

Title	合理的期待動学モデルの情報構造と検定方法に関する一考察
Sub Title	A note on the informational structure and testing methods of rational expectations dynamic models
Author	井出, 多加子
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1991
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.84, No.3 (1991. 10) ,p.603(71)- 616(84)
JaLC DOI	10.14991/001.19911001-0071
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19911001-0071

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

合理的期待動学モデルの情報構造と 検定方法に関する一考察

井 出 多加子*

要 約

合理的期待線形確率差分方程式における従来の解法は、解の多数性に加えて、モデルの情報構造と誤差項の関連が必ずしも明白でないため、実証研究で仮説を棄却する可能性が高い。ここで採用するパラメタ倏約基準のもとで一意に選択される解形式は、将来の期待が含まれる場合でも、完全予見モデルに一致する同次項をもち、全体で最小数のパラメタをもつ。また、情報構造による攪乱は、攪乱項にのみ影響する。したがって、persistence の存在は期待の合理性と必ずしも矛盾せず、仮定される情報構造に一致した誤差項の処理を行なうことで、適切な検定が可能になる。

1. はじめに

本稿の目的は、合理的期待線形確率動学モデルにおける情報構造と解の一意性の関連を明らかにし、Evans=Honkapohja (1986) をもとに新たにパラメタの倏約基準を採用することで、より適切な仮説検定が可能になることを示すことにある。

合理的期待を含む線形確率差分方程式について、その解法を中心に多くの研究が行なわれ、応用モデルも広範におよんでいる。これらの研究から、構造方程式が将来変数の期待を含む時、一般に解の多数性が排除できないとされる。しかし、本稿で提起する「パラメタの倏約基準」を採用することで、差分方程式の同次項は一意に決定される。この基準は Evans=Honkapohja (1986) の解法に理論的支持をあたえるもので、解の選択はモデル検定により中立的であることを要請するため、実証研究に有用である。さらに従来の研究では、モデルの情報構造と誤差項の関連が必ずしも十分考慮されず、検定で仮説を棄却する可能性が高かった。

本稿の貢献と主要な結論は次の通りである。(1)複数の ARMA プロセス表現のうち、一意な AR

* 本稿の作成にあたり、神谷傳造教授（慶應義塾大学）、大平哲助手（慶應義塾大学）その他多くの方々から有益なコメントと助言をいただいた。記して謝意を表する。但し、含まれる一切の誤謬が著者の責任にある事は言うまでもない。

項と最小数のパラメタをもつ Evans=Honkapohja (1986) (以下 E=H と称する) の解を検討し、パラメタの儉約基準を提起してこれに理論的支持を与える。(2)異なる情報集合に基づく期待、あるいは複数期にわたる将来の期待が構造方程式に含まれる時、外生ショックが系列無相関であっても解の誤差項に内生的系列相関が発生する。(3)解の deterministic part は完全予見モデルと一致し、情報のラグ構造は誤差項のみに影響する。このとき完全予見下で定常的であっても、誤差項のため体系が不安定になる可能性がある。(4)解のパラメタが構造パラメタの関数として一意に決定される条件を提示する。(5)従来の解法で不十分であった誤差項の重要性とその現実性を指摘し、合理的期待仮説の検定方法として利用されている over identifying restriction の適切な利用方法が示唆される。

本稿の構成は以下の通りである。2 節で、パラメタ儉約基準を提起して一意な AR 項をもつ E=H モデルを拡張し、情報構造が動学経路に与える効果を分析する。3 節において、未定係数法の問題を明らかにし、多数性排除に関する従来の研究を整理・比較する。4 節で、誤差項の内生的系列相関が実証研究にもつ重要性を指摘する。5 節に、結論と今後の課題を示す。

2. 期待の合理性とパラメタ儉約基準

本稿では、内生変数の真の過程は ARMA プロセスにしたがうものと仮定し、単一の外生ショックにさらされる定係数線形モデルのみを対象とする⁽¹⁾。合理的期待線形確率差分方程式の解導出において、次の方針を採用する。(以下、 E_{t-j} は $t-j$ 期に利用可能な情報集合に基づく条件つき期待オペレータを、 $y_t|_{t-j}$ は $t-j$ 期の情報にもとづく主体の主観的期待を示し、 ε_t はホワイトノイズである。また、期待を含むモデルを構造モデル、そのパラメタを構造パラメタと呼ぶ。特に断わりのないかぎり、「解く」とは誘導型を求めることを意味する。)

(A) 広義定常性

確率変数 y の真の過程は広義定常的で、実数値定係数をもつ ARMA(p, q) プロセスに従う。

(D) 利用可能な情報集合

t 期期首の意思決定において利用可能な情報集合 I_{t-1} は、同一ならびにそれ以前の time subscript を持つ事象を要素にもつ。すなわち

$$I_{t-1} = \{y_{t-j}, \varepsilon_{t-j}; j=1, 2, \dots\}$$

(S) パラメタの儉約

注(1) ARMA プロセスは、必ずしもすべての確率過程を網羅しない。しかし、Wold の分解定理から定常過程であればその MA 表現は必ず存在し、ARMA は広範な適用範囲を持つ。詳細は、Sargent (1979) 11章、青木 (1984) 3 章、を参照。また、sunspot equilibria と複数の外生ショックをもつ Lucas の island economy 型の非均質情報と、均衡の存在と安定性の問題は現在の分析から除外する。

期待値と実現値の誤差が同一なら、より少ない数のパラメタをもつ解を選択する。

仮定 (A) から、モデルは線形に特定化される。(D) は記号に関する注意で、(S) は本稿で採用するあらたな解の選択基準である。一般に ARMA プロセスの表記は一意でないが、この基準のもとで一意的な表現が選択される。(A) のもとで以下の 1 変量構造方程式 (1) が与えられたとき合理的期待線形モデルの解を求める事は、(2) (3) 式を満たすベクトル A および M を求めることである。⁽²⁾

$$y_t = B_1 \begin{bmatrix} y_t |_{t-1} \\ \vdots \\ y_t |_{t-s} \end{bmatrix} + B_2 \begin{bmatrix} y_{t+1} |_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t+k} |_{t-1} \end{bmatrix} + B_3 \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-n} \end{bmatrix} + \varepsilon_t$$

$$1 \leq s < \infty, \quad 1 \leq k, n < \infty \quad (1)$$

$$y_t = A \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-p} \end{bmatrix} + M \begin{bmatrix} \varepsilon_t \\ \vdots \\ \varepsilon_{t-q} \end{bmatrix}$$

$$1 \leq p, q, \quad A' = (\phi_1, \dots, \phi_p), \quad M' = (1, -\theta_1, \dots, -\theta_q)$$

$$E[\varepsilon_t \varepsilon_s] = \begin{cases} 0 & (s \neq t) \\ \sigma & (s = t) \end{cases} < \infty \quad \forall t, s$$

$$E[\varepsilon_t] = 0 \quad (2)$$

$$E_{t-h}[y_t |_{t-j} - y_t] = 0$$

$$(h \geq j, h = 1, \dots, s) \quad (3)$$

(3) 式は、合理的期待仮説の定義である。異なる情報集合に基づく期待が含まれる時、各情報集合のもとで期待の合理性が満たされねばならない。

(1) に含まれる最大情報集合は $t+k$ 時点の I_{t+k} 、最小情報集合は $t-s$ 時点の I_{t-s} で、 I_{t+k} は、以下のように $k+s+1$ 個の相互に排他的な部分情報集合に直交分割される。

$$I_{t+k} = I_{t-s} \cup (I_{t-s+1} \setminus I_{t-s}) \cup \dots \cup (I_{t+k} \setminus I_{t+k-1})$$

$$\text{但し } \setminus \text{ は差集合を示す} \quad (4)$$

直交分割の定義より

$$I_{t-h} \cap (I_{t-h+1} \setminus I_{t-h}) = \phi \quad (h = -k+1, \dots, s) \quad (5)$$

(D) から

$$I_{t+k} = \{y_{t+k}, y_{t+k-1}, \dots, \varepsilon_{t+k}, \varepsilon_{t+k-1}, \dots\}$$

$$I_{t+k-1} = \{y_{t+k-1}, y_{t+k-2}, \dots, \varepsilon_{t+k-1}, \varepsilon_{t+k-2}, \dots\}$$

I_{t+k} は、 I_{t+k-1} の要素に新たに y_{t+k} と ε_{t+k} が加わっている。しかし (A) の仮定から y は過去の

注 (2) 本稿では、外生ショックが系列無相関のホワイトノイズと仮定する。しかし、これが ARMA プロセスであってもその構造が知られている場合、適当なフィルターをかけることで、ホワイトノイズのショックを持つモデルに変換する事ができる。したがって、ホワイトノイズの仮定は本稿の結論に決定的でない。

y と ε に依存する。したがって (5) 式から

$$\begin{aligned} I_{t+k} \setminus I_{t-s} &= \{\varepsilon_{t-h}; h = -k, \dots, s-1\} \\ I_{t+k} &= I_{t-s} \cup \{\varepsilon_{t-s+1}\} \cup \dots \cup \{\varepsilon_{t+k-1}\} \cup \{\varepsilon_{t+k}\} \end{aligned} \quad (6)$$

最大情報集合は、 $t-s$ 期に利用可能な情報集合と相互に排他的な $t-s+1$ から $t+k$ 期迄の innovations に分割される。実現値は予測とそれに直交する予測誤差に分解されるので、 $t-h$ 期の条件付期待値は

$$E_{t-h}[y_{t+k}] = y_{t+k} - \sum_{i=-k}^{h-1} \delta_i \varepsilon_{t-i} \quad (h=1, \dots, s) \quad (7)$$

以下、Aoki=Canzoneri (1979), Evans=Honkapohja (1986) にならい (1) の問題を 2 つの事例にわけて考察する。

Case 1: 過去の異なる情報集合にもとづく期待が含まれる時⁽³⁾

(1) 式で、 $B_2=0$ とする。 I_{t-s} にはじまり各情報集合のもとで条件付期待を求める。(3) 式から

$$y_t |_{t-1} = E_{t-1}[y_t]$$

law of iterations から

$$E_{t-h}[E_{t-h+1}[y_t]] = E_{t-h}[y_t] \quad (h=2, \dots, s)$$

各情報集合のもとで構造方程式 (1) の両辺の条件付期待をとる。最小情報集合のもとでは

$$E_{t-s}[y_t] = (1 - \sum_{i=1}^s b_{1i})^{-1} \sum_{j=1}^s b_{2j} E_{t-s}[y_{t-j}]$$

したがって (7) より解は、以下の ARMA($n, s-1$) にしたかう。

$$\begin{aligned} y_t &= E_{t-s}[y_t] + \sum_{f=0}^{s-1} \delta_f \varepsilon_{t-f} \\ &= (1 - \sum_{i=1}^s b_{1i})^{-1} \sum_{j=1}^s b_{2j} [y_{t-j} - \sum_{k=0}^{s-1} \delta_k \varepsilon_{t-(j+k)}] + \sum_{f=0}^{s-1} \delta_f \varepsilon_{t-f} \end{aligned} \quad (8.1)$$

AR項は一意に決定され完全予見に一致する。MA項は、以下の手続で求められる。(7) 式から

$$y_t = E_{t-h}[y_t] + \sum_{f=0}^{h-1} \delta_f \varepsilon_{t-f} \quad (h=1, \dots, s-1)$$

構造モデル (1) の隣り合う条件付期待値の差は 1 期の innovaiton のみの関数になる。

$$\begin{aligned} E_{t-h}[y_t] - E_{t-(h+1)}[y_t] &= \delta_h \varepsilon_{t-h} \quad (h=1, \dots, s-1) \\ y_t - E_{t-1}[y_t] &= \delta_0 \varepsilon_t \end{aligned} \quad (8.2)$$

一方解 (2) の隣り合う条件付期待値をとると

$$E_{t-h}[y_t] - E_{t-(h+1)}[y_t] = (\phi_1 \delta_{h-1} + \phi_2 \delta_{h-2} + \dots + \phi_h \delta_0 - \theta_h) \varepsilon_{t-h}$$

注 (3) このモデルは、Kydland=Prescott (1982) の time-to-build investment のように、過去に決定した投資プロジェクトが、一定期間中の各時点で追加的財の投入を必要とし、当該期間中の各時点の投資需要が過去に予想された期待価格に依存するモデル、あるいは Sargent=Wallace (1975) の時間的ラグ構造をもつ情報の非対称性モデルに利用される。

$$(h=1, \dots, s-1, \delta_{h-j}=0 \text{ if } h-j < 0)$$

$$y_t - E_{t-1}[y_t] = \varepsilon_t \quad (8.3)$$

(8.2) の各式は任意の ε について (8.3) に一致することから

$$\delta_0 = 1 \quad (8.4)$$

$$\delta_h = \phi_1 \delta_{h-1} + \phi_2 \delta_{h-2} + \dots + \phi_n \delta_0 - \theta_h$$

$$(h=1, \dots, s-1, \delta_{h-j}=0 \text{ if } h-j < 0) \quad (8.5)$$

θ_{s-1} から θ_1 までの $s-1$ 個の MA パラメータは, (8.1) 式から決定された AR パラメータ ϕ と構造型から計算された (8.2) の δ のもとで (8.4) から決定される。構造モデルには, $t-1$ から $t-s$ 期まで異なる情報にもとづく期待が s 個含まれ, 隣り合う期間の期待値の差は $s-1$ 個求められるので, (8.5) は一次独立な $s-1$ 本の方程式を構成する。実際には, (8.1) の解形式を想定した未定係数法の利用が簡便であろう。

Case 2: 将来の期待が⁽⁴⁾含まれる時

(1) において, $B_1=0$ とする。同様の関係が $t-k$ 期にも成立することから time subscript を k 期ずらし, 両辺の E_{t-k-1} を求め $E_{t-k-1}[y_t]$ について解くと

$$E_{t-k-1}[y_t] = E_{t-k-1}\left[\sum_{h=1}^{n+k} c_h y_{t-h}\right] \quad \text{但し } c_h \text{ は構造パラメータの関数} \quad (9)$$

(7) 式から y_t は $\text{ARMA}(n+k, k)$ にしたがう。一方 $B_1=0$ より (8.5) は, 0 本で構成されるため解は

$$y_t = \sum_{h=1}^{n+k} c_h y_{t-h} + \sum_{h=1}^k \theta_h \varepsilon_{t-h} + \varepsilon_t \quad (10)$$

但し θ_h は任意

以上 2 つの事例から, 次の 2 命題が導かれる。

Proposition 1:

仮定 (A) と選択基準 (D) のもとで, (1) の解は唯一の解形式 $\text{ARMA}(n+k, k+s-1)$ にしたがう。この時, AR パラメータは構造パラメータから一意に決定される最小次数の AR 項をもち, 完全予見の場合に一致する。⁽⁵⁾

Proof: (この命題は E=H モデル Proposition 1 の拡張である。)

(7) 式から y_t は $\text{ARMA}(n+k, k+s-1)$ にしたがう。一般に ARMA 表現は一意でないが, 任意の y と ε について以下の恒等式を満たす右辺誘導型の係数ベクトル A が一意に決定されるための

注 (4) このモデルは, 広範な応用例をもつ。代表的なものにインフレーションに関する Cagan model, Fischer (1979) の長期契約モデル等がある。

(5) 過去に形成された期待値を含むとき, deterministic part との一致性は Aoki=Canzoneri (1979), Chow (1983) の研究でも明らかにされている。

必要十分条件は $\bar{A}=A$ ，すなわち解が完全予見と同じ階数とパラメタをもつAR項にしたがうことである。

$$\bar{A} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-n-k} \end{bmatrix} + \bar{M} \begin{bmatrix} \varepsilon_{t-1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{t-k-s+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-p} \end{bmatrix} + M \begin{bmatrix} \varepsilon_{t-1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{t-q} \end{bmatrix}$$

ARMA($n+k, k+s-1$) をより少ないAR次数を持つ形式に変換する方法は，ARMA($n+k-1, \infty$), ($n+k-2, \infty$), $\dots$, ($0, \infty$) と最大 $n+k+1$ 通り存在する。たとえば ARMA($n+k-1, \infty$) に変換する時，AR項の $n+k$ 個の特性根を $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+k}$ とおいて因数分解すると

$$(1-\lambda_1 L) \cdots (1-\lambda_{n+k} L) y_t = \theta(L) \varepsilon_t$$

両辺に $(1-\lambda_1 L)^{-1}$ を掛けて

$$(1-\lambda_2 L) \cdots (1-\lambda_{n+k} L) y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_1^j \theta(L) \varepsilon_{t-j}$$

$$\text{但し } |\lambda_1| < 1 \quad (11)$$

絶対値条件が満たされる限り λ_1 の選択は任意であるから，ARMA($n+k, k+s-1$) から ($n+k-1, \infty$) への変換は最大 $n+k$ 通り存在する。したがって一意でない。

上記の様に，より少ないARあるいはMAパラメタを持つ表現は，無限期過去の情報に依存するため，線形制約をおかない場合を考えると無限個のパラメタをもつ。MA(∞) への変換は一意だが，同様に無限個のパラメタをもつ。一方 (1) より $n+k+s < \infty$ 。したがって，複数の解形式のなかで ARMA($n+k, k+s-1$) は最小数のパラメタをもち，一意に決定される最小次数のAR項を持つ。■

Proposition 2:

(1) 式において，主体の利用する最小情報集合から予想される変数を含む最大情報集合まで time subscript が2期以上離れることがない時，その時に限り，Proposition 1 のMAパラメタは構造パラメタの関数として一意に求められる。

Proof:

$k+s-1$ 個のMAパラメタがモデルから一意に決定されるための必要十分条件は，これらについて一次独立な $k+s-1$ 個の方程式が存在することである。(8.4) 式が一次独立な $k+s-1$ 本の式で構成されるための必要十分条件は， $k+s$ 個の異なる情報集合に基づく期待が構造モデルに含まれることである。この時， $t-s$ から $t+k$ 期まで $k+s$ 個の期待が含まれるので，time subscript は2期以上離れることがない。■

複数期にわたる将来の期待が含まれる場合，または今期のショック実現以前に $t-1$ 期迄の情報で将来を予想して取り引きに参加する場合には，予想される変数と情報集合の time subscript が2期以上離れるため，誤差項のパラメタは構造モデルから一意に決定されない。これは，次の様に理解される。仮定から外生ショックは系列無相関のホワイトノイズである。完全予見であれば存在

しないのに過去のショックが今期の内生変数に影響するのはモデルの情報構造のためで、過去のショックを知らない主体の行動が反映される。このような誤差項の内生的系列相関構造は、モデルがそれを一意に決定する構造をもたないと構造パラメタの関数として不決定になる。⁽⁶⁾

時間に関する情報の非対称性は誤差項のみに影響する。このとき Case 1 において完全予見のもとで定常性が満たされても、情報構造による MA 項のため解は必ずしも定常的でない。ARMA プロセスの定常性のための必要十分条件は、AR および MA 項の特性根がすべて 1 より大きい絶対値を持つことである。完全予見下の定常性が満たされるとき Proposition 1 より、解の AR 項の定常性は満たされるが、MA 項の定常性は以下のように保証されない。(1) 式で、Aoki=Canzoneri (1979) Case 1 の $n=1, s=2$ を例にとると、解は ARMA (1, 1) にしたがう。AR パラメタを ϕ_1 , MA パラメタを θ_1 とおいて

$$\phi_1 = (1 - b_{11} - b_{12})^{-1} b_{31}$$

$$\theta_1 = -(1 - b_{11})^{-1} b_{12} (1 - b_{11} - b_{12})^{-1} b_{31}$$

完全予見モデルが定常性をみたすなら

$$|(1 - b_{11} - b_{12})^{-1} b_{31}| < 1$$

しかしこれは

$$|-(1 - b_{11})^{-1} b_{12} (1 - b_{11} - b_{12})^{-1} b_{31}| < 1$$

を必ずしも保証しない。このことは、政府がより多くの情報を持つ場合、経済の安定化を目的とする政策に積極的な意味をもたらすことになるだろう。

3. 従来の研究との比較

3-1 未定係数法と解の多数性

外生的ホワイトノイズにさらされるモデルで解の多数性が発生する主な原因は 2 節の分析から、① Proposition 1 より、完全予見下よりすくない AR 次数をもつ解形式を想定すること、② Proposition 2 より、MA パラメタが一意に識別される情報構造をモデルが持たないことにある。どちらも、期待値を実現値の空間に写像する際、次元の退化によって解が一意に定まらない。

解法に関する従来研究の大半は、①の問題を中心に展開されてきた。それを解決するため、(i) 他の補助条件によって、完全予見下の AR 項の次数を減少させ次元の退化を補う、(ii) 過去および現在の innovation のみに依存する MA(∞) プロセスに変換する、(iii) 非因果系の形式を想定し将来

注(6) Muth (1961) では、将来変数の期待値が含まれるにも関わらず、今期のショック実現後に次期の価格を予想して取り引きが行なわれる。したがって、time subscript が 1 期しか離れていないため、誤差項の系列相関は生じない。

Lucas (1972), Barro (1976) の misperception model や Grossman=Weiss (1982) の景気循環モデルは、各時点で異なる効果を持つ 2 つの innovations が存在するにも関わらず情報構造のためこれらが個別に識別されず、次元の退化によって期待にバイアスがかかる例である。

変数の実現値を説明変数に含める、等の方法がとられている。⁽⁷⁾(i)(ii)は、説明変数が過去の情報のみで構成される因果系のため、予測に適する。しかし(i)は補助条件の妥当性が吟味されなければならない。一方(ii)は、導出が複雑なうえ、推定や予測において有限個の説明変数を用いなければならないことから、推定精度の減少という問題をもつ。(iii)は解の一意性が簡単に確保され導出が容易なため近年実証研究で注目されているが、将来変数が説明変数に含まれるから予測には適さず、推定バイアスも問題になる。

(i)について(11)式で、すべての特性根が1より大きい絶対値をもつとき、無限期過去の外生ショックに依存するMA(∞)に変換される。一意な因果系で、予測が可能である。しかし理論的には優れていても、無限期過去の情報が必要とされることから、有限個数で推定する場合情報が失われる。この影響はサンプル数の少ない場合、特に深刻である。次に(iii)について、(7)式から実現値は予測値とそれに直交する誤差項に分解されるから

$$E_{t-1}[y_{t+h}] = y_{t+h} - \sum_{j=-h}^0 \delta_j \varepsilon_{t-j} \quad (h=1, \dots, k) \quad (12)$$

もとの式に代入し将来変数の実現値をそのまま今期の説明変数とする。

$$y_t = b_{11} y_{t+1} + \dots + b_{1k} y_{t+k} + b_{21} y_{t-1} + \dots + b_{2n} y_{t-n} + \theta_k \varepsilon_{t+k} + \dots + \varepsilon_t \quad (12')$$

ただし θ_j ($j=1, \dots, k$) は任意

期待変数を完全予見と同じ次元の空間に写すため、ARパラメタは一意に決定される。このように、⁽⁸⁾将来の実現値を説明変数に含む実証研究が近年実施されている。

一方未定係数法を利用する多くの研究では、構造型に明示的にふくまれる state variable のみで構成される解が想定される。この時、2種類の問題がある。第一に、完全予見より少ないAR次数を想定すると、ARパラメタの多数性が排除されない。第二に、内生的MA項が考慮されない。例えば MaCallum (1983) では、完全予見下でAR(2)にしたがうモデルについてMA項をもたないAR(1)が解として想定されている。AR(2)からARMA(1, ∞)への変換は、同一ARMAプロセスの異なる表現形式にすぎないが、AR(1)への変換はまったく別のプロセスに移すため構造的变化をもたらす。⁽⁹⁾また、将来の期待が1期前迄の情報で形成されるような場合、誤差項の内生的系列が存在するにも関わらず、多くの理論モデルでこのMA項が無視されている。

注(7) t 時点の変数を過去の変数で説明する解形式を因果系、将来変数を説明変数に含む解形式を非因果系と呼ぶ。(青木(1984) p.9)

(8) 労働需要の動学モデルについて、Shapiro (1986), Nakamura (1990) 等。誤差項と説明変数の直交条件が満たされないため、操作変数法やGMM推定法(Hansen=Singleton (1982))等で推定が行なわれる。

(9) Muth (1961) のMA(∞)、Aoki=Canzoneri (1979) のARMA(1, ∞)の想定は有限次数でtruncateされないため、この様な構造的变化をもたらさない。しかし、後者はProposition 1の証明で指摘したように、完全予見下で2階以上のAR項を持つ時、その多数性の問題が残る。

3-2 従来の多数性排除基準

これまで、次元の退化を補う方法として(i)の補助条件について多くの研究がおこなわれてきた。ここでは、構造モデルに明示的に含まれる State variable のみを説明変数とする解形式を想定し、そのAR次数と一致するように期待空間における特性方程式の根の数をしぼりこむ基準が提案されている。以下にこれらのいくつかを整理検討し、その問題点を指摘する。

(1) 有限分散(定常性)条件

真の過程の定常性を仮定し、完全予見下の特性根のうち発散根を排除することで次元の退化を解決し、多数性を排除する。解が一意に決定される為の必要十分条件は安定根の数と state variables (あるいは初期条件)が一致することであるから、発散根を排除したあとでも安定根の数が想定する解の state variables の数を上回る場合、一意性は保証されない⁽¹¹⁾。

(2) 最小分散条件

Taylor (1977) は、主体が risk-avertter と仮定し、最小分散が最大効用をもたらすとして最小分散条件を提案する。安定根の数に対して state variables が不足する場合、より小さな分散をもたらす根から順に選択され、残る安定根は排除される。定常性条件に最小分散条件を加えると解は一意に決定される。

(3) 最小情報集合基準

MaCallum (1985) は、最小情報集合基準を提起した。より少ない情報を利用したとしても期待が consistent になるような robust な特性根が採択される。しかし、このような robust な特性根が複数存在する場合、いずれを選択するか不明である。

(4) 漸近的安定性

Evans (1985) は、均衡の安定性を選択基準とする。与えられたモデルのもとで、安定性を満たす解が採択される。この基準は、同次項の次数を減少させるという解の一意性だけでなく、より広範な内容を含む。

上記の基準はいくつかの問題点をもつ。最小分散基準について McCafferty=Driskill (1980) は、分散最小条件のミクロ的妥当性と共に、あらたにもたらされる非線形問題と解の不決定を指摘する。経済主体がリスク回避的であれば、他の条件を一定として、最小分散が最大期待効用をもたらすた

注 (10) Blanchard=Kahn (1980) Proposition 1 および 2

(11) Obstfeld=Rogoff (1983), Obstfeld (1984), MaCallum (1983) で研究されるインフレーションの Cagan Model では、完全予見下の安定根の数が想定する解の state variables の数を上回るため、この基準を用いても依然として多数性は排除されない。そのため、合理性のもとでも解が volatile になりバブル的動きを示すという結論が導かれている。

め、ミクロの行動仮説からこの条件がきわめて妥当に思われる。しかし彼等は、最大期待効用解が必ずしも最小分散解に一致しない可能性と、非線形性による解の多数性を指摘する。⁽¹²⁾したがって、最小分散条件はミクロの根拠と矛盾し、また解が不決定になる可能性をもつ。

その他に2つの問題が残る。第一に、高階の差分方程式で特性根が実根でない場合、解が存在しない⁽¹³⁾と結論される。第二に、検定において仮説棄却の可能性が高くなる。実証研究では確率過程の定常性が仮定されることから、(1)の定常性基準は問題ないものの、それ以外は推定精度の減少や検定のバイアスをもたらす可能性が高い。

(S)のパラメタ簡約基準にしたがうと、選択される解形式は最小量の情報に依存する。MaCallum (1983)の最小情報基準は、AR項が不決定になる場合特性根の数をしぼり次数を減少することを目的としている。しかし Proposition 1のAR項は一意に決定されることから、両基準はより少ない情報という基本概念において一致するものの、本稿で提起するパラメタ簡約基準はARMA(2, 1)をARMA(1, 0)に変換するような構造的変化をもたらす基準と異なる。

4. 実証研究へのインプリケーション

4-1 情報構造によりもたらされる内生的MA項の意義

Proposition 1の解形式において、従属変数はできるだけ自身の過去の値で説明される。これは、時系列推定の際AR表現の推定の方が容易で、動学的計量経済モデルで誤差項の処理は困難な問題をもたらすうえ、説明変数の数をできる限り少なくするという技術的問題を考慮している。⁽¹⁴⁾

モデルの情報構造のため、ホワイトノイズを外生ショックにもつ合理的期待モデルでも誤差項に系列相関が発生することが2節の分析で明らかにされた。複数の将来期の期待が含まれる時、あるいは $t+1$ 期の期待が $t-1$ 期の情報で形成されるなど、情報と予想される変数の time subscript が2期以上離れていると、次元退化のため攪乱項の誘導型パラメタが構造パラメタの関数として不決定になる。しかし、誘導型のARパラメタと全体の次数は一意に決定される。推定は、モデルの情報構造から期待される誤差項の系列相関を考慮したうえで cross equation restrictionのもとに行なわれる。

注(12) 主体の期待変数の分布が、平均の意味だけでなく分散においても真の分布と不偏性を満たすことを合理的期待仮説が要請するのであれば、分散に依存する構造パラメタも内生化されなければならない。モデルは非線形になり、特性方程式の次数が増加する。このとき、安定根の数も増加すると初期条件の不足が生じる。同論文は、Muth (1961)の在庫投機モデルについて最小分散と最大効用が一致しないことを示している。在庫投機者がリスク回避的であると、在庫投機のパラメタは、投機者の相対的危険回避度と期待価格の分散の非線形関数であらわされる。Muthは、このパラメタを外生的に扱うことでモデルの線形性を維持し解を導出している。本稿は、Aoki=Canzoneri (1979)と同様に線形性を仮定する。

(13) Evans=Honkapohja (1986) p. 236.

(14) Sargent (1979) p. 267.

Chow (1983) は、不決定になる MA パラメタをデータから統計的に選択する事を示唆する。最小分散基準を適用するとこの値はゼロにおかれるという指摘があるが、この適用方法は正しくない。最小分散基準は主体の最適化行動にもとづく基準である。しかし、Proposition 2 のもとで不決定になる MA パラメタは、主体の最適化行動に依存しない。むしろ、これを先験的にゼロにおくと期待にバイアスがかかり、合理的期待仮説そのものに矛盾する可能性がある。

MA 項を持つプロセスにたいして AR 項のみの推定モデルを適用すると、2つの問題が生じる。Proposition 1 の形式を AR 項のみの持つ形式に変換すると、ARMA(∞ , 0) に変換される。たとえば ARMA(1, 1) の場合

$$(1 - \phi_1 L)y_t = (1 - \theta_1 L)\varepsilon_t$$

変形して

$$y_t = (\phi_1 - \theta_1) \sum_{j=1}^{\infty} \theta_1^{j-1} y_{t-j} + \varepsilon_t \quad (13)$$

今期の内生変数は無限期過去の自身の値に依存するため、強い persistence が観察され有限個のサンプル利用はバイアスをもたらす。実際多くの実証研究において、実質 GNP や雇用量等のマクロ諸変数で強い persistence が検出されている。Kennan (1988) は、MA 項の存在から合理的期待均衡アプローチに疑問を投げかけるが、本稿の分析から MA 項の存在が必ずしも期待の合理性に矛盾しないことは明らかである。

4-2 over identifying restriction による検定

現在合理的期待モデルの検定に利用される方法の 1 つに、over identifying restriction がある。主体の情報集合に直交する変数を加えて、その有意性がテストされ、多くの場合従属変数の過去の実現値が追加変数として選択される。恒常所得仮説や労働の異時点間代替仮説について、この方法で合理的期待を棄却する研究がある。⁽¹⁵⁾しかし、情報構造に適した攪乱項の処理を行なわないと、この検定は意味をもたない。期待が今期のショック実現以前に形成されるとき、Proposition 1 および 2 から MA(1) の可能性が排除されない。ARMA(p , q) を MA 項を持たない形式に変換すると、(13) 式のように従属変数が無限の過去の自身の実現値に依存し、当然 over identifying restriction の帰無仮説が棄却される。恒常所得仮説の研究において、所得の時系列推定値を恒常所得とする検定方法が採用されているが、外乱がホワイトノイズでない場合にも、外乱の時系列特性に加えて情報構造による内生的攪乱構造も同時に考慮されなければならない。

検定は、あくまでモデル、期待仮説ならびに情報構造の結合検定である。従来の研究では情報構造があまり考慮されていなかったが、今期のショックが実現する以前に取り引きに参加することが

注 (15) 恒常所得仮説では、Flavin (1981) (1985)、Hayashi (1982) 等、労働の異時点間代替仮説では Mankiw=Rotemberg=Summers (1985) が、over identifying restriction を利用して仮説を棄却する結論を得ている。

現実にあると考えられるから、1期先の将来期待が含まれる場合であっても少なくともMA(1)の可能性を検討する必要がある。

5. おわりに

合理的期待仮説にもとづく線形確率動学モデルにおいて、期待の合理性とパラメタ倏約基準から、従来の多数解モデルでも一意なAR項をもつARMA表現が一意に採択される。これは最小数のパラメタをもつため、実証研究に有用であることが示された。さらに、すべてのパラメタが一意に定まる条件と情報構造の関連が明らかにされた。異なる情報にもとづく期待を含む重層的情報構造をもつモデルや、複数期にわたる将来の期待が含まれたり $t-1$ 期の情報で $t+1$ の期待を予想するモデルであっても、deterministic part は完全予見モデルと一致し、情報のラグは攪乱項にのみに表れる。これらの分析から、従来の研究であまり考慮されていなかった情報構造による内生的攪乱の存在の可能性と、それが実証研究にもつ重要性が指摘された。

労働市場の実証研究で、多くの国において hysteresis 現象が検出されている。しかし、情報構造による内生的誤差の系列相関を適切に処理しないと、誤って合理的期待均衡モデルを棄却するおそれがある。この研究をもとに、労働の異時点間代替仮説について検定を実施する予定である。また、情報の非対称性が時間を通じて変化しない場合のみが分析されたが、非対称性が通時的に変化するモデルも現実的と考えられることから、可変的情報の非対称性がもたらすマクロ的効果を今後の研究課題としたい。

参 考 文 献

- Aoki, Masanao and Matthew Canzoneri (1979) "Reduced Forms of Rational Expectations Models," *Quarterly J. of Economics* 93, 59-71.
- Black, Stanley W. (1976) "Rational Response to Shocks in a Dynamic Model of Capital Asset Pricing," *American Economic Review* 66, 767-779.
- Blanchard, Olivier J. (1979) "Backward and Forward Solutions for Economies with Rational Expectations," *American Economic Review* 69, 114-118.
- Blanchard, Olivier J. and S. Fischer (1989) *Lectures on Macroeconomics*, London: MIT Press.
- Blanchard, Olivier J. and Charles M. Kahn (1980) "The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations," *Econometrica* 48, 1305-1311.
- Barro, Robert J. (1976) "Rational Expectations and the Role of Monetary Policy," *J. of Monetary Economics* 2, 1-32.
- Cagan, Philip (1956) "The Monetary Dynamics of Hyperinflation," *Studies in the Quantity Theory of Money*, Chapter 2, 25-120, Chicago: Univ. of Chicago Press.
- Calvo, Guillermo A. (1978) "On the Indeterminacy of Interest Rates and Wages with Perfect Foresight," *J. of Economic Theory* 18, 321-337.
- Canzoneri, M. B., D. W. Henderson and K. S. Rogoff (1983) "The Information Content of the Interest Rate and Optimal Monetary Policy," *Quarterly J. of Economics* 98, 545-566.

- Chow, Gregory C. (1983) *Econometrics*, New York: McGraw-Hill.
- Evans, George (1985) "Expectational Stability and the Multiple Equilibria. Problem in Linear Rational Expectations Models," *Quarterly J. of Economics* 100, 1217-1233.
- Evans, George and Seppo Honkapohja (1986) "A Complete Characterization of ARMA Solutions to Linear Rational Expectations Models," *Review of Economic Studies* 52, 226-239.
- Fischer, Stanley (1977) "Long-Term Contracts, Rational Expectations, and the Optimal Money Supply Rule," *J. of Political Economy* 85, 191-205.
- Flavin, Marjorie A. (1981) "The Adjustment of Consumption to Changing Expectations about Future Income," *J. of Political Economy* 89, 974-1009.
- (1985) "Excess Sensitivity of Consumption to Current Income: Liquidity Constraints or Myopia?" *Canadian J. of Economic* 18, 895-916.
- Gourieroux, C., J. J. Laffont and A. Monfort (1982) "Rational Expectations in Dynamic Linear Models: Analysis of the Solutions," *Econometrica* 50, 1982, 409-425.
- Grossman, Sanford J. and Laurence Weiss (1982) "Heterogeneous Information and the Theory of the Business Cycle," *J. of Political Economy* 90, 699-727.
- Hansen, L. P. and K. J. Singleton (1982) "Generalized Instrumental Variables Estimation of Nonlinear Rational Expectations Models," *Econometrica* 50, 1269-1286.
- Hayashi, F. (1982) "The Permanent Income Hypothesis: Estimation and Testing by Instrumental Variables," *J. of Political Economy* 90, 895-916.
- Kehoe, Timothy J. and David K. Levine (1985) "Comparative Statics and Perfect Foresight in Infinite Horizon Economies," *Econometrica* 53, 433-453.
- Kennan, John (1988) "Equilibrium Interpretations of Employment and Real Wage Fluctuations," *NBER Macroeconomics Annual* 3, 157-205.
- Kydland, Finn E. and Edward C. Prescott (1982) "Time to Build and Aggregate Fluctuations," *Econometrica* 50, 1345-1370.
- Lucas, Robert J. (1972) "Expectations and the Neutrality of Money," *J. of Economic Theory* 12, 104-124.
- MacCallum, Bennett T. (1983) "On Non-Uniqueness in Rational Expectations Models," *J. of Monetary Economics* 12, 139-168.
- Mankiw, N. G., J. J. Rotemberg and L. H. Summers (1985) "Intertemporal Substitution Hypothesis in Macroeconomics," *Quarterly J. of Economics* 100, 225-251.
- McCafferty, Stephen and Robert Driskill (1980) "Problems of Existence and Uniqueness in Nonlinear Rational Expectations Models," *Econometrica* 48, 1313-1317.
- Muth, John F., (1960) "Optimal Properties of Exponential Weighted Forecasts," *J. of American Statistical Associations* 55, 299-306.
- (1961) "Rational Expectations and the Theory of Price Movement," *Econometrica* 29, 315-335.
- Nakamura, Shinichiro (1990) "An Adjustment Cost Model of Long Term Employment," The paper presented at the 1990 Meeting of Japan Association of Economics and Econometrics.
- Obstfeld, Maurice (1984) "Multiple Stable Equilibria in an Optimizing Perfect Foresight Model," *Econometrica* 52, 223-228.
- Obstfeld, Maurice and Kenneth Rogoff (1983) "Speculative Hyperinflations in Macroeconomic Models: Can We Rule Them Out?" *J. of Political Economy* 91, 675-687.

- Phelps, Edmund S. and John B. Taylor (1977) "Stabilizing Powers of Monetary Policy under Rational Expectation," *J. of Political Economy* 85, 163-190.
- Scarth, William M. (1985) "A Note on Non-Uniqueness in Rational Expectations Models," *J. of Monetary Economics* 15, 247-254.
- Sargent, Thomas J. (1979) *Macroeconomic Theory*, New York: Academic Press.
- Sargent, Thomas J. and Neil Wallace (1973) "The Stability of Models of Money and Growth," *Econometrica* 41, 1043-1048.
- (1975) "Rational Expectations, the Optimal Monetary Instrument and the Optimal Money Supply Rule," *J. of Political Economy* 83, 241-254.
- Shapiro, Matthew D. (1986) "The Dynamic Demand for Capital and Labor," *Quarterly J. of Economics* 101, 517-542.
- Talor, John B. (1977) "Conditions for Unique Solutions in Stochastic Macroeconomic Models with Rational Expectations," *Econometrica* 45, 1377-1385.
- 青木正直 (1984) 『時系列解析と日本経済』 東洋経済新報社。
- 山本 拓 (1988) 『経済の時系列分析』 創文社。

(慶應義塾大学大学院経済学研究科博士課程)