慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	段階的交渉とゲームの解対応の整合性
Sub Title	n-person bargaining processes and consistency of solutions for cooperative games
Author	蓼沼, 宏一
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1992
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.85, No.3 (1992. 10) ,p.452(100)- 466(114)
JaLC DOI	10.14991/001.19921001-0100
Abstract	
Notes	特集 : 経済学会コンファレンス : 公共経済学の新展開
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19921001-0100

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

「三田学会雑誌」85巻3号（1992年10月）

段階的交渉とゲームの解対応の整合性*

蓼沼宏一

1. はじめに

財の分配や利得の配分をめぐって多数の人々が参加する交渉は，どのように行われるか。参加者の数が多いほど，直ちに全員で交渉することは困難となる。そこで我々は通常，叩き台となる原案をもとにサブグループに分かれ，サブグループ内の配分について検討する。いくつかのサブグループ内の配分については原案が修正されることもあろう。そして，すべてのサブグループ内の交渉で是とされた案が全体交渉に付され，そこでも承認されれば最終的決定となる。このような段階的交渉過程は，近年の中東和平交渉や，毎年度の国家予算の編成交渉など，現実社会で広く見られるものである。

ところで，協力ゲームの解対応の公理的研究において，解対応の「整合性」と呼ばれる特性が近年中心的に研究されてきた。これは，ある利得配分がゲームの解に属するならば，それをサブグループに制限した配分はサブグループ内のゲームの解に属する，という特性である。本稿の第一の目的は，この解対応の整合性が，上で述べたような段階的交渉過程を矛盾なく説明するための必要条件であることを明らかにすることである。整合性に関しては，これまでに Harsanyi (1959, 1977) および Lensberg (1985) がそれぞれ解釈を与えている[(1)]が，本稿では，段階的交渉過程というコンテクストから意味を与えたい。

本稿の第二の目的は，サブグループ内の交渉問題を如何に定式化するか，という問題に焦点を当て，これまでに提示されている3つのタイプの定式化を比較検討することである。

---

* 本稿は，慶應義塾経済学会コンファレンス「公共経済学の新展開」及び1992年度理論・計量経済学会大会における筆者の報告に基づいている。その際に，金子守（筑波大学），佐々木宏夫（名古屋市立大学），戸田学（東京経済大学）の諸先生をはじめ，多くの方々から有益なコメントを戴いた。ここに記して感謝したい。もちろん，有り得る誤りは筆者のみに帰されるものである。

注（1） Harsanyi (1959, 1977) は，ある利得配分がグループ全体の妥協点ならば，どのサブグループのメンバーもサブグループ内で再配分しようとする誘因を持たない，と解釈し，Lensberg (1985) は，グループ全体で妥結した利得配分が異時点間に何人かのメンバーから順番に実行されるとき，実行途中でまだ利得を受け取っていない人々への配分が変更されることはない，と解する。

公理的研究ではしばしば，整合性等のいくつかの特性を満たす解対応が唯一に定まることが示される。この種の定理は，その解対応の特性化定理（characterization theorem）と呼ばれる。本稿の第三の目的は，整合性を主たる特性として得られた，いくつかの解対応の特性化定理を整理展望することである。パレート最適性と個人合理性という2つの最も基本的な要請の各々を，整合性と併せて課したとき，これらの要請を満たす解対応の範囲がどれだけ絞られるか，という角度から整理は行われる。また，サブグループ内の交渉問題の定式化の相違が特性化定理にもたらす差異も強調される。最後に，段階的交渉過程を矛盾なく説明するという観点から，特に core 対応の特性化定理の意味を探る。

2. 段階的交渉過程

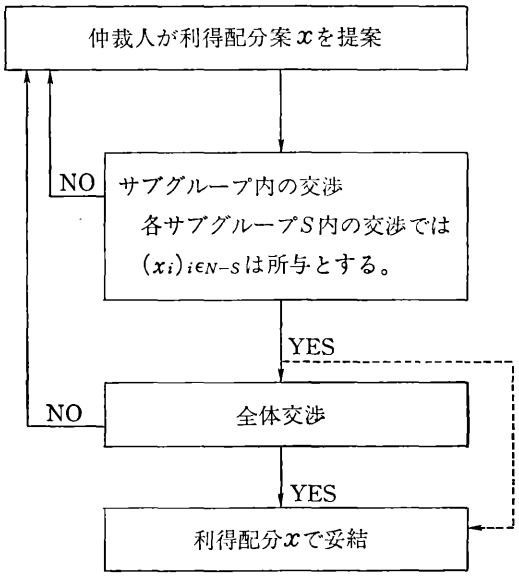
本稿で考える段階的交渉過程について説明することから始めよう。いま，n人のグループNが，全員が協調したときに得られる利得 $v(N)$ を如何に配分するか，という問題に直面している。利得の配分は，n次元の実ベクトル$\boldsymbol{x}$によって示される。第 i 個人の受け取る利得は x_i であり，各個人の利得の合計が総利得 $v(N)$ を超えないような配分は実行可能である。

さて，利得配分に関する交渉は，以下のようなプロセスで行われるとする。図1は，交渉の流れを表したものである。

(1) まず，仲裁人が実行可能な利得配分のうちの1つを原案として提示する。これを x^0 としよう。

(2) n人の人々は，いくつかのサブグループに分かれ，サブグループ内の利得配分について原案を

図1　段階的交渉過程



是とするか検討する。但しこの時，サブグループ S 内の交渉では，S に属さない人々の利得は $\{x_i^0 | i \in N-S\}$ で所与とみなす。したがって，サブグループ S のメンバーが得られる総利得は $v(N)-\sum_{i \in N-S} x_i^0$ であり，この配分を巡って交渉する。

(3) あるサブグループ内の交渉で原案が否とされると，原案は破棄され，(1)に戻って仲裁人が修正案 x^1 を提案し，交渉を繰り返す。

(4) すべてのサブグループ内の交渉で，利得配分案 x^* が是とされると，この案はグループ全体の交渉に付される。

(5) 全体交渉で否決されると，利得配分案 x^* は破棄され，(1)に戻って仲裁人が修正案を提示し，交渉を繰り返す。

(6) 全体交渉でも承認されれば利得配分案 x^* が最終的決定となる。

以上の交渉プロセスを段階的交渉過程Aと呼ぼう。

ところで，現実の交渉過程ではしばしば，サブグループ内の交渉で是とされた案がそのまま最終的決定となることがある。あるいは，全体交渉は形式的に開かれるに過ぎないことも多い。このような交渉過程は，上の段階(4)で利得配分案 x^* が妥結点となり終了する。図1では，点線で示した流れがこの交渉過程を表す。これを段階的交渉過程Bと呼ぶことにする。

3. 提携形ゲームにおける解対応の整合性

人々が協調したときに得られる総利得をいかに配分するかという交渉問題は，協力ゲームとして記述される。各ゲームに対して，ある利得配分の集合を定める対応を，解対応（solution correspondence）と呼ぶ。解対応が各ゲームについて定める利得配分の集合は，交渉の結果生じ得る妥結点の集合と見なされ，そのゲームの解と呼ばれる。

さて，前節で述べた段階的交渉過程の帰結を矛盾なく説明するためには，解対応はどのような条件を満たさなければならないか。交渉過程Aを振り返れば直ちに分かるように，ある利得配分案がすべての段階の交渉を経て最終的に選ばれたならば，それはサブグループ内の交渉（段階(2)）でも選ばれていたはずである。いま，サブグループ内の交渉を記述するゲームを，「縮小ゲーム（reduced game)」と呼ぼう。上で述べたことを言い換えると，ある利得配分が一つのゲームの解に属しているならば，どのサブグループの縮小ゲームの解にも属していなければならない。これが解対応の整合性（consistency）と呼ばれる特性にほかならない。

一方，交渉過程Bを見ると，ある利得配分がどのサブグループの縮小ゲームの解にも属しているならば，全体のゲームの解にも属するという関係が成立する。これが解対応の逆整合性（converse consistency）という特性である。

議論を明確にするために，ここで形式的定義を導入しよう。我々が焦点を当てる段階的交渉過程

では，様々な人数のプレーヤーからなるゲームが考えられるから，考察のキャンバスとしてまず「潜在的プレーヤー」の集合を導入しなければならない。自然数の集合 $\mathbb{N}$ を**潜在的プレーヤーの集合**とする。**提携形ゲーム**，あるいは単に**ゲーム**とは，有限な数のプレーヤーの集合 $N\subset\mathbb{N}$ と，N のベキ集合上に定義される実数値関数 v のペア (N, v) である。プレーヤーの集合 N の部分集合を**提携**と呼ぶ。関数 v は**特性関数**と呼ばれ，各提携 S に対して，S のメンバーが協調したときに得られる利得 $v(S)$ を与える。空集合 ϕ に対しては，$v(\phi)=0$ と定義する。ゲーム全体の集合を Γ とする。

ゲーム (N, v) における利得配分は，$\#N$ 次元の実ベクトル x[(2)] で，$\sum_{i\in N} x_i \leqq v(N)$ を満たすものである。各利得配分 x および各提携 S について，x_S は x を S に制限したベクトル $x_S := (x_i)_{i\in S}$ を示す。利得配分 x は，$\sum_{i\in N} x_i = v(N)$ であるならば，**(N, v) においてパレート最適である**といい，すべての $i\in N$ について $x_i \geqq v(\{i\})$ であるならば，**(N, v) において個人合理的である**という。ゲーム (N, v) の利得配分全体の集合を $\mathrm{Z}(N, v)$，パレート最適な利得配分の集合を $\mathrm{P}(N, v)$，個人合理的な利得配分の集合を $\mathrm{I}(N, v)$，後の2つの集合の共通部分を $\mathrm{IP}(N, v)$ とする。

あるゲームの集合 $\Gamma_0\subset\Gamma$ が与えられたとする。**集合 Γ_0 上の解対応 φ** は，Γ_0 に属する各ゲーム (N, v) に，$\mathrm{Z}(N, v)$ のある非空の部分集合 $\varphi(N, v)$ を対応させる。

ゲーム (N, v)，利得配分 $x\in\mathrm{Z}(N, v)$，および N の部分集合 S が与えられたとする。**利得配分 x の下でサブグループ S に縮小されたゲーム**とは，集合 S と，S のベキ集合上に定義される実数値関数 v_x のペア (S, v_x) である。但し，関数 v_x は関数 v 及びベクトル x_{N-S} に依存して定義される。

定義1　解対応の整合性：ゲームの集合 Γ_0 上で定義された解対応を φ とする。すべての $(N, v)\in\Gamma_0$，及びすべての $x\in\mathrm{Z}(N, v)$ に対して，もし $x\in\varphi(N, v)$ ならば，N のすべての部分集合 S に対して $x_S\in\varphi(S, v_x)$ である，という関係が成立するとき，**解対応 φ は整合性を満たす**という。

定義1において，$x\in\varphi(N, v)$ のとき，プレーヤー数2の部分集合 S に対してのみ $x_S\in\varphi(S, v_x)$ であることを求めるならば，要請は弱められる。これを，**解対応の弱意の整合性**という。

定義2　解対応の逆整合性：ゲームの集合 Γ_0 上で定義された解対応を φ とする。すべての $(N, v)\in\Gamma_0$，及びすべてのパレート最適な利得配分 $x\in\mathrm{P}(N, v)$ に対して，もし N のすべての要素数2の部分集合 S に対して $x_S\in\varphi(S, v_x)$ であるならば，$x\in\varphi(N, v)$ である，という関係が成立するとき，**解対応 φ は逆整合性を満たす**という。

定義2で，パレート最適な利得配分だけでなく，すべての利得配分に対して所望の関係が成り立

注（2）　集合 N に属するメンバーの数を $\#N$ で表す。

つことを求めれば，要請は強められる。逆に，(1)パレート最適かつ個人合理的な利得配分のみを対象とし，(2)プレーヤー数2のサブグループだけでなく，すべてのサブグループ S について $x_S \in \varphi(S, v_x)$ であるときに，$x \in \varphi(N, v)$ である，という関係が成立することを求めるならば，要請は2つの意味で弱められる。これを**解対応の弱意の逆整合性**という。

4. 縮小ゲーム

前節では，縮小ゲーム (S, v_x) の特性関数は所与の利得配分 x の下でサブグループ S の外部のプレーヤーが受け取る利得 x_{N-S} に依存して定義される，と述べただけで，関数 v_x の特定の形には言及しなかった。これまでに Davis and Maschler (1965) 及び Peleg (1985, 86) と，Moulin (1985) によって2つの特定形が提示されており，それぞれサブグループ内における各提携の交渉力について，異なる見解を与えている。また，Hart and Mas-Colell (1989) は，一つの利得配分が与えられているのではなく，ある一価性を満たす解対応 φ が所与とされたときの縮小ゲームを定義している。(3)

以下では，各タイプの縮小ゲームを定義し，その形式と意味を比較検討しよう。

定義3　Davis-Maschler-Peleg 縮小ゲーム：ゲーム (N, v)，利得配分 $x \in Z(N, v)$，及びサブグループ $S \subset N$ が与えられたとき，以下の式で定義されるゲーム $(S, \tilde{v}_x)$ を **Davis-Maschler-Peleg 縮小ゲーム（DMP 縮小ゲーム）**という。

$$\tilde{v}_x(T) := \begin{cases} 0, & \text{if } T = \phi \\ v(N) - \sum_{i \in N-S} x_i, & \text{if } T = S \\ \max\{v(T \cup Q) - \sum_{i \in Q} x_i \mid Q \subset N - S\}, & \text{if } T \subset S \text{ with } T \neq S. \end{cases}$$

定義4　Moulin 縮小ゲーム：ゲーム (N, v)，利得配分 $x \in Z(N, v)$ 及びサブグループ $S \subset N$ が与えられたとき，以下の式で定義されるゲーム $(S, \hat{v}_x)$ を **Moulin 縮小ゲーム（M縮小ゲーム）**という。

$$\hat{v}_x(T) := \begin{cases} 0, & \text{if } T = \phi \\ v(N) - \sum_{i \in N-S} x_i, & \text{if } T = S \\ v(T \cup (N-S)) - \sum_{i \in N-S} x_i, & \text{if } T \subset S \text{ with } T \neq S. \end{cases}$$

定義5　Hart-Mas-Colell 縮小ゲーム：一価性を満たす解対応 φ，ゲーム (N, v)，及びサブグ

注（3）解対応 φ は，その定義域内のすべてのゲーム (N, v) に対して，$\varphi(N, v)$ が唯一つの要素から成るとき，**一価性を満たす**という。Dutta (1990) は Hart-Mas-Colell 縮小ゲームを，一価性を満たさない解対応に対しても定義されるように拡張している。

ループ $S \subset N$ が与えられたとき，以下の式で定義されるゲーム（S, v_φ）を **Hart-Mas-Colell 縮小ゲーム（HM 縮小ゲーム）**という。

$$v_\varphi(T) := \begin{cases} 0, & \text{if } T=\phi \\ v(N) - \sum_{i \in N-S} \varphi_i(N, v), & \text{if } T=S \\ v(T \cup (N-S)) - \sum_{i \in N-S} \varphi_i(T \cup (N-S), v), & \text{if } T \subset S \text{ and } T \neq S. \end{cases}$$

ここで，$\varphi_i(N, v)$ は $\varphi(N, v)$ に属する唯一つの要素 x の第 i 成分 x_i を表す。

まず第一に，DMP 縮小ゲーム・M縮小ゲームと，HM 縮小ゲームとでは，1つの利得配分を所与とするか，1つの解対応を所与とするか，という基本的な相違点がある。これは，そもそも解対応とは何か，という見方の違いに起因している。この論文では，解対応とは人々の交渉の帰結を叙述するものである，という立場に立つ。これに対して，Hart-Mas-Colell は，解対応とは利得配分に関する1つの決め方のルールである，とみなしていると考えられる。決め方のルールが既に社会全体で定まっているとき，サブグループ内の各提携がそのルールの制約下でどれだけの交渉力を持つかを示すのが，HM 縮小ゲームである。一方，段階的交渉過程において，仲裁人による利得配分案 x の制約下で，サブグループ内の各提携がどれだけの交渉力を持つかを表すのが，DMP および M縮小ゲームである。

第二に，$T=S$ のとき，すなわちサブグループ S のメンバー全員の提携に対する特性関数値は，3タイプの縮小ゲームとも共通である。いずれの定義においても，全体のグループ N で得られる利得 $v(N)$ から，サブグループ S 以外のメンバーの各々に，いま与えられている利得配分 x（DMP・M縮小ゲーム）または決め方のルール φ（HM縮小ゲーム）に従って，利得を支払った残りの量が S の値である。サブグループ内では，この残されている利得をどう配分するかが問題になるのである。

第三に，集合 T がサブグループ S の真部分集合であるときの特性関数値の定め方については，DMP縮小ゲームと，M縮小ゲーム・HM縮小ゲームとの間に相違点がある。これは，提携 T がサブグループ S 内で $S-T$ のメンバーと対峙するとき，S の外部 $N-S$ のメンバーとの協調及びその利得保証について，どのような前提に立つか，という違いに基づく。DMP 縮小ゲームにおいて提携 T は，仲裁人によって提示されている利得配分 x におけるのと同水準の利得を保証する限り，$N-S$ の中のどのメンバーでもピックアップし，その協調を得られると期待する。したがって提携 T は，$S-T$ のメンバーの協調が得られなくとも，サブグループ S の外部から自分達に最も好都合なメンバーの組 Q を選び，彼らへの利得保証分を支払った後の利得を享受できると予想する。この利得が $\tilde{v}_x(T)$ の値であり，サブグループ S における提携 T の交渉力を表す一つの指標である。

これに対して M 縮小ゲーム及び HM 縮小ゲームでは，提携 T は $S-T$ のメンバーの協力が得られないときには，$N-S$ のすべてのメンバーと協調し，いま与えられている利得配分 x（M縮小ゲーム）または決め方のルール φ（HM縮小ゲーム）に従って彼らに利得保証分を支払った残りの利得を得られると予想する。これがそれぞれ，$\hat{v}_x(T)$ と $v_\varphi(T)$ の値である。

縮小ゲームのどの特定形がサブグループ内の交渉問題を適切に表現しているかは，もちろん，どのような具体的問題から提携形ゲームが導かれているかに依存するであろう。次に，筆者が最近関心を寄せているM縮小ゲームが適切な特定形であると考えられる交渉問題を例示したい。

例1　公共プロジェクトの費用配分問題[4]

ある川の流域に a, b, c, d の4県があり，費用を共同負担して川に農工業用水路を建設する計画が立てられた。このプロジェクトへの参加は自由であるが，参加しない場合には農工業用水路からの便益は享受できない。用水路建設費Cは参加する県の数に依存し，$C(m)$ を参加数 m のときの費用とすると，$C(1)=50$，$C(2)=65$，$C(3)=85$，$C(4)=100$ である。用水路から得られる各県の便益Bは，$B(a)=50$，$B(b)=40$，$B(c)=60$，$B(d)=30$ である。プロジェクトに全県が参加するときに，総純便益が最大になり，パレート最適が達成されることに注意する。

上の費用負担問題から，次のような提携形ゲーム (N, v) が導かれる。プレーヤーの集合を $N=\{a, b, c, d\}$ とする。各提携 $S\subset N$ に対して，$v(S)$ は S のメンバーだけがプロジェクトに参加し，費用を分担したときに得られる純便益の合計と定義する。すなわち，

$$v(S):=\sum_{i\in S}B(i)-C(\#S)$$

である。提携形ゲームでは，総純便益 $v(N)$ を各提携 S の $v(S)$ を基準にしていかに各県に分配するか，という問題に書き換えられる。

各県の費用負担額を t_i，純便益を x_i $(i=a,\cdots,d)$ とする。いま，仲裁役となる建設省が全県のプロジェクト参加と，$(t_a,\cdots,t_d)=(30,\ 20,\ 40,\ 10)$ なる費用配分を提案したとする。純便益の分配で言い換えれば，$(x_a,\cdots,x_d)=(20,\ 20,\ 20,\ 20)$ である。

次に，c 県と d 県のプロジェクト参加とその費用負担額 (40, 10) を前提として，a 県と b 県との間で，2県の負担分の合計額 (50) の配分が (30, 20) で適正かどうかを検討する。これを裏返して言えば，a 県と b 県の得る総純便益 (40) の分配に関する交渉である。このときにも基準となるのは，a 県・b 県の各々が他方の協調なしに得られる純便益の額である。

では，a 県が b 県の協力なしに，すなわち b 県がプロジェクトに参加しないときに，どれだけの純便益を得られるのか。c 県と d 県のプロジェクト参加とその費用負担額を前提とするならば，a 県だけがプロジェクトに参加し費用負担したときの純便益 $v(\{a\})$ を得るわけではない。a 県は，c 県・d 県と共にプロジェクトに参加し，c 県と d 県の費用負担分を除いた残りを負担する。したがって，純便益は

$$B(a)-\{C(3)-(40+10)\}=15$$

である。上式の左辺は，次のように書き換えられる。

$$B(a)+B(c)+B(d)-\{C(3)+B(c)+B(d)-(40+10)\}$$

注 (4)　Moulin (1985, 88) は公共プロジェクトの費用配分問題を詳細に検討している。

$$=\{B(a)+B(c)+B(d)-C(3)\}+\{B(c)-40\}+\{B(d)-10)\}$$
$$=v(\{a,c,d\})-(x_c+x_d)$$

これは，M縮小ゲームにおける $\hat{v}_x(\{a\})$ の定義に他ならない。(例終り)

縮小ゲームの各特定形に関して，解対応の整合性や逆整合性が定義できる。M縮小ゲームを用いたときに解対応が整合的であるならば，**M縮小ゲームに基づく整合性**（略して**M整合性**）を満たすという。同様に，**M逆整合性**，**DMP整合性・逆整合性**，**HM整合性・逆整合性**が定義される。以下では，段階的交渉過程との関係から，主としてM縮小ゲームとDMP縮小ゲームに考察の範囲を絞ることにする。

5. 特性化定理

どのような解対応が各特定形に基づく整合性・逆整合性を満たすのか。まず，よく知られているゲームの解を幾つか導入しよう。

定義6　Core：ゲーム (N,v) の利得配分の集合

$$C(N,v):=\{x\in P(N,v)\mid \sum_{i\in S}x_i\geqq v(S) \text{ for all } S\subset N\}$$

を (N,v) **のcore** という。

ゲーム (N,v) と利得配分 $x\in Z(N,v)$ が与えられたとき，各提携 $S\subset N$ に対して，

$$e(x,S):=v(S)-\sum_{i\in S}x_i$$

と定義する。さらに，Nの異なるメンバー i, j に対して，

$$s_{ij}(x):=\max\{e(x,S)\mid S\subset N \text{ with } i\in S \text{ and } j\notin S\}$$

と定義する。

定義7　Kernel：ゲーム (N,v) の利得配分の集合

$$K(N,v):=\{x\in IP(N,v)\mid s_{ij}(x)=s_{ji}(x) \text{ for all } i,j\in N \text{ with } i\neq j\}$$

を (N,v) **の kernel** という。

定義7において，$IP(N,v)$ を単に $P(N,v)$ で置き換えたものを，**ゲーム (N,v) の prekernel** といい，$PrK(N,v)$ と書く。

ゲーム (N,v) と利得配分 $x\in Z(N,v)$ が与えられたとき，すべての提携Sの $e(x,S)$ を大きい順に並べて作られる $2^{\#N}$ 次元のベクトルを $\theta(x)$ とする。2つの利得配分 $x,y\in Z(N,v)$ に対して，$\theta(x)$ が $\theta(y)$ よりも辞書式順序で小さいか，$\theta(x)=\theta(y)$ であるとき，かつそのときに限り，$\theta(x)$

$\leqq_L \theta(y)$ と書く。[5]

定義 8　Nucleolus：ゲーム (N, v) の利得配分の集合

$$\mathrm{Nu}(N, v) := \{x \in \mathrm{IP}(N, v) \mid \theta(x) \leqq_L \theta(y) \text{ for all } y \in \mathrm{IP}(N, v)\}$$

を (N, v) の **nucleolus** という。

定義 8 において，$\mathrm{IP}(N, v)$ を単に $\mathrm{P}(N, v)$ で置き換えたものを，**ゲーム (N, v) の prenucleolus** といい，$\mathrm{PrNu}(N, v)$ と書く。

解対応と，1つのゲームの解とは明確に区別されなければならない。解対応は，あるゲームの集合を定義域とし，定義域に属する各ゲームに，そのゲームの解を対応させる写像である。例えば，$\#N$ が奇数のときには，$\varphi(N, v) = \mathrm{Nu}(N, v)$，$\#N$ が偶数のときには $\varphi(N, v) = \mathrm{C}(N, v)$，として解対応 φ を定義することもできる。

定義域に属する**すべての**ゲームに，そのゲームの core を対応させる解対応を，**core 対応**と呼ぶ。同様に，**nucleolus 対応**，**kernel 対応**などが定義される。また，定義域に属するすべてのゲーム (N, v) に，(N, v) の利得配分全体の集合 $\mathrm{Z}(N, v)$ を対応させる解対応を**全対応**，パレート最適な利得配分全体の集合 $\mathrm{P}(N, v)$ を対応させる解対応を**パレート対応**と呼ぶ。

さて，整合性は解対応の特性であり，解対応の定義域に属する任意の2つのゲームの解の間に一定の関係を要求するものであるから，定義域が広ければ広いほど要請は強まる。最も強くなるのは，ゲーム全体の集合 Γ が解対応の定義域のときである。

ところが，いかに要請を強めようとも，全対応は常に整合性を満たす。整合性は，我々の解釈では，段階的交渉過程を矛盾なく説明するための必要条件であるというだけで，個々のゲームにおいて実際にどのような利得配分が選ばれるのか，ということには何も触れていない。したがって，全対応のように，ゲームの帰結に何の情報も与えない「解対応」ですら整合性を満たすのである。

個々のゲームの帰結に関していくつかの要請を課したとき，整合性を満たす解対応の範囲はどの程度狭まるであろうか。ゲームの帰結について，次のように考えるのは自然であろう。第一に，協調による利得が余すところなく分配されるであろう。第二に，どのプレーヤー i もゲームに参加する以上，全く協調しなくとも得られる利得 $v(\{i\})$ を下回る利得では満足しないであろう。これらを表現するのが，以下の特性である。

定義 9　パレート最適性：ゲームの集合 Γ_0 上で定義された解対応 φ は，すべてのゲーム (N, v)

注（5）　2つのm次元のベクトル a，b が与えられたとする。もしm以下のある正の整数 k について，k より小さいすべての整数 i に対しては $a_i = b_i$ であり，かつ $a_k < b_k$ が成立するならば，**ベクトル a はベクトル b よりも辞書式順序で小さい**という。

$\in\Gamma_0$ に対して，$\varphi(N,v)\subset \mathrm{P}(N,v)$ であるとき，**パレート最適性を満たす**という。

定義10　個人合理性：ゲームの集合 Γ_0 上で定義された解対応 φ は，すべてのゲーム $(N,v)\in\Gamma_0$ に対して，$\varphi(N,v)\subset \mathrm{I}(N,v)$ であるとき，**個人合理性を満たす**という。

まず，整合性に加えて，パレート最適性を課したときにどうか調べよう。

命題1：集合 Γ を定義域とするパレート対応は，DMP 整合性，M整合性，及びパレート最適性を満たす。

証明：ゲーム (N,v) において，$x\in \mathrm{P}(N,v)$ ならば，$\sum_{i\in N} x_i=v(N)$ である。任意の $S\subset N$ に対して，$\tilde{v}_x(S)=\hat{\iota}_x(S)=v(N)-\sum_{i\in N-S} x_i=\sum_{i\in S} x_i$ である。よって，x_S は $\mathrm{P}(S,\hat{v}_x)$ 及び $\mathrm{P}(S,\tilde{v}_x)$ に属する。(証明終)

パレート対応以外にも，Γ 上で DMP 整合性とパレート最適性を満たす解対応が存在する。

命題2：集合 Γ を定義域とする prenucleolus 対応，及び prekernel 対応は DMP 整合性とパレート最適性を満たす。

証明：prenucleolus 対応については Sobolev (1975) を，prekernel 対応については Peleg (1986) を見よ。

Sobolev (1975) と Peleg (1986) は，DMP 整合性とパレート最適性に，他の幾つかの特性を付加することによって，それぞれ，prenucleolus 対応と prekernel 対応の特性化定理を得ている。[(6)(7)]

パレート最適性に比べて，個人合理性を付加したときには，整合性を満たす解対応の範囲は大きく狭められる。次の命題は，一つの基本的な制約を明らかにする。

平衡ゲーム全体の集合を Γ_C とする。[(8)]

命題3：ゲームの集合 Γ_0 が，Γ_C に属さないゲームを1つでも含むならば，Γ_0 上で定義される解対応で，M整合性と個人合理性を共に満たすものは存在しない。DMP 整合性と個人合理性を共

注（6）　この他にも，Γ 上の解対応で DMP 整合性とパレート最適性を満たすものが存在する。Aumann and Dreze (1974) を見よ。

（7）　Hart and Mas-Colell (1989) は，HM 整合性，パレート最適性，及び一価性と，他の幾つかの特性によって，Shapley 値対応の特性化定理を得ている。

（8）　平衡ゲームの定義については，例えば，鈴木・武藤 (1985) を見よ。よく知られているように，$\Gamma_C=\{(N,v)\mid \mathrm{C}(N,v)\neq\phi\}$ である。

に満たすものも存在しない。

証明：Tadenuma (1992) を見よ。

集合 Γ_C は，個人合理性の下で整合性を満たす解対応の存在を期待し得る最大限のゲームの集合なのである。実際，集合 Γ_C 上では，これらの2つの条件を満たす解対応が存在する。

命題4：集合 Γ_C 上で定義される core 対応は，M整合性，DMP 整合性，及び個人合理性を満たす。集合 Γ_C 上で定義される nucleolus 対応は，DMP 整合性及び個人合理性を満たす。

証明：core 対応がM整合性を満たすことは Tadenuma (1990)，DMP 整合性を満たすことは Aumann and Dreze (1974) 及び Peleg (1986) による。nucleolus 対応が DMP 整合性を満たすことは Aumann and Dreze (1974) による。

実は，集合 Γ_C 上でM整合性と個人合理性を満たす解対応は，core 対応だけである。

定理1：集合 Γ_C 上で定義される解対応で，M整合性及び個人合理性を共に満たすものは，core 対応に限られる。

証明：Tadenuma (1990) を見よ。

DMP 整合性によって core 対応を特性化するためには，もう1つの特性が必要である。

定義11　半加法性：ゲームの集合 Γ_0 上で定義される解対応 φ は，すべての (N, v)，$(N, v') \in \Gamma_0$ に対して，$\varphi(N, v)+\varphi(N, v') \subset \varphi(N, v+v')$ であるならば，**半加法性を満たす**という。(9)

定理2：集合 Γ_C 上で定義される解対応で，DMP 整合性，個人合理性，及び半加法性を同時に満たすものは，core 対応に限られる。

証明：Peleg (1986) を見よ。

逆整合性を満たす解対応については，次にまとめておく。

命題5：集合 Γ 上で定義されるパレート対応は，M逆整合性及び DMP 逆整合性を満たす。集

注（9） 特性関数 $v+v'$ は，すべての $S \subset N$ に対して，$(v+v')(S) := v(S)+v'(S)$ と定義される。

合 Γ 上で定義される prekernel 対応及び kernel 対応は，DMP 逆整合性を満たす。集合 Γ_C 上で定義される core 対応は，DMP 逆整合性及び弱意のM逆整合性を満たす。

証明：逆整合性の定義により，パレート対応はこれを満たす。prekernel 対応については Peleg (1986) を見よ。kernel 対応が DMP 逆整合性を満たすことは，prekernel 対応が DMP 逆整合性を満たすことと，任意の (N, v)，任意の $x \in Z(N, v)$，及び任意の $S \subset N$ に対して，$x_S \in K(N, v)$ ならば，$x_i \geqq \tilde{v}_x(\{i\}) \geqq v(\{i\})$ であることから導かれる。core 対応については，Peleg (1986) 及び Tadenuma (1990) を見よ。(証明終)

6. 特性化定理の意味

この節では，結論に代えて，段階的交渉過程を叙述するという観点から core 対応の特性化定理の意味を考察する。

定理1によれば，解対応 φ がM整合性と個人合理性を同時に満たすならば，すべてのゲーム $(N, v) \in \Gamma_C$ に対して，$\varphi(N, v) = C(N, v) \cdots (1)$ でなければならない。等式 (1) は $\varphi(N, v) \subset C(N, v) \cdots (2)$ かつ $\varphi(N, v) \supset C(N, v) \cdots (3)$ と同意である。まず，関係 (2) の意味を明らかにしよう。

ゲーム $(N, v) \in \Gamma_C$ において，利得配分 x が $C(N, v)$ に属さないならば，ある縮小ゲーム $(S, \hat{v}_x)$ において，あるプレーヤー i の利得 x_i が $\hat{v}_x(\{i\})$ より小さくなる。したがって，段階的交渉過程においてこの利得配分 x が仲裁人によって提示されても，サブグループ S 内の交渉において，プレーヤー i の個人合理性から棄却されてしまう。したがって，ゲーム (N, v) の帰結となり得るのは，core に属する利得配分に限られる。これが (2) の意味である。

次に，関係 (3) の意味は何か。任意のゲーム $(N, v) \in \Gamma_C$，及び $C(N, v)$ に属する任意の利得配分 x に対して，以下の条件を満たすゲーム $(N', v') \in \Gamma_C$ が存在することが証明できる。

(a) N' は N のメンバーと，もう1人のプレーヤー i_0 から成る。

(b) $C(N', v')$ は唯一つの利得配分 $y := (x, 0)$ から成る。

(c) ゲーム (N', v') から，利得配分 y の下でサブグループ N に縮小されたゲーム $(N, \hat{v}'_y)$ が (N, v) に一致する。

$C(N', v')$ に属する利得配分は1つしかないのであるから，すぐ上のパラグラフで述べたことにより，ゲーム (N', v') の帰結は y でなければならない。そうすると，段階的交渉過程においてサブグループ N 内の交渉で利得配分 y_N すなわち x が是認されていたはずである。言い換えると，利得配分 x はゲーム $(N, \hat{v}'_y)$ すなわち (N, v) の帰結でなければならない。もし，利得配分 x をゲーム (N, v) の解から排除するならば，ゲーム (N', v') で示される利得配分問題が段階的交渉過程によって決定される，ということとは矛盾してしまうのである。したがって，どのゲーム (N, v) に対しても，$C(N, v)$ に属する**すべての**利得配分が (N, v) の帰結となり得ると見なさなければなら

ない。これが（3）の意味である。

core の特性化定理に対して，「core はゲーム理論の中で最も直観的に理解できる解であるから，特性化定理を敢えて示す必要はないのではないか」という批評もある（Peleg（1985, p. 203））。我々の見るところでは，この批評は，交渉の妥結点となる利得配分が core に属することは「直観的に明らか」である，と主張しているに過ぎないと思われる。[(10)] 仮にこの主張を認めるとしても，なぜ core に属する**すべての**利得配分を，交渉の帰結となり得る利得配分と見なさねばならないのか。なぜ core の中からさらに細かく利得配分を指定する解対応では，不都合が生じるのか。我々の持つ理論は，交渉の帰結について core 以上に細かい説明を与えることは不可能なのか。この問いに対する答えは，「直観的に」明らかではなかろう。定理 1 は，その回答を与えている。

集合 Γ_C のどのゲーム (N, v) も，プレーヤーの集合が N のときのゲームであるという側面と，N よりも大きいプレーヤーの集合 N' のゲーム (N', v') の縮小ゲームであるという側面を持つ。そして，あるゲーム (N, v) の解が $\mathrm{C}(N, v)$ よりも小さい場合，ある別のゲーム (N', v') の妥結点は，段階的交渉過程から到達したものとは見なし得なくなる。集合 Γ_C のどのゲームにおける利得配分も，段階的交渉過程に従って，個人合理性を保持しつつ決定されるとするならば，すべての (N, v) に対して，$\mathrm{C}(N, v)$ に属するすべての利得配分をゲームの解に含めなければならないのである。

これまでの議論は，任意の (N, v) 及び任意の $x \in \mathrm{C}(N, v)$ に対して，性質(a)，(b)及び(c)を満たすゲーム (N', v') を作ることができる，ということが鍵になっていた。M縮小ゲームでなく DMP 縮小ゲームを用いた場合，このような (N', v') を作れるとは限らない。それ故，core からさらに細かく利得配分を指定する解対応で，DMP 整合性と個人合理性を同時に満たすものの存在は否定されない。実際，命題 4 で見たように，nucleolus 対応がそのような解対応なのである。

最後に，その他の幾つかの論点を取り上げて本稿を閉じることにする。

(1) 定理 1 及び定理 2 において，解対応の定義域は平衡ゲーム全体，すなわち core が非空であるゲーム全体の集合 Γ_C である。そのため，解対応の定義域を定めるのに core 自体を使っているのだから，「純粋な」特性化定理とは言えない，という批判がある。これに対する Peleg の反論は以下の通りである。

「我々の目的は core 対応の『純粋な』定義を与えることではなく，むしろ core 対応の定義される自然な定義域上でそれを特徴付ける幾つかの特性を選び出し，もって他の解対応と比較できるようにすることなのである。」（Peleg（1986, p. 196））

実際，平衡ゲーム全体の集合上で，いくつもの解対応を定義することができるのであるから，それらと core 対応とを特性によって比較することには意味があろう。

我々のもう一つの反論は命題 3 に基づく。命題 3 によれば，集合 Γ_C よりも大きい定義域上では，

注（10） core がそのような「絶対的な」解ではなく，直観に反するケースもあることが Aumann（1985）によって指摘されている。

そもそも整合性と個人合理性を同時に満たす解対応は存在しない。これらの特性を併せて課したときの帰結を求めると，必然的に我々は Γ_C に行き着くことになるのである。集合 Γ_C 上で2つの条件を満たす解対応とは何かを明らかにすることは，まず第一に必要なことであろう。

(2) core 対応を他の解対応と比較し区別するという観点から2つの特性化定理を見ると，定理2では，DMP 整合性だけでは core 対応は nucleolus 対応から区別されず，半加法性がその役を負っている。一方，定理1ではM整合性が，nucleolus 対応を含めてすべての個人合理的な解対応から core 対応を区別する。M整合性は，core 対応とより密接な関係があると言えよう。

(3) 我々は集合 Γ_C 上の解対応を考察してきたが，もちろん，集合 Γ_C 上での考察だけで十分であると主張しているわけではない。第5節で述べたように，解対応の定義域が小さくなるほど整合性の要請は弱くなる。したがって，Γ_C よりも小さい定義域において，定理1や定理2で挙げられた条件を満たす解対応が core 対応だけであるとは限らない。より小さい定義域としては，Peleg (1989) が市場ゲームの集合上で，また Sasaki and Toda (1992) がマッチング・ゲームの集合上で，それぞれ整合性を中心的な特性として core 対応の特性化定理を得ている。この他にも，具体的な経済問題から導かれるゲームの集合上で整合性を満たす解対応とは何かを探求することは，興味深い問題である。

(4) この論文では，プレーヤーが譲渡可能効用 (transferable utility) を持つことを仮定し，別払い (side-payments) のあるゲームを考察した。譲渡可能効用を仮定せず，別払いのないゲームについても同様の定理が，Peleg (1985) 及び Tadenuma (1992) により得られている。

参考文献

Aumann, R. J. (1985): "On the Non-Transferable Utility Value: A Comment on the Roth-Shafer Examples", *Econometrica*, 53, 599–612.

Aumann, R. J. and J. H. Dreze (1974): "Cooperative Games with Coalition Structures", *International Journal of Game Theory*, 3, 217–237.

Davis, M. and M. Maschler (1965): "The Kernel of a Cooperative Game", *Naval Research Logistics Quarterly*, 12, 223–259.

Dutta, B. (1990): "The Egalitarian Solution and Reduced Game Properties in Convex Games", *International Journal of Game Theory*, 19, 153–169.

Harsarnyi, J. C. (1959): "A Bargaining Model for the Cooperative *n*-Person Game", in A. W. Tucker and R. D. Luce (eds.), *Contributions to the Theory of Games*, Princeton University Press.

——— (1977): *Rational Behavior and Bargaining Equilibrium in Games and Social Situations*, Cambridge University Press.

Hart, S. and A. Mas-Colell (1989): "Potential, Value, and Consistency", *Econometrica*, 57, 589–614.

Lensberg, T. (1985): "Stability, Collective Choice and Separable Welfare", Ph.D. thesis, Norwegian School of Economics and Business Administration.

Moulin, H. (1985): "The Separability Axiom and Equal Sharing Methods", *Journal of Economic Theory*, 36, 120–148.

——— (1988): *Axioms of Cooperative Decision Making*, Cambridge University Press.

Peleg, B. (1985): "An Axiomatization of the Core of Cooperative Games without Side Payments", *Journal of Mathematical Economics,* 14, 203-214.

——— (1986): "On the Reduced Game Property and its Converse", *International Journal of Game Theory,* 15, 187-200.

——— (1989): "An Axiomatization of the Core of Market Games", *Mathematics of Operations Research,* 14, 448-456.

Sasaki, H. and M. Toda (1992): "Consistency and Characterization of the Core of Two-Sided Matching Problems", *Journal of Economic Theory,* 56, 218-227.

Sobolev, A. I. (1975): "The Characterization of Optimality Principles in Cooperative Games by Functional Equations", *Mathematical Methods in the Social Sciences,* 6.

鈴木光男・武藤滋夫 (1985)『協力ゲームの理論』東京大学出版会。

Tadenuma, K. (1990): "Dual Axiomatizations of the Core and the Anti-Core", Hitotsubashi University RUEE Working Paper #90-41, Kunitachi, Tokyo, Japan.

——— (1992): "Reduced Games, Consistency, and the Core", *International Journal of Game Theory,* 20, 325-334.

(一橋大学経済学部助教授)