Title	多部門モデルにおける短期均衡
Sub Title	A disaggregated capitalist economy in a short-run equilibrium
Author	細田, 衛士
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1991
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.84, No.特別号-I (1991. 9) ,p.77- 90
JaLC DOI	10.14991/001.19910901-0077
Abstract	
Notes	富田重夫教授退任記念論文集
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19910901-0077

「三田学会雑誌」84巻特別号—I（1991年9月）

多部門モデルにおける短期均衡*

細　田　衛　士

1　はじめに

ここ数年のあいだ，多部門経済成長モデルが所得分配構造を取り入れた形で論議されることが多くなった。Franke (1985) や Hosoda (1989) はスラッファーレオンティエフ型のモデルを用いて所得分配の問題を論じている。前者は，パシネッティ均衡が得られる条件を多部門モデルを用いて論じている。一方，後者はパシネッティ均衡と反パシネッティ均衡との転換の問題を分析している。また，Salvadori (1980)，Bidard and Hosoda (1987)，Bidard and Franke (1987a) らは，フォン・ノイマンの経済成長モデルを拡張し，2階級経済についてのかなり一般的な結果を導きだしている。

フォン・ノイマンモデルは結合生産を扱っているという点で，スラッファーレオンティエフ的なモデルよりも一般的と言えるであろう。しかしながら，ノイマンモデルではすべての財ストックが斉一経済成長を満たすような特別な比率に与えられていなければならないというひとつの欠点がある。

確かにこのような仮定は長期の競争経済を扱う場合は許されるであろう。しかし短期均衡を分析しようとするとき，この仮定は強すぎるのである。なぜなら短期では投資は変動し，このために資本ストックが斉一経済成長を保証するような比率にあることはまれであるからである。

さてそこで本論文の目的であるが，ここでは各資本ストックが任意の量に与えられ，投資が内生変数に依存するような多部門経済の短期競争均衡を分析しようと思う。我々はここでフォン・ノイマン－森嶋モデルではなく，DOSSO-Leontief 型のモデルを多少修正した形で用いる。(Dorfmann et al.〔1958〕を参照。）ここでの主要目的は競争均衡存在の充分条件を与えることである。

2　モデルと仮定

2. 1　我々が分析の対象とするのは，資本家と労働者のいる2階級経済である。資本家はそれぞれ

＊　この論文は，横浜市立大学におけるセミナー，TCER，数理経済学下田コンファレンスにおいて報告された。ここに，コメント頂いたすべての参加者に謝意を表するものである。また I. Steedman，大山道広，藤本喬夫，金子守，田中宏の各教授より貴重なコメントを頂いた。この方々にも深く感謝したい。尚本研究は，財団法人学術振興野村基金より助成を受けている。

の持つ資本ストックを各生産プロセスに配分し生産を行なう。生産が終わると，彼らは生産物を市場で売り利潤を得る。利潤とはこの場合資本の用役に対する報酬であると考えられ，この用役価格は需給のバランスによって決まると想定する。

一方労働者は労働を資本家に供給し，賃金を得る。賃金もまた労働者にたいする需要と供給のバランスによって決まるものと考える。

このような分類に従えば，市場は3つに別れる。すなわち，財市場と資本用役市場と労働市場とである。我々は，財の価格，資本用役価格，そして賃金率は各市場で競争的に決まり，財の価値は資本レンタル，賃金としてすべて資本と労働に帰属するものと想定する。

2. 2　資本ストックと労働供給は生産期間のはじめに与えられていて，資本家はこれらを用いて生産プロセスを稼働させる。生産が終わると，純生産物は資本家には利潤として，労働者には賃金として分配される。簡単化のために，労働者は彼らの所得をすべて消費するものとし，資本家は所得のすべてを貯蓄して資本蓄積（投資）に費やすものとする。

つぎの生産期間のはじめには，資本ストックは蓄積の結果増加しているであろう。この新しい資本ストックと労働供給をもって再び生産は進行してゆくことになるのである。

2. 3　便宜のために後に用いることになる記号をここで説明しておくことにする。(1)

E：産出物行列（n行m列）

A：流動資本係数行列（n行m列）

B：固定資本係数行列（n行m列）

L：労働投入ベクトル（m次元行ベクトル）

l^s：労働供給量（スカラー）

K：資本ストックベクトル（n次元列ベクトル）

I：投資ベクトル（n次元列ベクトル）

p：価格ベクトル（n次元行ベクトル）

q：資本用役価格（n次元行ベクトル）

w：賃金率（スカラー）

x：アクティビティーベクトル（m次元列ベクトル）

e^n：すべての要素の値が1であるn次元列ベクトル

R^n_+：n次元ユークリッド空間の非負象限

P^n：n次元価格単体

注（1）　ベクトルに関して次の表記法を採用する。xとyをn次元ベクトルとする。すべてのiについて$x_i=y_i$ならば$x=y$, $x_i \leqq y_i$ならば$x \leqq y$, $x \leqq y$かつ$x \neq y$ならば$x \leq y$とする。また$0 \leqq x$, $0 \leq x$, $0 < x$に応じてxを非負，半正，正のベクトルと呼ぶ。

$e^{(i)}$：i 番目の要素が1でその他の要素はすべてゼロであるようなn次元行ベクトル

S：総貯蓄額（スカラー）

C：消費ベクトル（n次元列ベクトル）

つぎに我々は基本的な仮定について述べ，モデルを展開することにする。

2. 4　生産技術に関して我々はつぎのような仮定をする。m個の生産プロセスを用いて，n個の財が生産されるものとする。この生産技術は，線形の生産技術であり，行列（A，B，L）で表示される。ここでAは流動資本の投入行列，Bは固定資本の投入行列，Lは労働の投入行列である。これらの投入によって産出物が得られ，この産出物の行列はEで表される。（A，B，L，E）は，各アクティビティー水準が1の場合の投入産出を表していることは言うまでもない。この生産技術に関してつぎのような仮定をする。

A 1　EとAの各行には，少なくともひとつ正の要素があり，AとBの各列には少なくともひとつ正の要素がある。またLの要素はすべて正である。

A 1によれば，労働以外のすべての財は生産可能であり，そして流動資本として使うことができる。また，どのプロセスも流動資本，固定資本，労働を投入することになる。DOSSO モデルは，単一生産物のみしか許さないが，ここでは結合生産の可能性も排除しないことにする[(2)]。すべての財が固定資本として用いられるという仮定は本質的な仮定ではなく，必要ならば外すことができる。単に資本レンタルの次元をへらせばよいのである。しかしここでは表現を簡単にするために置くことにする。

A 2　（再生産可能性）少なくとも非負のベクトルxが存在して

$$(E-A)x>0$$

を満たす。

この仮定の意味するところは，ある水準のアクティビティーを用いれば，必ずすべての財を純再生産できるということである。

さてここで競争均衡価格をつぎのように定義しよう。

$$pE\leqq pA+qB+wL \tag{1}$$

この（1）は，つぎのように変形できる。

$$p(E-A)\leqq qB+wL \tag{2}$$

注（2）　Dorfman, Solow & Samuelson（1958, pp. 281-300）を見よ。

上の不等式において，厳密な不等号が成立したときそのアクティビティー水準はゼロになる。この不等式で表される価格形成の状態は，森嶋の言う「強い意味での競争」(“strong competition”, Morishima (1958)) を表していると言える。超過利潤が存在すれば，この利潤をめぐって資本家が争って生産を拡大する結果，結局は超過利潤が消滅するのであり，(2) はそのような最終の状態を意味しているのである。

2. 5 次に資本レンタルと賃金率の定義域を考えよう。P^n に属する p にたいして，$p(E-A)$ は少なくともひとつ正の要素を持っている。もし仮にそうでないとすれば，$p(E-A)\leqq 0$ が成立してしまい，これはA 2に反するからである。このとき，A 1より明らかに (2) が成立するような (q, w) の組み合わせが存在する。さらにそのような (q, w) は有界である。なぜならば，(2) において少なくともひとつ等式が成立しているからである。したがって，(2) を少なくともひとつの等式とともに満たすようなすべての (q, w) にたいして，$q_i\leqq\sigma(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ かつ $w\leqq\sigma$ なる σ が存在する。さてこのとき，上のようなすべての (q, w) は，競争均衡レンタルと賃金率の候補と考えられるが，このような (q, w) を要素として持つ凸でコンパクトな集合 Q をつくることができる。すなわち

$$Q=\{(q, w)\,|\,0\leqq q_i\leqq\sigma \quad i=1, 2, \cdots\cdots, n \quad \text{かつ} \quad 0\leqq w\leqq\sigma\}$$

Q の作り方から，n 次元価格単体と Q との直積 $P^n\times Q$ をつくると，すべての競争均衡価格は，この直積集合の要素であることがわかる。また，

$$(e^{(i)}, 0, \cdots\cdots, 0) \qquad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

も $P^n\times Q$ に属していることに注意する。

2. 6 次に消費と労働供給について考えよう。消費は，労働者の所得すなわち賃金所得より生じる。我々は，簡単化のために労働者は貯蓄しないものとし，wl^s すべてを消費に回すものとしよう。そして消費は価格と賃金率とに依存するものとする。このとき，労働者の消費関数は $C(p, w)$ と書くことができるが，この関数に関して以下の仮定を採用する。

A 3 ベクトル値関数 $C(p, w)$ は $P^n\times Q$ の上で定義され，非負かつ連続である。

勿論この消費関数は所得制約式 $pC(p, w)=wl^s$ を満たさねばならない。この仮定は純粋な資本財がないことを意味している。(3) この仮定は，Bidard and Hosoda (1987) で行なったようにゆるめることができるが，ここではこの仮定を採用することにする。

一方労働供給関数に関しては，以下のような仮定を採用する。

注 (3) Morishima (1969, pp. 100-101) を見よ。

A 4　労働供給関数 $l^s(p, w)$ は $P^n\times Q$ の上で定義された非負かつ連続な関数である。さらに，$l^s(p, w)$ は w がゼロの時，そしてその時に限りゼロである。

2. 7　資本ストックベクトルは所与であり正であると想定される。資本ストックベクトルが正であるという仮定は，A 1 で行列 B について採用した仮定，すなわち B のいかなる行も少なくともひとつは正の要素を持つという仮定に対応している。前にも述べたとおり，この仮定は容易に弱めることができる。

また，資本減耗はモデルに簡単に取り込むことができるが，ここでは表現を複雑化させないために資本減耗を無視する。

資本家については，利潤所得を貯蓄し，より多くの利潤を獲得するために投資するような人々として考える。その極端な表現は，資本家は所得をすべて貯蓄に回すという想定である。つまり資本家の消費は無視しうるほど小さいと仮定するのである。資本家の消費を入れても以下の結論にはほとんど影響しない。

資本家はその利潤所得をすべて貯蓄するという仮定から，貯蓄額は $S=qK$ と表すことができる。我々は，資本家は資本財の価格と資本用役の価格にしたがって資本財を購入する（資本蓄積を行なう）と仮定する。そして資本蓄積は次の式で表せるとする。

$$\Delta K=\Phi(p, q)S=\Phi(p, q)qK$$

つまり Φ は，資本家がかれらの貯蓄を資本財の購入に配分する n 次元のベクトル値関数であると解釈される。Φ は，次の仮定を満たすものとする。

A 5　$\Phi(p, q)$ は，$P^n\times Q$ の上で定義された連続かつ非負の関数であり，$p\Phi(p, q)=1$ を満たす。

上の仮定の前半部分は極めて技術的な仮定である。後半部分，つまり $p\Phi(p, q)=1$ は，資本家はその所得をすべて貯蓄すなわち投資に回すという仮定（$p\Delta K=qK$）を意味している。

2. 8　さてこの経済の均衡は次のように表すことができる。

（3）　$$Ex\geqq Ax+\Delta K(p, q)+C(p, q)$$

（4）　$$pEx=pAx+p\Delta K(p, q)+pC(p, q)$$

（5）　$$K\geqq Bx$$

（6）　$$qK=qBx$$

（7）　$$l^s(p, w)\geqq Lx$$

(8) $$wl^s(p,\ w)=wLx$$

(9) $$pE\leqq pA+qB+wL$$

(10) $$pEx=(pA+qB+wL)x$$

(11) $$p\geqq 0,\ \ q\geqq 0,\ \ w\geqq 0,\ \ x\geqq 0$$

(3)-(8) の意味していることは，価格が調整して均衡では超過需要がなくなるということである。(9) (10) は，価格と費用の関係を表している。もし生産額よりも生産費用の方が大きいような生産過程があれば，その生産過程は均衡では稼働されない。

上の，(3)-(11) は行列表示で次のように書かれる。

(12) $$\begin{pmatrix} E-A \\ -B \\ -L \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} \varDelta K+C \\ -K \\ -l^s \end{pmatrix}$$

(14) $$(p,\ q,\ w)\begin{pmatrix} E-A \\ -B \\ -L \end{pmatrix} x = (p,\ q,\ w)\begin{pmatrix} \varDelta K+C \\ -K \\ -l^s \end{pmatrix}$$

(14) $$(p,\ q,\ w)\begin{pmatrix} E-A \\ -B \\ -L \end{pmatrix} \leq 0$$

(15) $$(p,\ q,\ w)\begin{pmatrix} E-A \\ -B \\ -L \end{pmatrix} x=0$$

(16) $$p\geqq 0,\ \ q\geqq 0,\ \ w\geqq 0,\ \ x\geqq 0$$

3　均衡解の存在証明

3. 1　この節では，不等式体系 (12)-(16) が解を持つことを証明する。この目的のために，まずはじめに我々は $(p,\ q,\ w)$ の定義域を $P^n\times Q_\varepsilon$ に制限して考える。ここで Q_ε は，充分に小さい ε にたいして次のように定義される。

$$Q_\varepsilon=\{(q,\ w)\in Q\,|\,0<\varepsilon\leqq q_i\quad i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n\quad \text{かつ}\quad 0<\varepsilon\leqq w\}$$

さて $P^n \times Q_\varepsilon$ から任意の (p, q, w) を選ぶとする。$p(E-A)$ は少なくともひとつ正の要素を持っている。A 1 の仮定より $qB+wL$ は正であるので，以下の不等式で少なくともひとつの生産過程において厳密な等式で成り立つようにスカラー t を決めることができる。すなわち

$$p(E-A) \leqq t(qB+wL) \tag{17-1}$$

$$p[E-A]_i = t(qB_i - wL_i) \quad \text{（少なくともひとつの } i \text{ について）} \tag{17-2}$$

ここで A_i や B_i は A や B の第 i 番目の列を表している。また L_i は L の第 i 番目の要素を表している。明らかに t は (p, q, w) の関数であり，しかも連続である。したがって，$t(p, q, w)$ と表現することにする。このとき，(p, q, w) と $t(p, q, w)$ は行列不等式 (14) を少なくともひとつの等式とともに満足している。作り方から (tq, tw) は Q に入っていることに注意しておく。

次に，以下の式に注目しよう。

$$tqBx' + twLx' = tqK + twl^s(p, tw) \tag{18}$$

上の左辺は，レンタルと賃金率が (tq, tw) だった場合の資本財と労働に対する総需要額の合計，右辺はそれらの総供給額の合計を表す。（我々は，(18) において意図的に t を落とさない。）

(q, w) は正のベクトルであるから，(12) の右辺は正である。ベクトル qB, wL もA 1 の仮定から正である。そうすると，m 次元単体に属するいかなる半正の x に対しても，スカラーの h が存在して hx が (18) を満たすようにすることができる。このとき我々は，$F(p, q, w)$ を次のように定義できる。

$$F(p, q, w) = \{hx \mid x \in R^m_+ \text{ で，} x' = hx \text{ は (18) を満足する。}\}$$

上の議論より我々は $F(p, q, w)$ が空でないことを知っている。さらにこの F に関して次のことが成り立つ。

補助定理 1　$F: P^n \times Q_\varepsilon \to R^m_+$ は連続対応であってその像はコンパクトである。

証明　(tq, tw) は有界な集合 Q に属するから，Q_ε に属するいかなる (q, w) に対しても (18) の右辺は有界である。したがって $F(Q_\varepsilon)$ もその作り方から有界である。さて，点列 $\{p_k, q_k, w_k\}$ と $\{x_k\}$ が $x_k \in F(p_k, q_k, w_k)$ を満足しながら，それぞれ (p_0, q_0, w_0) と x_0 に収束したとしよう。t は (p, q, w) の連続関数であるから，$t_k = t(p_k, q_k, w_k)$ は $t(p_0, q_0, w_0)$ に収束する。

$$(t_k q_k B + t_k w_k L)x_k = t_k q_k K + t_k w_k l^s(p_k, t_k w_k)$$

がすべての k について成立しなければならないから，l^s の連続性より

$$(t_0 q_0 B + t_0 w_0 L)x_0 = t_0 q_0 K + t_0 w_0 l^s(p_0, t_0 w_0)$$

の成立することが保証されるが，これは x_0 が $F(p_0,\ q_0,\ w_0)$ に属することを示している。したがって，Fは優半連続である。

次に，点列 $\{p_k,\ q_k,\ w_k\}$ が $(p_0,\ q_0,\ w_0)$ に収束するとし，$x_0 \in F(p_0,\ q_0,\ w_0)$ であるとしよう。すると次の式が成り立つ。

$$q_0Bx_0+w_0Lx_0=q_0K+w_0l^s(p_0,\ w_0)$$

x_0 は半正のベクトルであるから，スカラー h_k が存在して

$$q_kB(h_kx_0)+w_kL(h_kx_0)=q_kK+w_kl^s(p_k,\ t_kw_k)$$

がすべての k について成り立つ。$x_k=h_kx_0$ と x_k を定義しよう。このとき，$x_k \in F(p_k,\ q_k,\ w_k)$ であり，$k \to \infty$ のとき $x_k \to x_0$ となる。したがって，$F(p,\ q,\ w)$ は劣半連続となる。

（証明終わり）

3. 2　さて，$U(p,\ q,\ w,\ x)$，$U^*(p,\ q,\ w)$ そして $Y(p,\ q,\ w)$ を次のように定義しよう。

$$U(p,\ q,\ w,\ x)=[p(E-A)-t(p,\ q,\ w)\ (qB+wL)]x$$

$$U^*(p,\ q,\ w)=\mathrm{Max}[U(p,\ q,\ w,\ x)\,|\,x \in F(p,\ q,\ w)]$$

$$Y(p,\ q,\ w)=\{x \in F(p,\ q,\ w)\,|\,U(p,\ q,\ w,\ x)=U^*(p,\ q,\ w)\}$$

Q_ϵ に属する $(p,\ q,\ w)$ が与えられたとしてみよう。このとき，半正のベクトル $x_0 \in P^m$（m次元単体）で，$[p(E-A)-t(p,\ q,\ w)\ (qB+wL)]x_0=0$ となるものが存在する。すると，適当に正のスカラー hをとると，$x=hx_0$ が (18) を満たすようにすることができる。$[p(E-A)-t(p,\ q,\ w)\ (qB+wL)]$ は，正の要素を持っていないから，x_0 は $Y(p,\ q,\ w)$ に属する。明らかに，$U^*(p,\ q,\ x)$ は常にゼロである。

ここで簡単に$Y(p,\ q,\ w)$ が何を意味するかについて述べておこう。まず始めに我々は，$(p,\ q,\ w)$ を $P^n \times Q_\epsilon$ から選んできた。そして，(2) が少なくともひとつ厳密な等式とともに成り立つように $(tq,\ tw)$ を決めたのであった。次に我々は，仮に資本レンタルと賃金率が $tq,\ tw$ であるときに，純生産物価値が利潤と賃金とに帰属するように生産プロセスの稼働水準を決めたのであった。この意味で，$Y(p,\ q,\ w)$ に属するどんなアクティビティー・ベクトルも均衡アクティビティー・ベクトルの候補であり，同様に $(tq,\ tw)$ は均衡資本レンタルと賃金率の候補である。我々は実際にそれらのうちの少なくともひとつは均衡アクティビティー・ベクトルおよび均衡資本レンタルと賃金率になっていることを示す。

対応 $Y(p,\ q,\ w)$ は，次の性質を持つ。

補助定理 2　$Y: P^n \times Q_\varepsilon \to R^m_+$ は非空凸そしてコンパクトの価をとる優半連続な対応である。

証明　ベルジュの最大値の定理の前提がすべて満たされるから，優半連続性の性質は明らかである。（ベルジュ 1963, p.116 を参照。）$Y(p, q, w)$ のコンパクト性と凸性は明らかである。

（証明終わり）

3. 3　$P^n \times Q_\varepsilon$ に属するすべての (p, q, w) に対して我々は均衡アクティビィティー・ベクトルの候補を得たわけであるが，このベクトルについて仮想的な需要を次のように定義できる。消費需要を $C(p, tw)$，投資需要を $\Delta K(p, tq) = \Phi(p, tq)(tqK)$ とする。ここで，$pC(p, tw) = twl^s(p, tw)$，$p\Phi(p, tq) = 1$ が成立している。仮想的な総需要は，$Ax + C(p, tw) + \Delta K(p, tq)$ と表される。このとき，$P^n \times Q_\varepsilon \times Y(p, q, w)$ に属する (p, q, w, x) に対して超過需要を次のように定めることができる。

$$z(p, q, w, x) = \begin{pmatrix} \Delta K(p, tq) + C(p, tw) \\ -K \\ -l^s(p, tw) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E-A \\ -B \\ -L \end{pmatrix} x$$

超過需要対応は，このとき $Z(p, q, w) = z(p, q, w, Y(p, q, w))$ として定義される。我々はこの超過需要対応に関して次のことを証明できる。

定理 1　$Z: P^n \times Q_\varepsilon \to R^{2n+1}$ は，非空，コンパクト，凸の値を持つ優半連続な対応である。

証明　優半連続性は，補助定理2よりただちに得られる。コンパクト性と非空性は明らかである。凸性は，$Y(p, q, w)$ の凸性より得られる。　（証明終わり）

3. 4　均衡点の存在証明をするために，次の補助定理が必要であるが，これはゲール＝二階堂＝デブリューの補助定理の拡張版にほかならない。

補助定理 3（ゲール＝二階堂＝デブリュー）

対応 $Z: D \subset R^k_+ \to R^k$ が次の性質を満足するとする。

(i)　D は非空，凸，かつコンパクトである。

(ii)　$Z(p)$ は非空，コンパクト，凸であって，Z は優半連続である。

(iii)　D に属するすべての p について $pZ(p) \leqq 0$ がなり立つ。

このとき，$p^* \in D$, $z^* \in Z(p^*)$ が存在して，$z^* \in D^0$ となる。ここで，D^0 は D の極錐つまり $D^0 = \{z \mid z_T D \leqq 0\}$ である。(4)

注（4）　a を n 次元の列（行）ベクトルとする。このとき a_T によって，われわれは a の転置行列を表す。

証明　Debrue (1959, p. 82) を見よ。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終わり)

このとき我々は (12)-(16) の体系が解を持つことを示すことができる。すなわち次の定理を証明できる。

定理 2　不等式体系 (12)-(16) は解を持つ。

証明　(i)　$P^n \times Q_\varepsilon$ から任意の (p, q, w) を選ぶとする。簡単な計算によって次の式を得る。

$$
\begin{aligned}
&(p, q, w)\, z(p, q, w, x) \\
&\quad = p\Phi(p, tq)(tqK) + pC(p, tw) - p(E-A)x - qK + qBx - wl^s(p, tw) + wLx \\
&\quad = -p\{[E-A]x - \Phi(p, tq)(tqK) - C(p, tw)\} \qquad \text{((18) による)} \\
&\quad = -\{p[E-A] - tqBx - twLx\} \qquad \text{((18) と } p\Phi(p, tq)=1 \text{ による)} \\
&\quad = -\{p[E-A] - t(qB + wL)\}\, x \\
&\quad = 0 \qquad (\text{すべての } x \in Y(p, q, w) \text{ について})
\end{aligned}
$$

ここで t は, $t(p, q, w)$ によって定義されている。これでワルラス法則の満たされていることがわかった。$Z: P^n \times Q_\varepsilon \to R^{2n+1}$ は, 補助定理 3 の前提のすべてを満たすから, $(p_\varepsilon, q_\varepsilon, w_\varepsilon) \in P^n \times Q_\varepsilon$ と $z_\varepsilon = z(p_\varepsilon, q_\varepsilon, w_\varepsilon, x_\varepsilon)$ が存在して $z(p_\varepsilon, q_\varepsilon, w_\varepsilon, x_\varepsilon) \in \{P^n \times Q_\varepsilon\}^0$ となる。ここで, x_ε は $Y(p_\varepsilon, q_\varepsilon, w_\varepsilon)$ に属し, $\{P^n \times Q_\varepsilon\}^0$ は $P^n \times Q_\varepsilon$ の極錐を表す。

(ii)　ここで $\varepsilon \to 0$ としよう。つくりかたから点列 $\{p_\varepsilon, q_\varepsilon, w_\varepsilon\}$ は, コンパクトの集合 $P^n \times Q$ の中にいる。更に我々は, $\{x_\varepsilon\}$ もあるコンパクト集合の中に留まることを次のようにして確認できる。(i)における推論より, 次のことが成り立つ。

$$
(p_\varepsilon, \varepsilon e_T^{n+1})\, z(p_\varepsilon, q_\varepsilon, w_\varepsilon, x_\varepsilon) \leqq 0
$$

なぜならば $(p_\varepsilon, \varepsilon e_T^{n+1})$ は $P^n \times Q$ に属し, x_ε は $Y(p_\varepsilon, q_\varepsilon, w_\varepsilon)$ に属するからである。次の式が成り立つことに注意しよう。

$$
\begin{aligned}
&(p_\varepsilon, q_\varepsilon, w_\varepsilon)\, z(p_\varepsilon, q_\varepsilon, w_\varepsilon, x_\varepsilon) \\
&\quad = p_\varepsilon \Phi(p_\varepsilon, t_\varepsilon q_\varepsilon)(t_\varepsilon q_\varepsilon K) + p_\varepsilon C(p_\varepsilon, t_\varepsilon w_\varepsilon) - p_\varepsilon(E-A)x_\varepsilon \\
&\quad = 0
\end{aligned}
$$

したがって, 次の式が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
&(p_\varepsilon, \varepsilon e_T^{n+1})\, z(p_\varepsilon, q_\varepsilon, w_\varepsilon, x_\varepsilon) \\
&\quad = p_\varepsilon \Phi(p_\varepsilon, t_\varepsilon q_\varepsilon)(t_\varepsilon q_\varepsilon K) + p_\varepsilon C(p_\varepsilon, t_\varepsilon w_\varepsilon) - p_\varepsilon(E-A)x_\varepsilon \\
&\qquad - \varepsilon e_T^{n+1} \begin{pmatrix} K \\ l^s \end{pmatrix} + \varepsilon e_T^{n+1} \begin{pmatrix} B \\ L \end{pmatrix} x_\varepsilon \leqq 0
\end{aligned}
$$

しかしこれは次の式を意味する。

$$e_T^{n+1}\begin{pmatrix} B \\ L \end{pmatrix} x_\varepsilon \leqq e_T^{n+1}\begin{pmatrix} K \\ l^s \end{pmatrix}$$

したがって，われわれは x_ε が或るコンパクト集合の中にあることを知る。よって $\{p_\varepsilon, q_\varepsilon, w_\varepsilon, x_\varepsilon\}$ は或コンパクト集合の中を動き，このことから集積点 (p_0, q_0, w_0, x_0) があることがわかる。ここで $\{p_k, q_k, w_k, x_k\}$ を，(p_0, q_0, w_0, x_0) に収束する $\{p_\varepsilon, q_\varepsilon, w_\varepsilon, x_\varepsilon\}$ の部分列とする。$\{t_kq_k, t_kw_k\}$ もコンパクト集合 Q の中にあるから，この点列も収束すると考えてよい。(実際部分列の部分列を取ればよい。) このことから，$\lim_{k\to0}\Phi(p_k, q_k, t_kw_k)(t_kq_kK)$，$\lim_{k\to0}C(p_k, t_kw_k)$ ともに意味があり，したがって $z(p_0, q_0, w_0, x_0)$ も定義されることがわかる。結局次のことが成立する。

$$z(p_0, q_0, w_0, x_0) \in \bigcap_{\varepsilon>0}\{P^n\times Q_\varepsilon\}^0 = \{P^n\times Q\}^0$$

(iii) すべての k について

$$p_k(E-A) \leqq t_k(q_kB+w_kL)$$

が成り立たねばならないから，t_kq_k，t_kw_k ともにゼロに収束することはない。(t_kq_k は n 次元ベクトルであることに注意。) したがって，t_kw_k がゼロに収束するとき，$(t_kq_k/t_kw_k)=q_k/w_k$ は無限大に発散しない。さて x_k は $F(p_k, q_k, w_k)$ に属するから

$$[(q_kB+w_kL)/\{q_kK+w_kl^s(p_k, t_kw_k)\}]\,x_k=1$$

が成立するが，この x_k の係数は今述べたことから無限大に発散しない。このことは，x_k がゼロに収束しないことを保証する。つまり，$x_0\neq0$ である。

(iv) $(e^{(i)}, 0, \cdots\cdots, 0)$ は $P^n\times Q$ に属するから，すべての $i=1, 2, \cdots\cdots, n$ について

$$(e^{(i)}, 0, \cdots\cdots, 0)\,z(p_0, q_0, w_0, x_0) \leqq 0$$

が成り立つ。よって次の式が成立する。

$$(19)\qquad (E-A)x_0 \geqq \lim_{k\to0}\Phi(p_k, q_k\ t_kw_k)(t_kq_kK)+\lim_{k\to0}C(p_k, t_kw_k)$$

(i)における推論から，

$$(20)\qquad p_0(E-A)x_0=p_0\cdot\lim_{k\to0}\Phi(p_k, q_k, t_kw_k)(t_kq_kK)+p_0\cdot\lim_{k\to0}C(p_k, t_kw_k)$$

が成り立たねばならないことはわかっている。よって，(19) は少なくともひとつ等号で成り立たねばならない。その等号が第 i 財について成立したとしよう。$(e^{(i)}, \theta e^{(j)}, 0)$ $(j=1, \cdots\cdots, n)$ と $(e^{(i)}, 0, \cdots\cdots, 0, \theta)$ は十分小さい θ に対して $P^n\times Q$ に入っているから，すべての $j=1, \cdots\cdots, n$

について

$$(e^{(i)},\ \theta e^{(j)},\ 0)\,z\,(p_0,\ q_0,\ w_0,\ x_0)\leqq 0$$
$$(e^{(i)},\ 0,\ \cdots\cdots,\ 0,\ \theta)\,z\,(p_0,\ q_0,\ w_0,\ x_0)\leqq 0$$

が成り立つ。このことから我々は，以下の不等式が成り立つことを知る。

(21) $$Bx_0\leqq K$$

$$Lx_0\leqq\lim_{k\to 0}l^s(p_k,\ t_kw_k)$$

(v) ここで $p_0=p^*$, $\lim_{k\to 0}t_kq_k=q^*$, $\lim_{k\to 0}t_kw_k=w^*$, $x_0=x^*$ とおく。いまこの（p^*, q^*, w^*, x^*）にたいして（12）の成立することを確かめた。(i)より（13）の成り立つことも明らかである。また作り方から，（14）（15）も当然成立する。これによって，（p^*, q^*, w^*, x^*）が求める解であることがわかった。（証明終わり）

3. 5　上の証明から，ただちに次の結論を得る。

定理 3　均衡における賃金率及び純国民生産物の価値は正である。

証明　$x^*\neq 0$ と（21）の第２番目の不等式から

$$0<Lx^*\leqq l^s(p^*,\ w^*)$$

が成立するが，A 4 より w^* が正であることが保証される。（証明終わり）

さて与えられた資本ストックの大きさが十分大きいと想定してみよう。直感に従えば，資本のレンタルはゼロとなると思われる。これは実際正しい推論である。

定理 4　もし K_i が十分大きければ，それに対応する資本レンタル q_i はゼロである。

証明　$l^{s*}=\mathrm{Max}\ l^s(p,\ w)$ と置く。ここで l^s の定義域は，$P^n\times Q$ である。$P^n\times Q$ はコンパクトであり，$l^s(p,\ w)$ は連続であるから，もちろん $l^s(p,\ w)$ は $P^n\times Q$ 上で最大値を持つのである。Lは正のベクトルであるから，

$$X_0=\{x\in R^m_+\,|\,Lx\leqq l^{s*}\}$$

は有界である。したがってベクトル K' が存在して，X_0 に属する x に対して

(22) $$Bx\leqq K' \text{ および } B_ix<K_i'$$

となる。均衡アクティビティー・ベクトルは（21）を満たすから，X_0 に属する。よって K_i を

K_i' 以上にとれば q_i^* はゼロとなる。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証明終わり）

貯蓄に関して我々が採用した仮定が妥当するかぎりにおいて，定理4は資本蓄積の必然的な帰結を表している。我々の仮定のもとでは，資本に対するレンタルが正であり，利潤所得があるかぎり，資本家は貯蓄して資本蓄積を行なう。資本ストックは増加し続けるであろう。しかしながらすべての資本ストックが十分大きくなった段階で，レンタルはゼロに消滅してしまう。労働供給の制約の方が，資本ストックの制約よりもきつくなってしまうからである。労働供給関数が変わらないかぎり，もはや資本家は利潤所得を得ることができず，国民純所得は賃金として労働者に分配されてしまうのである。この段階ですべての資本蓄積は止り，経済は定常状態に達する。これは，古典派の経済学者が想定した状態そのものである。

しかしながら，長期にわたっては労働供給関数はその形を変えるであろう。またそれと同時に，資本家は利潤の低下をくいとめるために，労働係数のより小さい，新しい技術を開発するよう努力するであろう。どちらにせよ，資本家が消滅する世界を考えることは困難である。

4　おわりに

我々は，資本家はもっぱら資本蓄積のみに関心を持ち，労働者はただ消費するという仮定のもとで，非集計化された資本主義市場経済における均衡点の存在証明を行なった。このモデルは，資本ストックと結合生産が陽表的に取り入れたという意味において，Kurz (1985) のモデルの拡張とみなすことができる。ここでは，労働供給関数が入っているからすべての変数は確定する。一方，Kurz モデルでは自由度が1となっており，この点も異なる。

すでにいくつかの論文で指摘されているとおり，多部門成長モデルでも，ゲール＝二階堂＝デブリューの補助定理は，極めて有用である。(Bidard & Franke (1987 a, b), Bidard & Hosoda (1987) を参照。) 通常の多部門成長モデルは，一般均衡モデルの特殊ケースと考えられるから，この補助定理を多部門モデルに応用することは極めて自然な試みといえるであろう。この論文の狙いのひとつも，まさにこの点にあったのである。

References

Berge, C. (1963) *Topological Spaces*, (translated by E. M. Patterson), Oliver & Boyd, Edinburgh and London.

Bidard, C. and R. Franke (1987a) "On the Existence of Long-Term Equilibria in the Two-Class Pasinetti-Morishima Model", *Ricerche Economiche*, Vol. XLI, No. 1, pp. 3–21.

Bidard, C. and R. Franke (1987b) "On Walras' Model of General Equilibrium: A Simpler Way to Demonstrate Existence", *Zeitschrift für Nationalökonomie*, Vol. 47, No. 3, pp. 315–319.

Bidard, C. and E. Hosoda (1987) "On Consumption Baskets in a Generalized von Neumann Model", *International Economic Review*, Vol. 28, No. 2, pp. 509–519.

Debreu, G. (1959) *Theory of Value*, Yale University Press, New Haven and London.

Dorfmann, R., R. Solow and P. Samuelson (1958) *Linear Programming and Economic Analysis*, The RAND Corporation.

Franke, R. (1983) "On a Possibility of Closing the Production Price System from the Side of Wages", *Metroeconomica*, Vol. XXXIV, pp. 147-178.

——— (1985) "On the Upper- and Lower- Bounds of Workers' Propensity to Save in a Two-Class Pasinetti Economy", *Australian Economic Papers*, Vol. 24, pp. 271-277.

Hosoda, E. (1989) "Competitve Equilibrium and the Wage-Profit Fronier", *The Manchester School*, Vol. LVII, No. 3, pp. 262-279.

Kurz, H. D. (1985) "Effective Demand in a 'Classical Model of Value and Distribution: Multiplier in a Sraffian Framework", *The Manchester School*, Vol. 53, No. 2, pp. 121-137.

Morishima, M. (1958) "Prices, Interest and Profits in a Dynamic Leontief System", *Econometrica*, Vol. 26, pp. 358-380.

——— (1959) "Some Properties of a Dynamic Leontief System with a Spectrum of Techniques", *Econometrica*, Vol. 27, pp. 626-637.

——— (1964) *Equilibrium, Stability and Growth*, Clarendon Press, Oxford.

——— (1969) *Theory of Economic Growth*, Clarendon Press, Oxford.

Morishima, M. and Y. Murata (1968) "An Input-Output System Involving Nontransferable Goods", *Econometrica*, Vol. 36, pp. 71-92.

Pasinetti, L. L. (1974) *Growth and Income Distribution*, Cambridge University Press, Cambridge.

Salvadori, N. (1980) "On a Generalized von Neuman Model", *Metroeconomica*, Vol. 32, pp. 51-62.

Solow, R. (1959) "Competitive Valuation in a Dynamic Input-Output System", *Econometrica*. Vol. 27, pp. 30-53.

(経済学部助教授)