Title	世代重複経済における競争均衡について
Sub Title	On competitive equilibrium in an overlapping-generations economy
Author	吉田, 真理子
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1991
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.84, No.特別号-I (1991. 9) ,p.67- 76
JaLC DOI	10.14991/001.19910901-0067
Abstract	
Notes	富田重夫教授退任記念論文集
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19910901-0067

「三田学会雑誌」84巻特別号－I（1991年9月）

世代重複経済における競争均衡について

吉　田　真理子

1. はじめに

世代重複モデル（overlapping-generations model）は，異時点間の効率的資源配分に果たす貨幣の役割を分析することを主要な目的として，1958年サミュエルソンによって創案された動学モデルである。サミュエルソンがこのモデルを通じて提起した主要な問題は，想定する経済において個人の主体的行動の合理性や，市場および情報の完全性，そして不確実性や外部性の欠如といった標準的仮定のすべてが満たされたとしても，なおその経済の競争均衡がパレート効率的配分を達成するとは限らないということ，しかしながらそれ自体は効用を持たないが，一般的受容性をもつ価値貯蔵手段としての貨幣が存在するならば，競争均衡がパレート効率的配分を達成し得るということである。

ここでの貨幣は，価値貯蔵手段としての役割のみを有する耐久財としての紙切れであり，各主体の効用関数の変数にはなり得ないものと想定されている。すなわちそれ自身効用をもたない貨幣が，つねに価値貯蔵手段として一般受容性を保証されるためには何等かの条件が必要であることは明白な事実である。例えば有限期間で終止ししかも不確実性のない経済では，そのような貨幣は価値貯蔵手段として需要されることはない。なぜなら最終期に効用のない貨幣を需要する主体は存在しない。したがって最終期の貨幣価値はゼロとなる。さらに最終期に価値をもたないことが確実な財を，その前期に価値貯蔵手段として需要する主体も存在しない。よってこの期にも貨幣価値はゼロとなる。この推論を現時点まで遡って繰り返すならば，有限期間の経済では価値貯蔵手段としての貨幣価値はすべての期においてゼロとなることが明らかとなる。

したがって不確実性の存在しない経済において，効用をもたない貨幣が各期で価値貯蔵手段としての機能を果たすためには，無限に新しい主体が誕生し価値貯蔵手段としての貨幣への需要が存在する可能性を残しておかなければならない。世代重複モデルではその構造上，無限期間貨幣が需要され得る可能性が保証されることから，貨幣理論の有用な分析装置と考えられている。

しかしながら，たとえ世代重複モデルを用いたとしても各期の老人が，次に生まれてくる若者は必ず貨幣を需要してくれるという予想をもちつづけなければ，ここでも貨幣価値はゼロになり得る。したがって世代重複経済においても，貨幣がつねに正の価値を有するためには，各消費者の予想に何等かの制約が必要となる。貨幣が各期正の均衡価格をもつ競争均衡を貨幣的競争均衡と呼ぶなら

ば，その存在条件として予想に関する条件が提示されるだろう。

本稿では，政府が発行する paper assets は二つの機能をもつと想定する。第一の機能は潜在的価値貯蔵手段である。第二の機能は消費者による政府への支払い手段であり，政府による価値の移転手段である。さらに，市場は完全であり移転には費用はかからないと想定する。政府債には種々の形態があるが，各々には本質的な経済学的相違は存在しないため，ここでは種々の政府債を総称して貨幣と呼ぶことにする。

本稿の目的は，以上で想定した貨幣を含む純粋交換世代重複経済において，貨幣的競争均衡が存在することを明らかにすることである。世代重複モデルでは，経済が無限に継続することから各期の主体と財の数は有限個であっても，当該の経済モデルが扱う主体と財の総数は，可付番無限個になる。世代重複モデルにおける競争均衡の存在が，有限経済における一般均衡の存在証明の手続きを直接適応することによって，必ずしも容易に証明され得ない根拠はこの点にあり，したがって世代重複経済における均衡の存在証明は，従来の一般均衡モデルの主体と財の数を無限へ拡張したケースにおける存在証明としても解釈できる。

2. モデルの基本的構造

世代重複モデルの基本的構造を解説すると，まず当該の経済に存在する経済主体は，「若い世代」と「老いた世代」の2期間を生きると想定される。任意の期はその期首に生まれた若い世代とその前期に生まれた老いた世代の2世代から構成され，交換は世代が重複するこれらの個人の間で行われることになる。主体は毎期誕生するため，この世代重複は有限期間で終始することなく，無限に繰り返されることになる。

主体には生涯の各期首に財が与えられ，それらの初期保有量と市場価格に依存して，各主体はみずからの予算制約式を求める。そしてそれらの制約の下で，各消費者は，財の消費から得られる効用を最大にするよう生涯の消費計画を立案すると想定される。

本稿では，各世代には消費者が l 人ずつ誕生し，各期の消費者は生まれた期 $t=1, 2, \cdots\cdots$ と $j \in l$ によって表されることにする。各期 $t=1, 2, \cdots\cdots$ には n 個の消費財と唯一耐久財である貨幣が存在する。各消費者の消費可能集合は，$t=0$ の消費者 j については $X_{0,j}=R^n_+$ で，t 期（$t \geqq 1$）の消費者 j については $X_{t,j}=R^{2n}_+$ で与えられる。$x^s_{i,j,t}$ は消費者 t によって s 期（$s=1, 2, \cdots\cdots$）に消費された財 i（$i=1, 2, \cdots\cdots n$）の消費量とする。消費者（t, j）は彼の生存期間である t 期と $t+1$ 期の2期間において，財 $x_{t,j}=(x^t_{t,j}, x^{t+1}_{t,j})$ を消費することから効用を得るとする。彼の効用関数は以下の仮定を満たすとする。

仮定 2.1

(1) $u_{t,j}$ はすべての t について，連続，R^{2n}_+（$t=0$ については R^n_+）において擬凹，かつ R^{2n}_{++}（$t=$

0についてはR^n_{++}）において連続微分可能である。

(2)　任意の i および t について，$\partial u_{t,j}(x_{t,j})/\partial x^t_{t,j,i}>0$，かつ $\partial u_{t,j}(x_{t,j})/\partial x^{t+1}_{t,j,i}>0$，ここで $t=1, 2, \cdots\cdots$ については $x_{t,j}\in R^{2n}_{++}$，$t=0$ については $x_{0,j}\in R^n_{++}$ である。

(3)　任意の i および t について，$\lim_{x\to 0}\partial u_{t,j}(x_{t,j})/\partial x^{t+1}_{t,j,i}=+\infty$，ここで $x^t_{t,j}\in R^n_{++}$.

仮定 2.2

すべての (t, j) について，$u_{t,j}\in\{u_h|h=1, 2, \cdots\cdots H\}$.

仮定2.2は，各消費者の効用関数はH種の効用関数のいずれかであることを意味する。

つぎに，各消費者に与えられる消費財の初期保有量について解説する。消費者 (t, j) は若い期に $w^t_{t,j}\in R^n_+$ の消費財の初期保有量を与えられる。以下を仮定する。

仮定 2.3

(1)　$w^t_{t,j}\geqq w\gg 0$,

(2)　$\{w^t_{t,j}\}$ は有界である。

仮定2.3(1)および(2)は，各 t 期における若い主体の財の初期保有量はゼロより上方において一様に下から有界であり，かつ上からも一様に有界であることを意味している。

貨幣的側面について解説する。政府は消費者が各期首に初期保有量として保有する財を再配分することはできないが，名目貨幣を創造し各期首において消費者に分配することが許されているとする。さらに政府は各消費者に名目貨幣税を課すことも許されているとする。想定する経済では移転すなわちマイナスの税とプラスの税は，ともに各消費者の生涯の各期に一括税の形式によって実施されるとする。消費者は自らに課される税については，前もって正確に知っているとする。以上の政府の政策によって，消費者は各期首に初期保有量として貨幣が与えられると考えることができる。財の初期保有量との相違点は，消費者が保有する貨幣量は必ずしも正とは限らず，ゼロの場合もまたは負の場合もあり得るということである。以後，貨幣の初期保有量を貨幣移転と呼ぶことにするなら，$t=0$ の消費者 j の $t=1$ 期の貨幣移転は

$$m^1_{0,j}\in R \qquad t=0$$

で表され，$t\geqq 1$ の消費者 j の2期間における貨幣移転は

$$(m^t_{t,j},\ m^{t+1}_{t,j})\in R^2 \qquad t=1, 2, \cdots\cdots$$

で表されることになる。したがって，$\Sigma_k\Sigma_j m^s_{k,j}$ を s 期に政府が創造する総貨幣量とするなら，t 期（$t=1, 2, \cdots\cdots$）に存在する総貨幣供給量は，$m^t=\Sigma^t_{s=1}\Sigma_k\Sigma_j m^s_{k,j}$ で表されることになる。各期の総貨幣供給量について以下を仮定する。

仮定 2.4

(1) $m^1_{0,j} \in R_{++}$,

(2) $m^t = \Sigma^t_{s=1}\, \Sigma_k\, \Sigma_j\, m^s_{k,j} \in R_{++}$,

(3) $\{m_t\}$ は有界である。

仮定2.4(2)および(3)は，t 期における総貨幣供給量は正であり，かつ上から有界であることを意味している。政府による貨幣移転の流列を

$$m = (m^1_{0,1},\ m^1_{0,2},\ \cdots\cdots,\ m^1_{0,l},\ m^1_{1,1},\ \cdots\cdots,\ m^t_{t,1},\ m^t_{t,2},\ \cdots\cdots)$$
$$\in R_{++} \times R \times \cdots\cdots = M$$

で表し，貨幣移転の流列 $m \in M$ を，政府による貨幣政策と呼ぶことにする。

各消費者は生涯の消費財の消費計画を作成するのと同様に，生涯の貨幣保有量についても選択を行う必要がある。$x^{s,m}_{t,j}$ を消費者 t による s 期の貨幣需要量を表すとする。この経済では，政府だけが償還されない外部貨幣を創造することが許されているとする。消費者への制約としては，彼が死ぬときに貨幣保有量が負であってはならないということが取り決められている。すなわち，経済から去るときに，消費者は借金を残してはならないということである。正確に書き表すならば，

$$x^{1,m}_{0,j} \geqq 0$$

であり

$$x^{t,m}_{t,j} + x^{t+1,m}_{t,m} \geqq 0 \qquad t = 1,\ 2,\ \cdots\cdots$$

なる制約が課せられていることになる。さらに消費者は無限に借入れることは許されていないとする。正確に書き表すならば，任意の $(t,\ j)$ について

$$x^{t,m}_{t,j} \geqq x^m$$

なる $x^m < 0$ が存在するとする。

各期には現物市場のみが開かれ，$p^{t,i} \in R_{++}$ および 1 を各々 t 期における第 i 消費財および貨幣の現物価格とする。$q^t = (p^{t,1},\ \cdots\cdots,\ p^{t,n},\ 1) \in R^n_{++} \times \{1\} = Q$ かつ $q = (q^1,\ q^2,\ \cdots\cdots) \in Q \times Q \times \cdots\cdots = S$ とする。各消費者の予算制約式は，以下のように書き表される。

(C-1) $p^1 x^1_{0,j} + x^{1,m}_{0,j} = p^1 w^1_{0,j} + m^1_{0,i}$,

(C-2)
$$p^t x^t_{t,j} + x^{t,m}_{t,j} = p^t w^t_{t,j} + m^t_{t,j}.$$
$$p^{t+1} x^{t+1}_{t,j} + x^{t+1,m}_{t,j} = m^{t+1}_{t,j} + x^{t,m}_{t,j}.$$

(C-1) は消費者 $(0,\ j)$ の 1 期における予算制約式であり，(C-2) は消費者 $(t,\ j)$ $(t \geqq 1)$ の t 期と $t+1$ 期の予算制約式である。

最大化問題

(1) $t=0$ については，(C-1) および $x^{1,m}_{0,j} \geqq 0$, $x^1_{0,j} \geqq 0$ の制約下で $u_{0,j}(x_{0,j})$ を最大化する。

(2) $t \geqq 1$ については（C-2）および $x_{t,j}^{t,m}+x_{t,j}^{t+1,m} \geqq 0$, $(x_{t,j}^{t},\ x_{t,j}^{t+1}) \geqq 0$ なる制約下で $u_{t,j}(x_{t,j}^{t},\ x_{t,j}^{t+1})$ を最大化する。

各消費者の需要計画は，以上の最大化問題の解となる。消費者の需要関数 $f_{t,j}(t=0,\ 1,\ \cdots\cdots)$ は以下で定義される；

$$f_{0,j}: Q \to R_{+}^{n} \times R,$$

かつ

$$f_{t,j}: Q^{2} \to R_{++}^{2n} \times R^{2} \qquad t=1,\ 2,\ \cdots\cdots.$$

$f_{0,j}$ または $f_{t,j}$ の地域は，各消費者の需要量，$(x_{0,j},\ x_{0,j}^{1,m}) \in R_{+}^{n} \times R$, または $(x_{t,j},\ x_{t,j}^{t,m},\ x_{t,j}^{t+1,m}) \in R_{+}^{2n} \times R^{2}$ を意味するから，$R_{+}^{n} \times R$ または $R_{+}^{2n} \times R^{2}$ となることは明らかである。

3. 貨幣的競争均衡

定義 3.1

超過需要対応$Z: S \to R$を以下のように定義する。

$$Z(q)=\{z=(z_t)_{t=1}^{\infty} \mid \text{任意の } t \geqq 1 \text{ について，} z_t=(\Sigma_j x_{t-1,j}^{t},\ \Sigma_j x_{t-1,j}^{t,m}) + (\Sigma_j x_{t,j}^{t},\ \Sigma_j x_{t,j}^{t,m}) - (\Sigma_j w_{t,j}^{t},\ m_t),$$
$$\text{ただし } (x_{t,j}^{t},\ x_{t,j}^{t+1},\ x_{t,j}^{t,m},\ x_{t,j}^{t+1,m}) \in f_{t,j}(q^{t},\ q^{t+1})\}.$$

補助定理 3.2

仮定2.1および2.2の下では，積位相をもつ集合Sの上で$Z(\cdot)$は非空，コンパクト値かつ優半連続である。

証明

$Z(\cdot)$は明らかに非空である。コンパクト値については，チコノフの定理より明らかである。また，$t \to +\infty$ のとき $q^{j} \to q^{*} \in S$ となる点列 $\{q^{j}\} \subset S$ を考える。$f_{t,j}(\cdot)$は優半連続であるから，$(q_t^{j},\ q_{t+1}^{j}) \to (q_t^{*},\ q_{t+1}^{*})$ のとき，次の点列を選ぶことができる；すなわち，すべてのtについて，$j \to +\infty$ につれて $\{x_t^{j},\ m_t^{j}\} \to \{x_t^{*},\ m_t^{*}\} \in G(q_t^{*},\ q_{t+1}^{*})$。よって，$z^{*}=(z_t^{*})_1^{\infty} \in Z(q^{*})$ に収束する流列 $\{z^{j}\}$ が存在する。したがって$Z(*)$は優半連続となる。 証了

ここで，貨幣的競争均衡を定義する。

定義 3.3

貨幣的競争均衡は $0 \in Z(q)$ を満たす流列 $q=(q^{1},\ q^{2},\ \cdots\cdots) \in S$ である。

財の均衡価格が厳密に正の値となることを保証するために，以下の二つの境界条件を証明する。貨幣価格を1と基準化していることから，財の均衡価格が厳密に正の値となることを保証することは，同時に貨幣の均衡価格が正の値に決定されることを保証するものである。

命題 3.4

仮定2.1，2.3および2.4が満たされているとする。任意の流列 $\{q^k\}\subset S$ およびすべての k について $z^k\in Z(q^k)$ となる任意の流列 $\{z^k\}$ を考える。任意の $(T,\ j)$ について，$k\to+\infty$ のとき $q^{T,k}\to q^T\in\partial Q$ ならば，$k\to+\infty$ のとき $\|z^k_{T,j}\|\to+\infty$ となる。ただし ∂Q は集合 Q の境界を意味する。

証明

$q^1\in\partial Q$ を仮定する。任意の j について仮定2.4より $m^1_{0,j}>0$ であるから，（C-1）かつ仮定2.1(2)より，もし $q^1\in\partial Q$ ならば，$k\to+\infty$ のとき $\|x^1_{0,j}\|\to+\infty$ となる。次に $q^1\gg 0$ および $q^2\in\partial Q$ を仮定する。仮定2.3(1)より $p^1 w^1_{1,j}>0$ となるから，（C-2）および仮定2.1(2)より，もし $q^2\in\partial Q$ ならば，$k\to+\infty$ のとき $\|x^{2;k}_{1;j}\|\to+\infty$ となる。$T=3,\ 4,\cdots\cdots$ について，同様の分析を行うならば，任意の T について $q^{T,k}\to q^T\in\partial Q$ ならば，$\|z^k_{T,j}\|\to+\infty$ を示すことが出来る。　証了

命題 3.5

仮定2.1，2.3および2.4が満たされているとする。任意の価格流列 $\{q^k\}\in S$ およびすべての k について $z^k\in Z(q^k)$ となる任意の流列 $\{z^k\}$ を考える。もし任意の T について，$k\to+\infty$ のとき $q^{T,k}\to+\infty$ ならば，$k\to+\infty$ のとき $\Sigma_j x^{T,m,k}_{T,j}\to+\infty$ となる。

証明

可能な二つの場合を考える：(1) $q^{T,k}\to+\infty$ かつ $q^{T+1,k}\to+\infty$。(2) $q^{T,k}\to+\infty$ かつ $\{q^{T+1,k}\}$ が有界。(2) の場合に $\Sigma_j x^{T,m,k}_{T,j}\to+\infty$ となることはグラモンにより既に証明されている（グラモン〔1974〕)。よって，(1)の場合に $\Sigma_j x^{T,m,k}_{T,j}=x^{T,m,k}_{T}\to+\infty$ となることを示す。背理法を用いる。すなわち $q^{T,k}\to+\infty$ のとき，$x^{T,m,k}_{T}\to x^{T,m}_{T}<+\infty$ を仮定する。

$x^{T,m}_{T}<+\infty$ であり，かつ仮定2.4より $m^{T+1}_{T,j}<+\infty$ であるから，（C-2）より $k\to+\infty$ のとき $p^{T+1,i,k}\to+\infty$ となる $i\in n$ については，任意の j について $x^{T+1;k}_{T+1;i}\to 0$ となる。一方（C-2）から以下の式を得る。

$$p^{T,k}(w^T_{T,j}-x^{T;k}_{T;j})=x^{T;m,k}_{T;j}-m^T_{T,j}.$$

したがって，仮定2.3(1)から，もし $p^{T,i,k}\to+\infty$ となるすべての i について $x^{T;k}_{T;i,j}\to 0$ ならば，

$$p^{T,k}(w^T_{T,j}-x^{T;k}_{T;j})\to+\infty$$

となる。この結果は $\Sigma_j x^{T;m}_{T;j}<+\infty$ に矛盾する。したがって，$k\to+\infty$ のとき $x^{T;h}_{T;k}\to x^T_{T,h}>\varepsilon$ かつ $p^{T,h,k}\to+\infty$ となる少なくとも一つの $h\in\{1,\ \cdots\cdots,\ n\}$ および $\varepsilon>0$ が存在する。仮定2.1(2)から，$x^{T+1;k}_{T,j;i}$ の僅かな増加と $x^{T;k}_{T;j,h}$ における僅かの減少は，$u_{T,j}(x^k_{T,j})$ を増加させる。この事

実は，$(x^k_{T,j},\ x^{T,m,k}_{T,j})$ が $f_{t,j}(q^{T,k},\ q^{T+1,k})$ に属することに矛盾する。したがって $k\to+\infty$ のとき，$\Sigma_j x^{T,m,k}_{T,j}\to+\infty$ となる。　証了

4.　貨幣的競争均衡の存在証明

本稿で想定した貨幣を含む世代重複経済における，貨幣的競争均衡の存在定理を以下で証明する。

定理 4.1

仮定2.1，2.2，2.3および2.4が満たされているとする。このとき世代重複経済には少なくとも一つの貨幣的競争均衡が存在する。

証明

S^k を集合 S の非空，コンパクト，凸かつ $S\subset\cup^{\infty}_{k=1}S^k$ なる部分集合の非減少流列とする。ここで，$S^k=Q^k\times Q^k\times\cdots\cdots$である。$Z(S^k)$ のコンパクトな凸包を $X^k\subset R^{n+1}\times R^{n+1}\times\cdots\cdots$で表す。ここで対応 $M:X^k\to S^k$ を以下のように定義する；

(4.1)　$M(z^k)=\{(q^{t,k})_{t=1}\mid$任意の t について，$q^{t,k}z^k_t=\max\ q^{t,k}z^k_t\}$.

ベルジュの最大値定理およびチコノフの定理を用いて，$M(\cdot)$ は，積位相を与えられた集合 X^k 上でコンパクト値対応であることが示される。さらに $M(\cdot)$ が凸値であることは容易に示される。さらに $M(\cdot)$ は X^k の上で優半連続である。(1)

一方，$U=\{u_h\mid h=1,\cdots\cdots,H\}$ および $W=\{w_t\mid t=1,2,\cdots\cdots\}$ とする。仮定2.2および2.3(2)より，任意の k およびすべての t について，以下の関係；

$$G_t(Q^k\times Q^k;\ U,\ W,\ m)\subset Y^k$$

を満たす凸コンパクトな集合 $Y^k\subset R^{n+1}$ が存在する。ここで無限空間におけるノルムを以下のように定義する。

(4.2)　$$\|q^k,\ z^k\|=\Sigma^{\infty}_{t=1}(1/2^t)\|q^{t,k},\ z^k_t\|.$$

ここで対応 $F:S^k\times X^k\to S^k\times X^k$ を以下のように定義する。

(4.3)　$$F(q^k,\ z^k)=M(z^k)\times Z(q^k).$$

積集合 $S^k\times X^k$ が $\|\cdot\|$ が定義されたバナッハ空間であることを示すことができる（命題5.1参照）。さらに，$S^k\times X^k\|\cdot\|$ によって定義されるノルム位相において凸コンパクトであることが明らかとなる（命題5.2参照）。よって，$F(\cdot)$ は $S^k\times X^k$ 上で凸コンパクト値かつ優半連続対応となる。

以上より，集合 $S^k\times X^k$ および対応 $F(\cdot)$ は一般化された角谷の不動点定理のすべての条件を満たすことになる。したがって以下の関係；

注（1）　$M_t(z^t_t)=\{q^t_t\mid$任意の t について，$q^t_t z^t_t=\max\ q^t_t z^t_t,\ q\in Q\}$. $M_t(\cdot)$ は優半連続であるから，補助定理3.2と同様に $M(\cdot)$ の優半連続性が証明される。

(4.4)　　$z^k \in Z(q^k)$ かつ $q^k \in M(z^k)$

を満たす不動点 $(q^k, z^k) \in S^k \times X^k$ が存在する。

$M(\cdot)$ の定義およびワルラス法則を用いることによって，すべての $q^{t,k} \in Q^t$ および任意の t かつ k について以下の不等式を得る。

(4.5)　　$q^{t,k} z_t^k \leqq 0.$

一方，もしある $i \in \{1, \cdots\cdots, n+1\}$ について，$k \to +\infty$ のとき $z_{t,i}^k \to +\infty$ となるならば，(4.5) 式から $k \to +\infty$ のとき $z_{t,h}^k \to -\infty$ となる $h \in \{1, \cdots\cdots, n+1\}$ が存在することになる。しかしながら，仮定2.3(1)から，$\{z_t^k\}$ は $k \to +\infty$ のとき，すべての t について下から有界であるから，命題3.5から $\{q^{t,j}\}$ は任意の t について有界となる。したがって $q^{t*} \in Q$ および $z_t^* \in R^{n+1}$ に各々収束する部分列 $\{q^{t,k}\}$ および $\{z_t^k\}$ を選ぶことができる。仮定2.1(2)および $Z(\cdot)$ が優半連続であることから，$z^* \in Z(q^*)$ となり，かつすべての t について $q^{t*} z_t^* = 0$ となる。命題3.4から $q^* \gg 0$ であるから，$q^{t*} z_t^* = 0$ ならば $z_t \gg 0$ および $z_t^* \ll 0$ がともに成立不可能である。もし $z^* \neq 0$ かつ $q^{t*} z^* = 0$ ならば，$q^t z^* > 0$ なる $q \in Q$ が存在し得る。したがって十分大きな j について，$q^t z^j > 0$ である。しかしながら，これは (4.5) 式に矛盾する。よって

$$0 = z^* \in Z(q^j)$$

が成立する。　　証了

5. 数学付録

命題 5.1

任意の t について，$X_t \subset R^N$ は凸コンパクト集合とする。すべての t について $X_t \subset X$ なる集合 $X \subset R^N$ が存在すると仮定する。任意の $x = (x_t)$, $y = (y_t) \in \Pi_{t=1}^{\infty} X_t$ について，距離対応を以下のように定義する；

$$\rho(x, y) = \Sigma_{t=1}^{\infty} (1/2^t) \|x_t - y_t\|.$$

このとき，距離空間 $(\Pi_{t=1}^{\infty} X_t, \rho)$ は完備である。

証明

$\{x^j\} \subset \Pi_{t=1}^{\infty} X_t$ はコーシー列とする。$\varepsilon > 0$ を仮定するなら，n, $m \geqq n_0$ について，

$$\rho(x^n, y^m) = \Sigma_{t=1}^{\infty} (1/2^t) \|x_t^n - y_t^m\| < \varepsilon/2$$

となる n_0 が存在する。$(X_t^j, \|\cdot\|)$ は完備であり，かつ $\{x_t^j\} \subset X_t$ はすべての t についてコーシー列であるから，$j \to +\infty$ のとき $\{x_t^j\} \subset X_t$ はある $a_t \in X_t$ に収束する。$a = (a_1, a_2, \cdots\cdots) \in \Pi_{t=1}^{\infty} X_t$ とするならば，$m \to +\infty$ のとき任意の $n \geqq n_0$ および任意の t について，以下の関係が成り立つ。

$$\Sigma_{t=1}^{\infty} (1/2^t) \|x_t^n - a_t\| < \varepsilon/2.$$

よって，$n \geqq n_0$ について，

$$\rho(x^n,\ y)\leqq\varepsilon/2<\varepsilon$$

となる。したがって $j\to+\infty$ のとき $x^j\to a\in\Pi_{t=1}^{\infty}X_t$ となり，空間（$\Pi_{t=1}^{\infty}X_t,\ \rho$）は完備となる。

証了

命題 5.2

任意の t について，$X_t\subset R^N$ は凸コンパクト集合とする。すべての t について $X_t\subset X$ なる集合 $X\subset R^N$ が存在すると仮定する。このとき $\Pi_{t=1}^{\infty}X_t$ の積位相は，任意の $x=(x_t)$，$y=(y_t)\in\Pi_{t=1}^{\infty}X_t$ について，以下の距離関数によって定義される位相と同値である。

$$\rho(x,\ y)=\|x-y\|_{\infty}=\Sigma_{t=1}^{\infty}(1/2^t)\|_t^n-y_t^m\|.$$

証明

$A\subset X$ は積位相における開集合とする。$\varepsilon_t>0$ について，

$$U(x_t;\ \varepsilon_t)=\{x_t'\in X_t\,|\,\|x_t'-x_t\|<\varepsilon_t\}\ \text{かつ}\ (U_1(x_1;\ \varepsilon_1),\ \cdots\cdots,$$

$$U_n(x_n;\varepsilon_n)=\cup_{i=1}^{n}\{\pi_i^{-1}(U_i(x_i;\ \varepsilon_i))\,|\,i=1,\ \cdots\cdots,\ n\},$$

ここで，$\pi_t:\Pi_{t=1}^{\infty}X_t\to X_t$ とする。任意の $x=(x_t)\in A$ について，以下を満たす有界な部分集合 $\{t_1,\ \cdots\cdots,\ t_k\}$ かつ $\varepsilon_{ti}>0$（$i=1,\ \cdots\cdots,\ k$）が存在する；

$$(U_{t1}(x_{t1};\ \varepsilon_{t1}),\ \cdots\cdots,\ U_{tk}(x_t;\ \varepsilon_{tk}))\subset A.$$

一般性を失うことなく，以下を仮定することができる。

$$t_k\geqq t_{k-1}\geqq\cdots\cdots\geqq t_1$$

$\varepsilon_0=\min\{\varepsilon_{t1},\ \cdots\cdots,\ \varepsilon_{tk}\}$ とする。このとき以下の関係が成り立つ。

$$U_*(x;\ \varepsilon_0/2^{tk})\subset(U_{t1}(x_{t1};\ \varepsilon_{t1}),\ \cdots\cdots,\ U_{tk}(x_{tk};\ \varepsilon_{tk}))\subset A,$$

ここで，$U_*(X;\ \varepsilon)=\{x'\in\Pi_{t=1}^{\infty}X\,|\,\rho(x,\ x')<\varepsilon\}$．したがって，$A$ もまた（$X,\ \rho$）において，開集合となる。

逆に，A は（$X,\ \rho$）において開集合とする。任意の t について，$X_t\subset X$ であるから，すべての t について，以下を満たす $k>0$ が存在する。

$$\sup_t\{\|x_t-y_t\|\,|\,x_t,\ y_t\in X_t\}\leqq k.$$

$0<\varepsilon<k$ を満たす任意の ε について，以下の m を選ぶことができる；

$$\Sigma_{t=1+m}^{\infty}(1/2^t)\leqq\varepsilon/2k.$$

k の定義から，ある $x\in A$ および任意の $y=(y_t)\in(U_1(x_1;\varepsilon/2),\ \cdots\cdots,\ U_m(x_m;\ \varepsilon/2))\subset$について，

$$\Sigma_{t=m+1}^{\infty}(1/2)\|x_t-y_t\|\leqq\varepsilon/2k$$

が導かれる。したがって，

$$\|x-y\|=\Sigma_{t=1}^{m}(1/2)\|x_t-y_t\|+\Sigma_{t=m+1}^{\infty}(1/2)\|x_t-y_t\|<(\varepsilon/2)+(\varepsilon/2)=\varepsilon.$$

よって，

$x\in(U_1(x_1;\ \varepsilon/2),\ \cdots\cdots,\ U_m(x_m;\ \varepsilon/2))\subset U(x;\ \varepsilon)\subset A$ となる近傍 $U(x;\ \varepsilon)$（$i=1,\ \cdots\cdots,\ m$）

が存在する。したがって，Aもまた積位相において開集合となる。 証了

参 考 文 献

Balasko, Y., and K. Shell, The Overlapping-Generations Model, 1: The Case of Pure Exchange without Money, *Journal of Economic Theory*, 23 (1980).

———, The overlapping-Generations Model 2: The Case of Pure Exchange with Money, *Journal of Economic Theory*, 24 (1981).

Cass, D., M. Okuno, and I. Zilcha, The Role of Money in Supporting the Pareto Optimality of Competitive Equilibrium in Consumption-Loan Type Models, *Journal of Economic Theory*, 20 (1979)

福岡正夫，須田伸一，「貨幣経済と重複世代モデル」，『三田学会雑誌』80巻1号 (1987)。

———，「貨幣的重複世代モデルにおける競争均衡の存在について」，『三田学会雑誌』80巻2号 (1987)。

Grandmont, J. M., On the Temporary Competitive Equilibrium, Unpublished Ph. D. Dissertation, CRMS Working Paper, University of California, Berkeley, (1970).

———, On the Short Run Equilibrium in a Monetary Economy, in *Allocation Under Uncertainty, Equilibrium, and Optimality*, ed. by J. Dreze, London: Macmillan, (1674).

Samuelson, P. A., An Exact Consumption Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money, *Journey of Political Economy* 66 (1958), 467-482.

Yoshida, M., Existence of a Competitive Equilibrium with Money, *The Economic Studies Quanterly* (1990).

(大阪府立大学総合科学部講師)