意の実行可能な費用負担ルール $f \in F_c$ に対して、実現可能な帰結の集合を A_f であらわす。

$$A_f = \{(y_1, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) \mid \text{すべての } i \text{ に対して } y_i \in Y_i \text{ かつすべての } i \in N \text{ に対して } x_i = f_i(y_1, \dots, y_m)\}$$

個人 i に対する実現可能な配分の集合を A_f^i であらわす。

$$A_f^i = \{(y_1, \dots, y_m; x_i) \mid \text{すべての } i \text{ に対して } y_i \in Y_i \text{ かつ個人 } i \text{ に対して } x_i = f_i(y_1, \dots, y_m)\}$$

実行可能な費用負担ルール $f \in F_c$ に対してメカニズムを定義する。メカニズム G_f とは、任意のプロファイル $u = (u_1, \dots, u_n) \in D^n$ に対して、ある A_f 中の帰結を与える関数である。

$$G_f: D^n \rightarrow A_f$$

メカニズム G_f の値域を $r(G_f)$ であらわし、 $\#r(G_f)$ と $\dim(r(G_f))$ はそれぞれ Y 上に射影された値域の個数と次元をあらわす。

またメカニズム G_f に対応する個人 i の配分を与える関数を G_f^i とかく。 G_f^i の値域を $r^i(G_f^i)$ と書く。

以下では、各個人は自分自身の選好、費用負担関数、及びメカニズムの構造をよく理解しているものと仮定して議論を進める。

定義 2.3 メカニズム G_f が戦略的操作不可能性を満たすとは、任意の $u = (u_1, \dots, u_n) \in D^n$ と $i \in N$ と $\bar{u}_i \in D$ に対して、 $u_i(G_f^i(u)) \geq u_i(G_f^i(\bar{u}_i, u_{-i}))$ が成立することである。但し $u_{-i} = (u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_n)$ である。

戦略的操作不可能なメカニズムのもとでは、正直に選好を表明することが各個人にとって支配戦略である。すなわち、各個人は選好を偽るインセンティブを持たない。メカニズム G_f が戦略的操作不可能性を満たさないとき戦略的操作可能であるといい、ある $u = (u_1, \dots, u_n) \in D^n$ と $i \in N$ と $\bar{u}_i \in D$ に対して、 $u_i(G_f^i(\bar{u}_i, u_{-i})) > u_i(G_f^i(u))$ が成立する。

定義 2.4 メカニズム G_f が自主的参加性を満たすとは、任意の $u = (u_1, \dots, u_n) \in D^n$ と $i \in N$ に対して、 $u_i(G_f^i(u)) \geq u_i(0, \dots, 0; 0)$ が成立することである。

自主的参加性とは、メカニズムの結果はすべての個人にとって初期状態よりも悪くはないという条件である。

次の補題は、ある帰結が全員一致で最も好まれていてかつメカニズムの値域に含まれているとき、戦略的操作不可能なメカニズムはその帰結を選ぶことを示している。この補題は次章以下の定理の証明に有用である。

補題 2.5 (Barbera and Peleg[2], Zhou [11]) 任意の費用負担ルール $f \in F_c$ が与えられたとしよう。メカニズム G_f が戦略的操作不可能性を満たし、 $(y; f_1(y), \dots, f_n(y)) \in r(G_f)$ かつすべての $i \in N$ に対して $(y; f_i(y)) = \operatorname{argmax}(u_i; r^i(G_f^i))$ ならば、 $G_f(u) = (y; f_1(y), \dots, f_n(y))$ である。

3. 最小供給メカニズム：固定費用のない場合

本節では、公共財の供給に固定費用を必要としない場合を考察する。特に費用関数が強く単調増加で凸性を満たし、 $c(0, \dots, 0) = 0$ である場合である。このとき公共財供給の平均費用は逓増または一定である。このようなときに用いられる費用負担ルールは次の性質を満たしていると仮定する。

前提 3.1 費用負担ルール $f = (f_i)_{i \in N}$ は次の性質を満たす。：任意の $i \in N$ に関して f_i は強く単調増加で凸性を満たし、 $f_i(0, \dots, 0) = 0$ である。

前提 3.1 を満たす実行可能な費用負担ルールの集合を \bar{F}_c であらわす。例 2.2 で示した均等負担ルールなどは、前提 3.1 を満たす。分析対象とする費用負担ルールをこのようなクラスに制限した理由は主に次の2つである。第1点は、費用関数と同様の形状をもつ費用負担関数は、社会的に受け入れられ易いであろうということである。第2点は費用負担関数が凸性を満たしていないような費用負担ルールのもとでは、第4節において明らかにされるように、戦略的操作不可能性と自主的参加性を満たすメカニズムを構築できないからである。ある費用負担ルールが与えられたとしよう。各選好の情報のうち有効な情報は、 A_i^y 上の選好だけに限られる。さらに A_i^y から Y への一対一で上への射影が存在するので、 A_i^y 上の選好を Y 上の選好と考えることもできる。すなわち各個人が Y 上の選好を表明するようなメカニズムと解釈することもできる。

まず、公共財が1財である場合を考えよう。費用負担関数の凸性と選好の強い凸性より、任意の費用負担関数 f_i と任意の選好 $u_i \in D$ に対して、 A_i^y 上に限定した u_i の選好は単峰性⁽¹⁾を満たす。したがって各個人 i に対して、 A_i^y 上の効用最大の配分は唯一に定まり、これを $(y_i^*(u_i); f_i(y_i^*(u_i)))$ と記す。また任意の $u = (u_i)_{i \in N}$ に対して、 $y_i^*(u_i)$ の中で最小のものを $y^*(u)$ とおく。

定義 3.2 最小供給メカニズム G_i^* とは、任意のプロファイル $u \in D^n$ に対して、 $(y^*(u); f_1(y^*(u)), \dots, f_n(y^*(u)))$ を与えるメカニズムである。

最小供給メカニズムは、各個人が選好を表明するという形で表現されているが、実際には各個人の効用最大の配分 $(y_i^*(u_i); f_i(y_i^*(u_i)))$ を表明するだけでよい。公共セクターは、 $y^*(u)$ だけの公共財を供給し、 $(f_1(y^*(u)), \dots, f_n(y^*(u)))$ に応じて費用を徴収すればよいのである。

補題 3.3 (Moulin [7]) 任意の費用負担ルール $f \in \bar{F}_c$ に対して、最小供給メカニズム G_i^* は戦略的操作不可能性⁽²⁾ (提携による戦略的操作不可能性) と自主的参加性を満たす。

注 (1) 選好 u_i が A_i^y 上で単峰性を満たすとは、任意の $y' < y'' < y_i^*(u_i)$ に対して $u_i(y'; f_i(y')) < u_i(y''; f_i(y'')) < u_i(y_i^*(u_i); f_i(y_i^*(u_i)))$ が成立し、任意の $y_i^*(u_i) < y' < y''$ に対して $u_i(y_i^*(u_i); f_i(y_i^*(u_i))) < u_i(y'; f_i(y')) < u_i(y''; f_i(y''))$ が成立することをいう。

効率性に関する弱い条件を加えると、最小供給メカニズムの唯一性が示される。それはメカニズムの値域が A_f 全体であるという条件である。

定義 3.4 メカニズム G_f が上への写像であるとは、任意の $y(0 \leq y \leq y_{\max})$ に対して $G_f(u) = (y; f_1(y), \dots, f_n(y))$ となるような $u \in D^n$ が存在することをいう。

定理 3.5 任意の費用負担ルール $f \in \bar{F}_c$ に対して、最小供給メカニズム G_f^* は戦略的操作不可能性と自主的参加性を満たし、上への写像である唯一のメカニズムである。

定理 3.5 は任意の供給量が達成可能であるようなメカニズムの中で、戦略的操作不可能性と自主的参加性を満たすものは最小供給メカニズムだけであることを示している。上への写像という性質を外し、供給量が離散的になるときや閉区間上で可能である場合のメカニズムの考察は、4 節に含まれる。

最小供給メカニズムは、ある意味で全員一致のメカニズムである。したがって、各個人の公共財に対する需要を反映した費用負担ルールが与えられない場合には、公共財の供給は過小供給になってしまう。上の定理は、フリーライダーの問題と過小供給の問題の相反する性質も示している。

また本論文では、費用負担ルールが外生的に与えられたもとの供給量決定のメカニズムについて議論している。すなわちメカニズムの値域は A_f 上に限定されている。もっと一般的に公共財の供給量と費用負担の両方を決定するようなメカニズムを考えれば、最小供給メカニズムが与える帰結よりもパレート優位な帰結を与えるようなメカニズムがあるかもしれない。そのようなメカニズムで戦略的操作不可能性と自主的参加性を満たすものは、いまだ特徴付けがなされていない。Moulin [7] はそのような環境のもとで、提携による戦略的操作不可能性と自主的参加性と匿名性を満たし、上への写像である唯一のメカニズムは均等費用負担で最小供給であることを示している⁽³⁾。

次に、公共財が 2 財以上の場合を考察する。公共財が 1 財の場合とは異なり、Zhou [11] の結果より、否定的な結論が得られる。

定理 3.6 任意の費用負担ルール $f \in \bar{F}_c$ に対して、戦略的操作不可能性と自主的参加性を満たし $\dim(r(G_f)) \geq 2$ であるようなメカニズム G_f は存在しない。

この定理は戦略的操作不可能性と自主的参加性を満たし、値域が Y に関して 2 次元以上であるようなメカニズムが存在しないことを示している。値域が Y に関して 2 次元以上であるという条件は、 Y に関して一直線上にない 3 点が値域に含まれれば十分に満たされる。逆に公共財が 2 財以上ある

注 (2) メカニズム G_f が提携による戦略的操作不可能性を満たすとは、任意の $u \in D^n$ と提携 $T \subset N$ と提携のプロファイル $\bar{u}_T \in D^{|T|}$ に対して、ある $i \in T$ に関して $u_i(G_f^i(\bar{u}_T, u_{-T})) > u_i(G_f^i(u))$ であるならば、 $u_j(G_f^j(u)) > u_j(G_f^j(\bar{u}_T, u_{-T}))$ であるような $j \in T$ が存在することをいう。ここで (\bar{u}_T, u_{-T}) とは、 $i \in T$ に関して \bar{u}_i 、 $i \in N$ に関して u_i であるようなプロファイルである。

(3) メカニズム G_f が匿名性を満たすとは、ある $i, j \in N$ に関して $u_i \equiv u_j$ であるような $u \in D^n$ に対して $u_i(G_f^i(u)) = u_j(G_f^j(u))$ が成立することをいう。

場合でも値域が2点からなるメカニズムや値域が Y に関して原点を通る直線上であるメカニズムが戦略的操作不可能性と自主的参加性を満たす可能性は残っている。実際、最小供給メカニズムがそのような環境でうまく機能することは、容易に確かめられる。

4. 不可能性定理：固定費用のある場合

この節では、公共財供給の費用関数が強く単調増加で凸性を示し、固定費用を必要とする場合を考察する。このとき公共財供給の平均費用曲線はU字型あるいは逡減を示す。前提3.1を満たすいずれの費用負担ルールも実行可能ではない。なぜならば、それらの費用負担ルールは、原点の近くでは費用を賄えないからである。そこで、個人の費用負担関数 f_i が固定費用の部分 f_i^f と可変費用の部分 f_i^v の和であらわされるような費用負担ルールを考え、次のような仮定をおく。

前提 4.1 費用負担ルール $f=(f_i)_{i \in N}=(f_i^f+f_i^v)_{i \in N}$ は次の性質を満たすものとする。：任意の $i \in N$ に対して、固定費用負担関数 f_i^f は $(y_1, \dots, y_m)=(0, \dots, 0)$ のとき $f_i^f(y_1, \dots, y_m)=0$, $(y_1, \dots, y_m) \neq (0, \dots, 0)$ のとき $f_i^f(y_1, \dots, y_m)=F_i$ とする。ここで任意の i について F_i は正の定数である。また f_i^v は強く単調増加で凸性をもち $f_i^v(0, \dots, 0)=0$ であるとする。

前提4.1を満たす実行可能な費用負担ルールの集合を \hat{F}_c とする。例2.2で挙げた均等負担ルールなどは、前提4.1を満たす。前提4.1を満たす費用負担ルールのもとでは、すべての個人が固定費用を負担する。その結果、費用負担関数 f_i は Y 上で凸性をもたないし、連続性ももたない。

公共財が1財の場合を考えよう。先にも述べたように費用負担関数は Y 上で凸性も連続性ももたない。したがって、任意の選好 $u_i \in D$ を A_i^f 上に制限して考えると、選好の単峰性はもはや満たされない。そのため最小供給メカニズムは、 Y 全体上では戦略的操作不可能性と自主的参加性を満たさないが、メカニズムの値域を適当に制限すればそれらの性質を満たすようにできる。

定義 4.2 費用負担ルール $f=(f_i)_{i \in N} \in \hat{F}_c$ が $W \subset Y$ 上で凸性をもつとは、すべての費用負担関数 f_i が W 上で凸性をもつことをいう。⁽⁴⁾

上の定義において、 W が Y の中で凸集合であることは要求しない。任意の費用負担ルール $f=(f_i)_{i \in N} \in \hat{F}_c$ と Y 中の閉集合 W に対して、 $A_i(W)=\{(y; f_1(y), \dots, f_n(y)) \mid y \in W\}$ 及び $A_i^f(W)=\{(y; f_i(y)) \mid y \in W\}$ とおく。⁽⁵⁾ 費用負担ルール $f=(f_i)_{i \in N} \in \hat{F}_c$ が W 上で凸性をもち、選好 $u_i \in D$ が強い凸性をもつことから、 u_i の $A_i^f(W)$ 上での効用最大の配分は唯一かあるいは2点にな

注(4) ある Y の部分集合 W に対して、費用関数 c が W 上で凸性をもつならば例2.2で挙げた費用負担ルールは W 上で凸性をもち、またその逆も成り立つ。

(5) メカニズムの値域が閉集合であることは、戦略的操作不可能性の必要条件である。Barbera and Peleg [2], Zhou [11], Barbera and Jackson [1] を参照せよ。

る。そのような配分をそれぞれ $(y'_i(u_i)|_w; f_i(y'_i(u_i)|_w))$ と $(y^*_i(u_i)|_w; f_i(y^*_i(u_i)|_w))$ であらわす。但し、効用最大化の配分が唯一に定まるときは $y'_i(u_i)|_w = y^*_i(u_i)|_w$ であり、2点になるときは $y'_i(u_i)|_w < y^*_i(u_i)|_w$ とする。ここで、ある $u_i \in D$ に対して $y'_i(u_i)|_w < y^*_i(u_i)|_w$ であるならば、 $y'_i(u_i)|_w < y < y^*_i(u_i)|_w$ であるような任意の y について $(y; f_1(y), \dots, f_n(y)) \notin A_f(W)$ であることに注意されたい。任意の $u = (u_i)_{i \in N} \in D^n$ に対して、 $y'_i(u_i)|_w$ の中で最小のものを $y'(u)|_w$ 、 $y^*_i(u_i)|_w$ の中で最小のものを $y^*(u)|_w$ とおく。次に最小供給タイプのメカニズムを定義する。 Y 中の閉集合 W に対して、 $A_f(W)$ への最小供給タイプのメカニズムとは、プロフィール $u \in D^n$ に対して $(y'(u)|_w; f_1(y'(u)|_w), \dots, f_n(y'(u)|_w))$ または $(y^*(u)|_w; f_1(y^*(u)|_w), \dots, f_n(y^*(u)|_w))$ を与えるものである。最小供給タイプのメカニズムすべてが戦略的操作不可能性と自主的参加性を満たすわけではない。最小供給タイプのメカニズムの中で特に次のメカニズムを考える。

定義 4.3 W を Y 中の閉集合とする。 $A_f(W)$ への最小供給メカニズム G_f^* とは、プロフィール $u \in D^n$ に対して、 $(y^*(u)|_w; f_1(y^*(u)|_w), \dots, f_n(y^*(u)|_w))$ を与えるメカニズムである。

補題 4.4 W を $0 \in W$ であるような Y 中の閉集合とする。 W 上で凸性をもつような任意の費用負担ルール $f \in \hat{F}_c$ に対して、 $A_f(W)$ への最小供給メカニズム G_f^* は戦略的操作不可能性（提携による戦略的操作不可能性）と自主的参加性を満たす。

$A_f(W)$ への最小供給メカニズム G_f^* は戦略的操作不可能性と自主的参加性を満たす唯一のメカニズムではない。しかしながら、戦略的操作不可能性と自主的参加性を満たす他のメカニズムはパレートの意味で最小供給メカニズム G_f^* に支配されている。メカニズム G_f が \bar{G}_f をパレート支配するとは、任意のプロフィール $u \in D^n$ と個人 $i \in N$ に対して $u_i(G_f^*(u)) \geq u_i(\bar{G}_f^*(u))$ が成り立つことである。

定理 4.5 W を $0 \in W$ であるような Y 中の閉集合とする。 W 上で凸性をもつような任意の費用負担ルール $f \in \hat{F}_c$ に対して、戦略的操作不可能性と自主的参加性を満たし $r(G_f) = A_f(W)$ であるような任意のメカニズム G_f は、 $A_f(W)$ への最小供給メカニズム G_f^* によってパレート支配される。

ある Y 中の閉集合 W に対して、費用負担ルール $f \in \hat{F}_c$ が W 上で凸性をもたないような場合に、 $A_f(W)$ を値域とするメカニズムの性質について考察しよう。まず Y 中の異なる3点からなる集合 T 上で費用負担ルールが凸でないということを定義する。

定義 4.6 費用負担ルール $f = (f_i)_{i \in N} \in \hat{F}_c$ が3点集合 $T \subset Y$ 上で凸でないとは、すべての費用負担関数 f_i が T 上で凸でないことをいう。すなわち、 $T = \{y^1, y^2, y^3 \in Y \mid y^1 < y^2 < y^3\}$ に対して $f_i(y^2) > \{(y^3 - y^2)f_i(y^1) + (y^2 - y^1)f_i(y^3)\} / (y^3 - y^1)$ が成り立つことである。⁽⁶⁾

定理 4.7 Y 中のある 3 点集合 T 上で凸でない費用負担ルール $f \in \hat{F}_c$ に対して、戦略的操作不可能性と自主的参加性を満たし、 $r(G_f)$ が $A_f(T)$ を含むようなメカニズム G_f は存在しない。

この定理は簡単にいうと、公共財供給の平均費用が逓減している部分を値域として含むようなメカニズムで、戦略的操作不可能性と自主的参加性を満たすものは存在しないことをいっている。但し、メカニズムの値域が 2 点であるなどの特殊な場合は必ずしもこの限りではない。固定費用が存在することにより、メカニズムに戦略的操作不可能性と自主的参加性を求めるならば、メカニズムの値域を限定しなければならないのである。

次に、公共財が 2 財以上の場合を考えよう。

定理 4.8 任意の費用負担ルール $f \in \hat{F}_c$ に対して、戦略的操作不可能性と自主的参加性を満たし、 $\dim(r(G_f)) \geq 2$ であるメカニズム G_f は存在しない。

前提 4.1 を満たす費用負担ルールの特殊ケースとして、可変費用負担関数が線形である場合を考えよう。このとき公共財供給の平均費用は逓減する。この場合には公共財の数にかかわらず、定理 4.7 と定理 4.8 より、戦略的操作不可能性と自主的参加性を満たし、値域が 3 点以上であるようなメカニズムが存在しないことがわかる。メカニズムの値域が 3 点以上という条件は、Gibbard [3]-Satterthwaite [10] や Barbera and Peleg [2] においても重要な役割を果たしている。

前提 4.9 各個人の固定費用負担関数 $f_i^?$ は線形である。

前提 4.9 を満たす費用負担ルールの集合を \hat{F}_c であらわす。

系 4.10 任意の費用負担ルール $f \in \hat{F}_c$ に対して、戦略的操作不可能性と自主的参加性を満たし、 $\#r(G_f) \geq 3$ であるメカニズム G_f は存在しない。

5. 結 び

本論文で扱った費用負担ルールは、可変費用部分が凸性をもっているものに限定されている。もしかすると、そのような性質をもたない費用負担ルールに対して、戦略的操作不可能性や自主的参加性やその他の望ましい条件を満たすメカニズムを設計できるかもしれない。しかしながら、定理 4.7 や定理 4.8 からわかるように、部分的にでも凸でない費用負担ルールに対しては不可能性が示される可能性が高い。

ここでは、純粋な公共財に対するメカニズムについて検討した。Moulin [7] は排除性をもつ公

注(6) ある Y 中の 3 点集合 T に対して、費用関数 c が T 上で凸性をもたないならば例 2.2 で挙げた費用負担ルールは T 上で凸性をもたないし、またその逆も成り立つ。また任意の Y の部分集合 W に対して、例 2.2 で挙げた費用負担ルールは W 上で凸性をもつか、そうでなければある $T \subset W$ 上で凸性をもたない。

共財に対するメカニズムについて考察を行い、公共財供給に固定費用を必要としない場合に、リアルメカニズムがより良い性能をもつことを示している。リアルメカニズムは、その値域を適当に限定すれば、公共財供給に固定費用が必要な場合にも良い性能をもつことが予想される。

公共財の私的供給に関して、Saijo [9] は戦略的操作不可能性と強い個人合理性 (autarkically individual rationality) を満たすメカニズムが存在しないことを示している。しかし、戦略的操作不可能性と個人合理性 (individual rationality) を満たし値域が2次元以上であるメカニズムが存在するか否かは、いまだ明らかにされていない。本論文の結果は、この問題にも深い関わりがあると思われる。

補 論

補題 2.5 の証明

$(y; f_1(y), \dots, f_n(y)) \in r(G_f)$ より $G_f(\bar{u}) = (y; f_1(y), \dots, f_n(y))$ となるようなプロファイル $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n)$ が存在する。 $G_f(u) \neq (y; f_1(y), \dots, f_n(y))$ と仮定して、矛盾を導こう。

$i=0, \dots, n$ に対して、 $z_i = G_f(u_1, \dots, u_i, \bar{u}_{i+1}, \dots, \bar{u}_n)$ とおく。ここで $z_0 = (y; f_1(y), \dots, f_n(y))$, $z_n \neq (y; f_1(y), \dots, f_n(y))$ である。すると $z_{j-1} = (y; f_1(y), \dots, f_n(y))$ かつ $z_j \neq (y; f_1(y), \dots, f_n(y))$ であるような $j (1 \leq j \leq n)$ が存在する。したがって、 G_f は個人 j にとってプロファイル $(u_1, \dots, u_j, \bar{u}_{j+1}, \dots, \bar{u}_n)$ において \bar{u}_j をとることにより、戦略的操作可能である。

証明終わり

補題 3.3 の証明

任意の選好 $u_i \in D$ の A_i^* への制限を考えよう。そのようにして A_i^* 上に制限された選好の集合を E とおく。 E は A_i^* 上のすべての単峰性を満たす選好の集合となる。単峰性選好上での一般的な議論より G_i^* は戦略的操作不可能性 (提携による戦略的操作不可能性) を満たすことがわかる。さらに、任意の $u \in D^n$ と $i \in N$ に対して $0 \leq y_i^*(u) \leq y_i^*(u_i)$ であり、単峰性より $u_i(0; 0) \leq u_i(y^*(u); f_i(y^*(u))) \leq u_i(y_i^*(u_i); f_i(y_i^*(u_i)))$ なので自主的参加性も満たされる。

証明終わり

定理 3.5 の証明

補題 3.3 より G_i^* が戦略的操作不可能性と自主的参加性を満たすことがわかる。また G_i^* が上への写像であることは明らかである。以下では、唯一性を示す。

いま G_i^* 以外に戦略的操作不可能性と自主的参加性を満たし上への写像であるメカニズム G_f があると仮定しよう。2つのケースに分けて考える。

最初に、 $G_f(u) = (\bar{y}^1; f_1(\bar{y}^1), \dots, f_n(\bar{y}^1))$, $\bar{y}^1 < y^*(u)$ となるようなプロファイル $u \in D^n$ が存在する場合を考えよう。一般性を失うことなく、個人の番号を付け替えることにより $y^*(u) = y_i^*(u_1)$

$\leq y_2^*(u_2) \leq \dots \leq y_n^*(u_n)$ と仮定することができる。すると $y^*(u) = y_1^*(u_1) \neq y_n^*(u_n)$ が成立している。そうでなければ、補題 2.5 より $G_f(u) = (y^*(u); f_1(y^*(u)), \dots, f_n(y^*(u)))$ が成立するからである。 $y^*(u) \neq y_j^*(u_j)$ であるような最小の番号 j をとってくる。任意の $k = j, \dots, n$ に対して、 $\operatorname{argmax}(\bar{u}_k; A_k^f) = (y^*(u); f_k(y^*(u)))$ かつ $\bar{u}_k(y_k^*(u_k); f_k(y_k^*(u_k))) = \bar{u}_k(0; 0)$ であるような選好 \bar{u}_k を定義する。自主的参加性より $G_f(u_1, \dots, u_{j-1}, \bar{u}_j, u_{j+1}, \dots, u_n) = (\bar{y}^2; f_1(\bar{y}^2), \dots, f_n(\bar{y}^2))$, $\bar{y}^2 \in [0, y_j^*(u_j)]$ が成立する。したがって $\bar{y}^2 \leq \bar{y}^1$ である。そうでなければ、個人 j が u において \bar{u}_j をとることにより戦略的操作可能だからである。同様の議論を繰り返していくと、 $G_f(u_1, \dots, u_{j-1}, \bar{u}_j, \dots, \bar{u}_n) = (\bar{y}; f_1(\bar{y}), \dots, f_n(\bar{y}))$, $\bar{y} \leq \bar{y}^1 < y^*(u)$ を得る。しかし G_f は上への写像であり、補題 2.5 より $G_f(u_1, \dots, u_{j-1}, \bar{u}_j, \dots, \bar{u}_n) = (y^*(u); f_1(y^*(u)), \dots, f_n(y^*(u)))$ が成立するので、これは矛盾である。

次に、 $G_f(u) = (\hat{y}^1; f_1(\hat{y}^1), \dots, f_n(\hat{y}^1))$, $y^*(u) < \hat{y}^1$ となるようなプロフィール $u \in D^n$ が存在すると仮定する。一般性を失うことなく、同様に個人の番号を付け替える。 $\operatorname{argmax}(\bar{u}_1; A_1^f) = (y^*(u); f_1(y^*(u)))$ であり、かつ $y^*(u) < \hat{y}^2 < \hat{y}^1$ であるようなある \hat{y}^2 に対して $\bar{u}_1(0; 0) = \bar{u}_1(\hat{y}^2; f_1(\hat{y}^2))$ が成り立つような \bar{u}_1 をとってくる。自主的参加性より $G_f(\bar{u}_1, u_2, \dots, u_n) = (\hat{y}^3; f_1(\hat{y}^3), \dots, f_n(\hat{y}^3))$, $\hat{y}^3 \in [0, \hat{y}^2]$ である。 $u_1(\hat{y}^4; f_1(\hat{y}^4)) = u_1(\hat{y}^1; f_1(\hat{y}^1))$ となる \hat{y}^4 があればとってくる。もしなければ、個人 1 は u において \bar{u}_1 をとることにより戦略的操作可能である。また $\hat{y}^3 \in [\hat{y}^4, \hat{y}^2]$ ならば、個人 1 は u において \bar{u}_1 をとることにより戦略的操作可能である。したがって、 $\hat{y}^3 \in [0, \hat{y}^4]$ であり $\hat{y}^3 < y^*(\bar{u}_1, u_2, \dots, u_n)$ が成立する。 $(\bar{u}_1, u_2, \dots, u_n)$ に対して初めの議論を適用すると矛盾が導かれる。

証明終わり

定理 3.6 の証明

任意の選好 $u_i \in D$ の A_i^f 上への制限を考えよう。そのようにして得られた A_i^f 上の選好の集合を E であらわす。費用負担関数 f_i の凸性と選好の強い凸性より、 E はすべての連続かつ強い凸である選好の集合となる。そのような環境のもとでは、Zhou [11] の結果より戦略的操作不可能性を持ち、 $\dim(r(G_f)) \geq 2$ であるメカニズムは独裁性をもつことが知られている。メカニズムが独裁性をもつとは、ある独裁者 $i \in N$ が存在して任意の $u \in D^n$ と $a \in r^i(G_f^i)$ に対して $u_i(G_f^i(u)) \geq u_i(a)$ が成立することをいう。独裁性と自主的参加性は両立しないことを示そう。個人 $i \in N$ を独裁者と仮定しよう。 $\operatorname{argmax}(u_i; r^i(G_f^i)) = (y_1, \dots, y_m; x_i) \neq (0, \dots, 0; 0)$ かつある $j (\neq i)$ に対して $\operatorname{argmax}(u_j; A_j^f) = (0, \dots, 0; 0)$ であるようなプロフィール $u = (u_i)_{i \in N} \in D^n$ をとってくる。独裁的なメカニズム G_f は u に対して $(y; f_1(y), \dots, f_n(y))$, $y = (y_1, \dots, y_m)$ を与える。 $u_j(0, \dots, 0; 0) > u_j(G_f^j(u)) = u_j(y; f_j(y))$ なので個人 j にとって自主的参加性は満たされない。

証明終わり

補題 4.4 の証明

補題 3.3 と同様に証明できる。

定理 4.5 の証明

定理 3.5 と同様にして、戦略的操作不可能性と自主的参加性を満たし、 $r(G_f) = A_f(W)$ であるメカニズム G_f は最小供給タイプであることが証明できる。任意の $u = (u_i)_{i \in N} \in D^n$ と $i \in N$ に対して明らかに $y'(u)|_w \leq y^*(u)|_w \leq y_i^*(u)|_w$ である。選好の単峰性より G_f は $A_f(W)$ への最小供給メカニズム G_f^* にパレート支配される。

証明終わり

定理 4.7 の証明

定理の条件を満たすような 3 点集合 T が存在すると仮定しよう。個人の可変費用負担関数は凸性をもつので、必ず $0 \in Y$ は T に含まれる。 T の要素を $0, y', y'' (0 < y' < y'')$ とおく。 Y 中の $y', y'', [y', y'']$ を含む閉区間をそれぞれ $S(y'), S(y''), S([y', y''])$ であらわす。 $\text{Bd}(S)$ で S の境界点の集合をあらわす。もし $y'' \neq y_{\max}$ ならば $y' \notin \text{Bd}(S(y'))$, $y'' \notin \text{Bd}(S(y''))$, $S(y') \cap S(y'') = \emptyset$, $S(y') \subset S([y', y''])$, $\text{Bd}(S(y')) \cap \text{Bd}(S([y', y''])) = \emptyset$, $S(y'') \subset S([y', y''])$, $\text{Bd}(S(y'')) \cap \text{Bd}(S([y', y''])) = \emptyset$, $0 \notin \text{Bd}(S([y', y'']))$ を満たすような $S(y'), S(y''), S([y', y''])$ を考える。また $y'' = y_{\max}$ ならば $y' \notin \text{Bd}(S(y'))$, $\{y''\} \neq S(y'')$, $S(y') \cap S(y'') = \emptyset$, $S(y') \subset S([y', y''])$, $\text{Bd}(S(y')) \cap \text{Bd}(S([y', y''])) = \emptyset$, $0 \notin \text{Bd}(S([y', y'']))$ を満たすような $S(y'), S(y''), S([y', y''])$ を考える。ここで次の性質を満たすような 4 種類の選好 $u_i, \bar{u}_i, \hat{u}_i, \bar{u}_i$ を D からとってくる。

$u_i: \text{argmax}(u_i; r^i(G_f^i)) = (y'; f_i(y'))$ かつ任意の $y \in \text{Bd}(S(y'))$ に対して $u_i(y; f_i(y)) = u_i(0; 0)$

$\bar{u}_i: \text{argmax}(\bar{u}_i; r^i(G_f^i)) = (y''; f_i(y''))$ で任意の $y \in \text{Bd}(S([y', y''])) \setminus \{y''\}$ に対して $\bar{u}_i(y; f_i(y)) = \bar{u}_i(0; 0)$ かつ任意の $\tilde{y}^1, \tilde{y}^2 \in \text{Bd}(S(y'')) \setminus \{y''\}$ に対して $\bar{u}_i(\tilde{y}^1; f_i(\tilde{y}^1)) = \bar{u}_i(\tilde{y}^2; f_i(\tilde{y}^2))$

$\hat{u}_i: \text{argmax}(\hat{u}_i; r^i(G_f^i)) = (y'; f_i(y'))$ で任意の $y \in \text{Bd}(S([y', y''])) \setminus \{y''\}$ に対して $\hat{u}_i(y; f_i(y)) = \hat{u}_i(0; 0)$ かつ任意の $\hat{y}^1, \hat{y}^2 \in \text{Bd}(S(y'))$ に対して $\hat{u}_i(\hat{y}^1; f_i(\hat{y}^1)) = \hat{u}_i(\hat{y}^2; f_i(\hat{y}^2))$

$\bar{u}_i: \text{argmax}(\bar{u}_i; r^i(G_f^i)) = (y''; f_i(y''))$ かつ任意の $y \in \text{Bd}(S(y'')) \setminus \{y''\}$ に対して $\bar{u}_i(y; f_i(y)) = \bar{u}_i(0; 0)$

ここで、任意の $y \in S(y')$ に対して $\bar{u}_i(y; f_i(y)) > \bar{u}_i(0; 0)$, 任意の $y \in S(y'')$ に対して $\hat{u}_i(y; f_i(y)) > \hat{u}_i(0; 0)$ であることに注意しよう。

補題 2.5 より $G_f(u_1, \dots, u_n) = (y'; f_1(y'), \dots, f_n(y'))$ である。自主的参加性より $G_f(u_1, \dots, u_{n-1}, \bar{u}_n) = (y; f_1(y), \dots, f_n(y))$, $y \in \{0\} \cup S(y')$ でなければならない。もし $y = 0$ であれば、 $\bar{u}_n(y'; f_n(y')) > \bar{u}_n(0; 0)$ なので、個人 n は $(u_1, \dots, u_{n-1}, \bar{u}_n)$ において u_n をとることにより戦略的操作可能である。よって $y \in S(y')$ である。再び自主的参加性より $G_f(u_1, \dots, u_{n-2}, \bar{u}_{n-1}, \bar{u}_n) = (\bar{y}; f_1(\bar{y}), \dots, f_n(\bar{y}))$, $\bar{y} \in \{0\} \cup S(y')$ である。もし $\bar{y} = 0$ であれば、任意の $y \in S(y')$ に対して \bar{u}_{n-1}

$(y'; f_{n-1}(y')) > \bar{u}_{n-1}(0; 0)$ なので、個人 $n-1$ は $(u_1, \dots, u_{n-2}, \bar{u}_{n-1}, \bar{u}_n)$ において u_{n-1} をとることにより戦略的操作可能である。よって $\bar{y} \in S(y')$ である。同様の議論を繰り返すことにより $G_f(u_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n) = (y; f_1(y), \dots, f_n(y))$, $y \in S(y')$ が得られる。 (1)

また、補題 2.5 より $G_f(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \dots, \bar{u}_n) = (y''; f_1(y''), \dots, f_n(y''))$ である。自主的参加性より $G_f(\hat{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \dots, \bar{u}_n) = (y; f_1(y), \dots, f_n(y))$, $y \in \{0\} \cup S(y'')$ でなければならない。もし $y=0$ であれば、 $\hat{u}_1(y''; f_1(y'')) > \hat{u}_1(0; 0)$ なので、個人 1 は $(\hat{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \dots, \bar{u}_n)$ において \bar{u}_1 をとることにより戦略的操作可能である。したがって $y \in S(y'')$ である。 (2)

自主的参加性より $G_f(\hat{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \dots, \bar{u}_n) = (y, f_1(y), \dots, f_n(y))$, $y \in \{0\} \cup S([y', y''])$ でなければならない。もし $y=0$ であれば、 $\hat{u}_1(y''; f_1(y'')) > \hat{u}_1(0; 0)$ であり、また補題 2.5 より $G_f(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \dots, \bar{u}_n) = (y''; f_1(y''), \dots, f_n(y''))$ なので、個人 1 は $(\hat{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \dots, \bar{u}_n)$ において \bar{u}_1 をとることにより戦略的操作可能である。したがって $y \in S([y', y''])$ である。任意の $y \in S(y')$ と $\bar{y} \in S([y', y'']) \setminus S(y')$ に対して $\hat{u}_1(y; f_1(y)) > \hat{u}_1(\bar{y}; f_1(\bar{y}))$ なので、もし $y \notin S(y')$ ならば、(1) より個人 1 は $(\hat{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \dots, \bar{u}_n)$ において u_1 をとることにより戦略的操作可能である。また任意の $y \in S(y'')$ と $\bar{y} \in S([y', y'']) \setminus S(y'')$ に対して $\bar{u}_2(y; f_2(y)) > \bar{u}_2(\bar{y}; f_2(\bar{y}))$ なので、もし $y \notin S(y'')$ ならば、(2) より個人 2 は $(\hat{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \dots, \bar{u}_n)$ において \bar{u}_2 をとることにより戦略的操作可能である。すると y は $S(y')$ かつ $S(y'')$ の要素でなければならないが、これは仮定 $S(y') \cap S(y'') = \emptyset$ に矛盾する。

証明終わり

定理 4.8 の証明

定理 4.7 とほぼ同様に証明できる。

系 4.10 の証明

メカニズムの値域が Y に関して 1 次元の場合は定理 4.7 から、2 次元以上の場合は定理 4.8 から容易に導くことができる。

参考文献

- [1] Barbera, S. and M. Jackson (1991) "A Characterization of Strategy-Proof Social Choice Functions for Economies with Pure Public Goods," mimeo: Northwestern University.
- [2] Barbera, S. and B. Peleg (1990) "Strategy-Proof Voting Schemes with Continuous Preferences," *Social Choice and Welfare*, Vol. 7, 31-38.
- [3] Gibbard, A. (1973) "Manipulation of Voting Schemes: A General Result," *Econometrica*, Vol. 41, 587-602.
- [4] Moreno, D. and M. Walker (1991) "Nonmanipulable Voting Schemes When Participants' Interests Are Partially Decomposable," *Social Choice and Welfare*, Vol. 8, 221-233.
- [5] Moulin, H. (1980) "On Strategy-Proofness and Single Peakedness," *Public Choice*, Vol. 35, 437-455.
- [6] Moulin, H. (1987) "Equal or Proportional Division of a Surplus, and Other Methods," *Inter-*

- national Journal of Game Theory*, Vol. 16, 161-186.
- [7] Moulin, H. (1991) "Excludable Public Goods and the Free Rider Problem," mimeo: Duke University.
- [8] Moulin, H. (1991) "On the Fair and Coalition-Strategy-Proof Allocation of Private Goods," mimeo: Duke University.
- [9] Saijo, T. (1991) "Incentive Compatibility and Individual Rationality in Public Good Economies," *Journal of Economic Theory*, Vol. 55, 203-212.
- [10] Satterthwaite, M. A. (1975) "Strategy-Proofness and Arrow's Conditions: Existence and Correspondence Theorems for Voting Procedures and Social Welfare Functions," *Journal of Economic Theory*, Vol. 10, 187-217.
- [11] Zhou, L. (1991) "Impossibility of Strategy-Proof Mechanisms in Economies with Pure Public Goods," *Review of Economic Studies*, Vol. 58, 107-119.

(筑波大学大学院経営・政策科学研究科修士課程)