

Title	Hilbert空間上のFilippov型発展方程式
Sub Title	Filippov's evolution equations in Hilbert spaces
Author	丸山, 徹
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1991
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.84, No.特別号-I (1991. 9) ,p.47- 66
JaLC DOI	10.14991/001.19910901-0047
Abstract	
Notes	富田重夫教授退任記念論文集
Genre	Journal Article
URL	<a href="https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19910901-0047">https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19910901-0047</a>

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

# Hilbert 空間上の Filippov型発展方程式

丸 山 徹\*

## 序

$\mathfrak{H}$  を実 Hilbert 空間とし、多価作用素  $A : \mathfrak{H} \longrightarrow \mathfrak{H}$  が極大単調<sup>(1)</sup> (maximal monotone) であるとき、微分方程式 (あるいは differential inclusion といった方がよいかもしいない)

$$\frac{dx}{dt} + Ax \ni 0, \quad x(0) = x_0$$

のもつ重要な意義は、高村幸男の研究を嚆矢として、さまざまな角度から吟味されてきた<sup>(2)</sup>。この理論を一般の Banach 空間上に拡張する試みについても、加藤敏夫をはじめとする我国の数学者たちの多大な貢献が顕著であり、既に豊かな成果が収穫されている。

しかし問題によっては、必ずしも極大単調性を満たさぬ多価作用素によって定義された微分方程式を取り扱わねばならない場面も、実は少なからず存在するのであって、これに対してはまた別種の理論が用意されねばならない。

いま  $[0, T]$  を数直線上の区間、 $\mathfrak{H}$  は実 Hilbert 空間とし、多価作用素  $\Gamma : [0, T] \times \mathfrak{H} \longrightarrow \mathfrak{H}$  が与えられているものとしよう。このとき微分方程式

$$\frac{dx}{dt} \in \Gamma(t, x), \quad x(0) = x_0 \tag{*}$$

を考えるのであるが、 $\Gamma$  の ( $x$ に関する) 単調性は仮定せず、 $t$  についての可測性と、 $x$  についてのある種のゆるい連続性に基ついて、微分方程式 (\*) の解の存在や、その特性を調べる問題が、とく

\*) 慶應義塾の学生として経済原論や経済哲学の講義を拜聴してより今日まで、富田重夫教授には公私にわたってのご指導をいただき、また千種義人博士門下の兄弟弟子として親しくご交誼を賜った。教授のご退任にあたり、これを深く感謝し、教授のますますのご壮健とご健筆とを祈る。

注 (1)  $\text{Dom } A = \{x \in \mathfrak{H} \mid Ax \neq \emptyset\}$  とおく。すべての  $x_1, x_2 \in \text{Dom } A$  と、任意の  $y_1 \in Ax_1, y_2 \in Ax_2$  について

$$\langle y_1 - y_2, x_1 - x_2 \rangle \geq 0$$

が成り立つとき、 $A$  は単調であるという。 $A$  が単調で、しかも

$$G(A) \subsetneq G(B) \quad (G(\cdot) \text{ は作用素 } \cdot \text{ のグラフ})$$

なる単調作用素  $B$  が存在しないとき、 $A$  は極大単調であるという。

(2) 優れた総合的研究として Brezis [9] を見よ。また一般の Banach 空間への拡張については Kato [26] [27]、宮寺 [38] を参照。

に最適制御理論との関連において、学者の関心を呼び起こしたのであった。この理論に関する先駆的な業績は既に1960年代に発表されているが、長い間、研究者の数もきわめて限られた特殊なテーマであったといわざるをえない。それが急速に大きな分野に成長し、Aubin and Cellina [4] や Filippov [21] のようなモノグラフが公刊されるまでに至った。この型の微分方程式を、その開拓者に敬意を表して **Filippov 型の発展方程式** (evolution equation of Filippov type) と称する。

筆者も既に  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^l$  なる特別の場合については、Filippov 型発展方程式の解の存在定理や、それを制約に含む変分問題をめぐって若干の結果を得た。(Maruyama [30] [31] [33])。しかし、これらの結果を無限次元空間を舞台として拡張するためには、理論的にひとつの困難が伴うのであった。それは  $\mathcal{X} (\dim \mathcal{X} = \infty)$  に値をとる函数が作る Sobolev 空間の弱位相構造の問題であり、筆者は Maruyama [36] において漸くこの難所を乗り越えることができた。これについては本誌上でも既に体系的な解説を公にした(丸山 [37])から、ここではその結果を自由に利用することとしたい。

第1節においては、Filippov 型の発展方程式が登場する、いくつかの典型的事例を紹介する。つづいて第2節では基本的な仮定を明示し、第3節で準備的な諸命題を導く。そして第4節において、主要定理の叙述と精密な証明とを与える。そして最後の節では、Filippov 型の発展方程式を制約に含む変分問題の解の存在について研究しよう。この目的のために、非線形積分汎函数の連続性にかかわる新しい結果を利用する。ただし、この結果の証明は著しく長くかつ困難であるため、ここでは結果だけの紹介にとどめざるをえない。詳細については原論文 Maruyama [34] を参照していただくことにしたい。

## 1. Filippov 型発展方程式の事例

本稿で対象とする型の発展方程式が自然に登場するいくつかの事例を研究しよう。

**例 1 (最適制御)** 集合  $U \subset \mathbb{R}^l$ , 点  $x_0 \in \mathbb{R}^l$  および函数  $f: [0, 1] \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$  が与えられたものとする。このとき

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \\ x(0) &= x_0, \quad u(t) \in U \end{aligned} \tag{1}$$

を満たす微分可能な函数  $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^l$  と可測函数  $u: [0, T] \rightarrow U$  の組み合わせを求める問題は、最適制御理論において頻繁に現われる。いま多価作用素  $\Gamma: [0, 1] \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$  を

$$\Gamma(t, x) = \{f(t, x, u) \mid u \in U\}$$

とおき、微分方程式

$$\dot{x}(t) \in \Gamma(t, x(t)), \quad x(0) = x_0 \tag{2}$$

を考える。(2) に解が存在するとすれば、Filippov の可測陰函数定理 (c.f. 丸山 [32] 第7章 §4) により、(1) を満たす可測函数  $u: [0, 1] \rightarrow U$  を見出すことができる。この  $x$  と  $u$  の組み合わせが (1) の解である。

例 2 (陰伏的に定義された微分方程式) 函数  $f: [0, 1] \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$  を所与の函数とし、  
微分方程式

$$f(t, x(t), \dot{x}(t))=0, \quad x(0)=x_0 \quad (3)$$

を考える。多価作用素  $\Gamma: [0, 1] \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$  を

$$\Gamma(t, x) = \{y \in \mathbb{R}^l \mid f(t, x, y) = 0\}$$

と定義すれば、微分方程式 (3) は、結局

$$\dot{x}(t) \in \Gamma(t, x(t)), \quad x(0) = x_0$$

を解くことに帰着する。

例 3 (不連続函数によって定義される微分方程式) 函数  $f: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^l$  によって定義される微分方程式

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (4)$$

を考える。 $f$  が連続ならば、Cauchy=Peano の存在定理<sup>(3)</sup>により、微分方程式 (4) は必ずある範囲で解を有する。しかし (4) の右辺が不連続点をもつ場合には、もちろん解の存在は必ずしも保証されない。経済学の問題の中にも、この種の困難を我々に投げかけるものがある。たとえば価格の非負性を考慮した一般均衡の安定条件論<sup>(4)</sup>や、あるいはやはり変数の非負性を考慮した動学的経済計画問題<sup>(5)</sup>などに現われる微分方程式は、まさにこのような困難をうちにはらむ形式を備えている。

この障害を乗り越えるためのひとつの方法は、 $f$  の連続点では値が  $f$  と一致するような、性質のよい多価作用素  $\Gamma$  によって  $f$  の“正則化” (regularization) を図ることである。ある条件の下に、 $f$  と  $\Gamma$  とが殆どすべての点で一致するならば、我々は (4) の代用物として

注 (3) 常微分方程式の標準的教科書、たとえば P. Hartman, *Ordinary Differential Equations*, 2nd ed., (Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart) 1982, pp.10-12 あるいはより最近のもので H. Amann, *Ordinary Differential Equations*, (Walters de Gruyter, Berlin, New York) 1990, pp.96-99 などを参照。いずれも非常に優れた書物である。

(4) たとえば二階堂 [39], Nikaido and Uzawa [40] などを見よ。

いま  $p \in \mathbb{R}_+^l$  を価格ベクトルとし、 $\zeta(p) \in \mathbb{R}^l$  を価格  $p$  に応ずる超過需要ベクトルとする。ここで  $\mathbb{R}_+^l$  は  $\mathbb{R}^l$  の非負象限を表わす。第  $j$  財の価格は当該財の超過需要の正負に応じて上下すると考えられるから、 $p^{(j)}$  の運動方程式は、ある sign-preserving な函数  $f^{(j)}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を用いて

$$\dot{p}^{(j)}(t) = f^{(j)}(\zeta^{(j)}(p(t))),$$

あるいはベクトル表示にして

$$\dot{p}(t) = F(\zeta(p(t)))$$

と表記することができる。もし、 $\zeta$  や  $F$  が連続なら、この微分方程式には (ある範囲で) 必ず解が存在する。しかし、ある初期値から出発した  $p$  の径路が常に  $\mathbb{R}_+^l$  にとどまるという保証はない。そこで運動方程式を

$$\dot{p}^{(j)}(t) = \begin{cases} f^{(j)}(\zeta^{(j)}(p(t))) & \text{if } p^{(j)}(t) > 0 \\ \text{Max}\{0, f^{(j)}(\zeta^{(j)}(p(t)))\} & \text{if } p^{(j)}(t) = 0 \end{cases}$$

と定義しなおすことにする。このとき、たとえ  $f^{(j)}$  や  $\zeta^{(j)}$  が連続であっても、微分方程式を定義する右辺は、 $\mathbb{R}_+^l$  の境界上で不連続点をもつであろう。したがって Cauchy=Peano の定理が適用できず、解の存在は甚だ疑わしくなるのである。

この問題の最も体系的な研究は Filippov [21] である。

(5) 代表的な研究として Aubin [3], Henry [22]。

$$\dot{x}(t) \in \Gamma(x(t)), \quad x(0) = x_0$$

を考えると、実用上十分であろう。<sup>(6)</sup>

最後に、Filippov 型発展方程式を制約に含む最適制御問題の簡単な事例を掲げておこう。

**例 4** (簡単な生産モデル) いま経済に存在する財は  $l$  種類とし、 $[0, 1]$  上で定義され、 $\mathbb{R}^l$  に値をとる三つの函数  $x(t)$ ,  $\xi(t)$ ,  $y(t)$  は、それぞれ各財のストック、需要の時間率、生産の時間率を表わすものと解釈し、このうち  $\xi(t)$  は所与としよう。また函数  $u: [0, 1] \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}$  は所与とし、 $u(t, x(t), y(t))$  は、ストックと生産の計画  $(x(\cdot), y(\cdot))$  に応ずる、時刻  $t$  での費用を表わすものとする。そこで次のような最適制御問題を検討してみよう。

Minimize

$$\int_0^1 u(t, x(t), y(t)) e^{-rt} dt \quad (5)$$

subject to

$$\dot{x}(t) = y(t) - \xi(t) - \delta x(t) \quad (6)$$

$$x(0) = x_0 \quad (7)$$

$$y(t) \in Y (\subset \mathbb{R}^l). \quad (8)$$

ここで  $r > 0$  は割引率、 $\delta > 0$  は減耗率、 $Y$  は生産技術を表わす集合である。

例 1 の方針に従い、

$$\Gamma(t, x) = \{y - \xi(t) - \delta x \mid y \in Y\}$$

と定義すれば、(6)~(8) は

$$\dot{x}(t) \in \Gamma(t, x(t)), \quad x(0) = x_0$$

となる。また (6) を (5) に代入すれば、

$$\int_0^1 u(t, x(t), \dot{x}(t) + \xi(t) + \delta x(t)) e^{-rt} dt$$

となるから、これをあらためて

$$\int_0^1 \bar{u}(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$$

と書き表わすことができよう。すると結局、問題 (5)~(8) は、

Minimize

注 (6) もう少し精密にこの間の事情を書いておこう。 $f$  が局所有界 (つまり各点の十分に小さな近傍の中で有界) のとき、多価作用素  $\Gamma$  を次のように定義する。

$$\Gamma(x) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \bigcap_{m(N)=0} \overline{\text{co}} f[(x + \varepsilon B) \setminus N].$$

ここで  $B$  は単位球、 $m$  は Lebesgue 測度である。このとき (i)  $\Gamma$  は非空・凸値かつ優半連続で、しかも (ii)  $f$  の連続点  $x$  においては  $\Gamma(x) = \{f(x)\}$  である。さらに  $f$  が可測であれば、(iii)  $f(x) \in \Gamma(x)$  a. e. が成り立つ。しかも  $\Gamma$  は (i)~(iii) を満たす多価作用素として最小のものである。この点については詳しくは Aubin and Cellina [4] pp.101-3 を見よ。

$$\int_0^1 \bar{u}(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$$

subject to

$$\dot{x}(t) \in \Gamma(t, x(t)), \quad x(0) = x_0$$

の形式に帰着するのである。

**例 4' (若干の変形)** 例 4 では  $x$  や  $\xi$  や  $y$  は時刻  $t$  だけに依存していたが、今度はもうひとつ変数をふやして  $x(s, t)$ ,  $\xi(s, t)$ ,  $y(s, t)$ ,  $s \in [0, 1]$  としてみよう。たとえばこの生産者が  $[0, 1]$  だけの工場をもっており、 $x(s, t)$  は工場  $s$  の、時刻  $t$  におけるストックを表わすものと解釈するのである。他の  $\xi$  や  $y$  についても同様である。そこで次のような問題を考えてみよう。

Minimize

$$\int_0^1 \int_0^1 u(s, t, x(s, t), y(s, t)) e^{-rt} dt \quad (9)$$

subject to

$$\frac{\partial x}{\partial t}(s, t) = y(s, t) - \xi(s, t) - \delta x(s, t) \quad (10)$$

$$x(s, 0) = x_s \quad (11)$$

$$y(s, t) \in Y. \quad (12)$$

ここで (10) に簡単な偏微分方程式が現われることに注意する。いま  $t$  をパラメータとみなし、各  $t \in [0, 1]$  について  $X(t)$  を

$$(X(t))(s) = x(s, t) \quad \text{for all } s \in [0, 1]$$

なる函数と考える。また同様に、 $E(t)$  も

$$(E(t))(s) = \xi(s, t) \quad \text{for all } s \in [0, 1]$$

なる函数とする。さらに

$$\Gamma(t, X(t)) = Y - E(t) - \delta X(t)$$

とおけば、 $x(s, t)$  が適当な函数空間に属するとき、(10)~(11) は

$$\dot{X} \in \Gamma(t, X), \quad X(0) = \phi$$

(ここで  $\phi$  は  $\phi(s) = x_s$  なる函数)

の形式をもつ常微分方程式に変形される。しかしこの場合、 $\Gamma$  の定義域と値域は、もはやいずれも有限次元の Euclid 空間ではなく、無限次元の函数空間である。

そして例 4 と同様にして、当初の問題は次の形に変形されるであろう。

Minimize

$$\int_0^1 \int_0^1 \bar{u}(s, t, (X(t))(s), (\dot{X}(t))(s)) ds dt$$

subject to

$$\dot{X} \in \Gamma(t, X), \quad X(0) = \phi.$$

このような問題を円滑に処理するためには、無限次元空間上で定義される Filippov 型発展方程式の研究が不可欠となるのである。

## 2. 仮 定

以下、 $\mathfrak{H}$  は可分な実 Hilbert 空間とし、多価作用素  $\Gamma : [0, T] \times \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  と初期値  $a \in \mathfrak{H}$  とが与えられたとき、Filippov 型発展方程式

$$\dot{x}(t) \in \Gamma(t, x(t)), \quad x(0) = a \quad (*)$$

を考える。

また  $\mathfrak{H}$  の位相が強位相であるときには  $\mathfrak{H}_s$  と表記し、弱位相のときには  $\mathfrak{H}_w$  と書くことにする。そして  $\Gamma$  の定義域に現われる  $\mathfrak{H}$  の位相は弱位相、値域の  $\mathfrak{H}$  の位相は強位相とする。つまり

$$\Gamma : [0, T] \times \mathfrak{H}_w \rightarrow \mathfrak{H}_s$$

である。さらに区間  $[0, T]$  上には Lebesgue 測度  $dt$  が定まっている。

**仮定 1**  $\Gamma$  はコンパクト・凸値である。すなわち、すべての  $(t, x) \in [0, T] \times \mathfrak{H}$  に対して、 $\Gamma(t, x)$  は非空・強コンパクト・凸集合である。

**仮定 2**  $t \in [0, T]$  を任意に固定したとき、多価作用素  $x \mapsto \Gamma(t, x)$  は優半連続である。すなわち、任意の  $(t, x) \in [0, T] \times \mathfrak{H}_w$  と  $\Gamma(t, x)$  の ( $\mathfrak{H}_s$  における) 任意の近傍  $V$  に対して、 $x$  の ( $\mathfrak{H}_w$  における) 近傍  $U$  を適当に選び、

$$\Gamma(t, z) \subset V \quad \text{for all } z \in U$$

とすることができる。<sup>(7)</sup>

**仮定 3**  $x \in \mathfrak{H}$  を任意に固定したとき、多価作用素  $t \mapsto \Gamma(t, x)$  は可測である。すなわち、 $\mathfrak{H}_s$  の任意の開集合  $U$  に対して、 $U$  の弱い逆像

$$\Gamma^{-w}(U) \equiv \{t \in [0, T] \mid \Gamma(t, x) \cap U \neq \emptyset\}$$

が可測集合である。<sup>(8)</sup>

**仮定 4** すべての  $(t, x) \in [0, T] \times \mathfrak{H}$  に対して  $\Gamma(t, x) \subset S_{\phi(t)}$  を満たす函数  $\phi \in \mathcal{L}^2([0, T], [0, +\infty))$  が存在する。(ここで  $S_{\phi(t)}$  は、原点を中心とし、半径が  $\phi(t)$  の、 $\mathfrak{H}$  における閉球である。)

これらの仮定の中で、とりわけ  $\Gamma(t, x)$  が必ず凸でなければならないという要請は、実は著しく厳しい。たとえば前節の例 1 や例 2 に現われる  $\Gamma$  は、必ずしもこの条件を満たさないのである。しかしながら、この凸性条件を払拭する容易な途を見出すことは困難と思われる。<sup>(9)</sup>

注 (7) 多価作用素の連続性については丸山 [32] 第 4 章を参照のこと。

(8) 多価作用素の可測性については, Castaing and Valadier [14] Chap. III, IV および丸山 [32] 第 7, 8 章を見よ。

### 3. 予備的結果

まず本稿の全篇をつうじて理論的基礎となるのは、 $[0, T]$  上で定義され、値を  $\mathfrak{H}$  の中にとる関数を作る Sobolev 空間  $\mathfrak{B}^{1,p}([0, T], \mathfrak{H})$  の概念とその弱位相構造をめぐる新しい結果である。これについては Maruyama [36] で公にされ、さらに前稿・丸山 [37] §3~4 においても体系的に解説したから、ここでは主要な事柄だけを次にまとめておこう。

**定理 1** (Sobolev 空間の弱収束定理; Maruyama [36])  $\mathfrak{H}$  を可分な実 Hilbert 空間とし、 $\{x_n\}$  を次の条件を満たす  $\mathfrak{B}^{1,p}([0, T], \mathfrak{H})$  ( $p \geq 1$ ) の点列とする。

- (i) 各  $t \in [0, T]$  に対して、集合  $\{x_n(t); n=1, 2, \dots\}$  は  $\mathfrak{H}_w$  の有界集合。
- (ii)  $\|x'_n(t)\| \leq \phi(t)$  a. e. を満たす  $\phi \in \mathfrak{L}^p([0, T], [0, +\infty))$  が存在する。

このとき、次の(a), (b)を満たす  $\{x_n\}$  の部分列  $\{z_n\}$  と  $x^* \in \mathfrak{B}^{1,p}([0, T], \mathfrak{H})$  とが存在する。

- (a)  $\{z_n\}$  は  $\mathfrak{H}_w$  において  $x^*$  に一様収束する。
- (b)  $\{z_n\}$  は  $\mathfrak{L}^p([0, T], \mathfrak{H})$  において  $x^*$  に弱収束する。

以下、この定理を自由に使いながら、若干の準備を整えていこう。

まず次の補題は本質的には Castaing [11] によって得られたものだが、読者の便宜のために、やや詳しく証明を解説しておこう。

**補題 1** (Castaing [11]) 多価作用素  $\Gamma$  は仮定 1~3 を満たすものとし、函数  $x: [0, T] \rightarrow \mathfrak{H}_s$  は Bochner-可積分とする。このとき

$$\Sigma(t) \subset \Gamma(t, x(t)) \quad \text{for all } t \in [0, T]$$

を満たす、閉値・可測多価作用素  $\Sigma: [0, T] \rightarrow \mathfrak{H}_s$  が存在する。

**証明**  $\{x_n: [0, T] \rightarrow \mathfrak{H}\}$  を、各  $t \in [0, T]$  について

$$\|x_n(t) - x(t)\| \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

を満たす単函数の列とする。(そのような列の存在については Yosida [46] p. 133 および丸山 [37] §1 を見よ。) さらに多価作用素  $\Gamma_n: [0, T] \rightarrow \mathfrak{H}$  を

$$\Gamma_n: t \mapsto \Gamma(t, x_n(t)); n=1, 2, \dots$$

注 (9) たとえば De Biagi [16]。

(10) 丸山 [37] 参照。



と定義すれば、各  $\Gamma_n$  は可測である。これを示すために、 $x_n$  による  $[0, T]$  の像を  $\{y_1, y_2, \dots, y_p\} \subset \mathfrak{G}$  とする。つまり

$$x_n([0, T]) = \{y_1, y_2, \dots, y_p\}$$

である。また多価作用素  $\Phi_j: [0, T] \rightarrow \mathfrak{G}$  ( $j=1, 2, \dots, p$ ) を

$$\Phi_j: t \mapsto \Gamma(t, y_j)$$

と定義すれば、 $\Phi_j$  は可測である。それゆえ  $\mathfrak{G}$  の任意の開集合  $U$  に対して、集合

$$\Gamma_n^{-w}(U) = \bigcup_{j=1}^p [\Phi_j^{-w}(U) \cap x_n^{-1}(\{y_j\})]$$

が可測であることは容易に知られる。ゆえに  $\Gamma_n$  は可測である。

仮定 1, 2 により、 $\Gamma$  はコンパクト値かつ優半連続であるから、 $\|x_n(t) - x(t)\| \rightarrow 0$  よりただちに

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma(t, x_n(t))$$

は  $\mathfrak{G}$  における相対コンパクト集合であることが知られる。Baire のカテゴリー定理により、集合

$$\Sigma(t) \equiv \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \Gamma(t, x_m(t))}$$

は非空であり、多価作用素

$$\Sigma: t \mapsto \Sigma(t)$$

は閉値・可測である。最後に再び  $\Gamma$  がコンパクト値で優半連続であることにより、

$$\Sigma(t) \subset \Gamma(t, x(t)) \quad \text{for each } t \in [0, T]$$

が導かれる。

(証了)

**補題 2**  $A$  を  $\mathfrak{G}$  の非空・コンパクト凸集合とし、Sobolev 空間  $\mathfrak{B}^{1,2}([0, T], \mathfrak{G})$  の部分集合  $X$  を

$$X = \{x \in \mathfrak{B}^{1,2} \mid \|\dot{x}(t)\| \leq \phi(t) \text{ a. e.}, x(0) \in A\}$$

と定義する。このとき  $X$  は  $\mathfrak{B}^{1,2}$  における非空・凸・弱コンパクト集合である。

**証明**  $X$  が非空であることと、その凸性は自明であるから、弱コンパクト性だけを詳しく調べておこう。

まず  $X$  が  $\mathfrak{B}^{1,2}$  において有界であることを確認する。 $\{\dot{x} \mid x \in X\}$  は仮定 4 によって  $\mathfrak{G}^2$ -有界ゆえ、 $X$  が  $\mathfrak{G}^2$ -有界であることだけを(11)示せばよい。

$x$  を  $X$  の任意の点とする。 $\mathfrak{G}$  が Radon-Nikodým の性質をもつことに留意すれば、 $x$  は

$$x(t) = a + \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau; \quad t \in [0, T]$$

注 (11)  $\mathfrak{B}^{1,2}$  のノルムについては丸山 [37] p. 98.

と表現することができる。(丸山 [37] §2, とくに [G] を参照せよ。) ここで  $a$  は  $A$  の点である。  
これから

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &= \left\| a + \int_0^t \dot{x}(\tau) d\tau \right\| \leq \|a\| + \int_0^t \|\dot{x}(\tau)\| d\tau \\ &\leq \|a\| + \int_0^t \phi(\tau) d\tau \leq B + \int_0^T \phi(\tau) d\tau, \\ \text{ここで } B &= \sup_{a \in A} \|a\| < +\infty \end{aligned}$$

を得る。したがって

$$\sup_{x \in X} \|x\|_2^2 \leq \left[ B^2 + 2B \int_0^T \phi(\tau) d\tau + \left\{ \int_0^T \phi(\tau) d\tau \right\}^2 \right] \cdot T < +\infty$$

( $\|\cdot\|_2$  は  $\mathfrak{R}^2$ -ノルム)

となり,  $X$  が  $\mathfrak{R}^2$ -有界であることが示された。すなわち  $X$  は  $\mathfrak{B}^{1,2}$  において有界なのである。

$\mathfrak{B}^{1,2}$  は Hilbert 空間であるから, 有界集合  $X$  は弱相対コンパクトである。したがって,  $X$  の弱コンパクト性を示すためには,  $X$  が弱閉集合であることを示せばよい。だが  $X$  は凸なので,  $X$  が強閉集合であることを示しても同じことである。

そこで  $X$  の点列  $\{x_n\}$  が

$$s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^* \quad (\in \mathfrak{B}^{1,2})$$

を満たすものとしよう。すると  $\{\dot{x}_n\}$  は  $x^*$  に概収束する部分列  $\{\dot{x}_{n'}\}$  をもつ。ここですべての  $n'$  について  $\|\dot{x}_{n'}(t)\| \leq \phi(t)$  a. e. であるから,

$$\|\dot{x}^*(t)\| \leq \phi(t) \text{ a. e.}$$

最後に  $x^*(0) \in A$  は明らかゆえ, 確かに  $x^* \in X$  を得,  $X$  が強閉であることが判明した。

(証了)

$\mathfrak{D}_w$  における原点  $0$  の, 凸集合から成る基本近傍系を  $\mathcal{B}(0; \mathfrak{D}_w)$  と書く。次の補題は非常に重要であるが, 証明は容易である。

**補題 3**  $\Gamma$  は仮定 1 ~ 2 を満たすものとする。 $(t^*, x^*)$  を  $[0, T] \times \mathfrak{D}$  の任意の点とし, 各  $V \in \mathcal{B}(0; \mathfrak{D}_w)$  ごとに  $[0, T] \times \mathfrak{D}$  の集合  $K(t^*; x^*, V)$  を

$$K(t^*; x^*, V) = \{(t, x) \in [0, T] \times \mathfrak{D} \mid x \in x^* + V, t = t^*\}$$

と定義する。このとき

$$\Gamma(t^*, x^*) = \bigcap_{V \in \mathcal{B}(0; \mathfrak{D}_w)} \overline{\Gamma(K(t^*; x^*, V))}$$

が成り立つ。

この関係の成り立つことを,  $\Gamma$  は **Cesari の性質 (Q)** を満たすなどという<sup>(12)</sup>

次の補題が次節で述べる主要定理を証明するための鍵となる。

**補題 4**  $\Gamma$  は仮定 1, 2, 4 を満たすものとし,  $A$  は  $\mathfrak{D}_w$  における非空・凸・コンパクト集合とする。このとき集合

$$H \equiv \{(a, x, y) \in A \times X \times X \mid \dot{y}(t) \in \Gamma(t, x(t)) \text{ a. e. かつ } x(0) = y(0) = a\}$$

は,  $A \times X \times X$  における弱コンパクト集合である。

**証明**  $A \times X \times X$  が弱コンパクトであることは既知ゆえ,  $H$  がその弱閉部分集合であることを示せば十分である。

また  $\mathfrak{R}^{1,2}$  は可分な Hilbert 空間であるから, その有界集合  $X$  上の弱位相は距離づけ可能である。<sup>(13)</sup><sup>(14)</sup>したがって,  $H$  の弱閉性を確認するにあたり, 点列を用いて議論することが許されるのである。

さてそこで, ある  $q^* \equiv (a^*, x^*, y^*) \in A \times X \times X$  に弱収束する  $H$  の点列  $\{q_n \equiv (a_n, x_n, y_n)\}$  を考え,  $q^* \in H$  であることを示そう。そのためには  $\dot{y}^*(t) \in \Gamma(t, x^*(t))$  a. e. を確かめておけば十分である。

任意に  $t \in [0, T]$  を固定したとき,

$$\|x_n(t)\| \leq \|a\| + \int_0^t \|\dot{x}_n(\tau)\| d\tau \leq \|a\| + \int_0^t \phi(\tau) d\tau \quad (\text{仮定 4 による})$$

がすべての  $n$  について成り立つから,  $\{x_n(t)\}$  は  $\mathfrak{D}_w$  における相対コンパクト集合である。したがって Sobolev 空間の弱収束定理 (定理 1) により,  $\{q_n\}$  の適当な部分列 (記号の変更を略す) を選んで

$$x_n(t) \longrightarrow x^*(t) \quad (\mathfrak{D}_w \text{ における一様収束}) \quad (1)$$

$$\dot{y}_n \longrightarrow \dot{y}^* \quad (\mathfrak{L}^2 \text{ における弱収束}) \quad (2)$$

とすることができる。(2) により, 各  $j \in \mathbb{N}$  に対して  $\{\dot{y}_n\}$  の有限個の点

$$\dot{y}_{n_j+1}, \dot{y}_{n_j+2}, \dots, \dot{y}_{n_j+m(j)}$$

と数

$$\alpha_{ij} \geq 0, \quad 0 \leq i \leq m(j), \quad \sum_{i=1}^{m(j)} \alpha_{ij} = 1$$

を選び

$$\|\dot{y}^* - \sum_{i=1}^{m(j)} \alpha_{ij} \dot{y}_{n_j+i}\|_2 \leq \frac{1}{j}$$

$$n_{j+1} > n_j + m(j)$$

注 (12) いわゆる極大単調作用素もこの Cesari の性質 (Q) と密接な関係を有することが知られている。詳しくは Cesari [15] pp. 500-502, およびそこに言及されている M. B. Suryanarayana らの論文を見よ。実は Cesari の性質 (Q) が, 極大単調作用素によって定義される発展方程式論と, Filippov 型発展方程式論との合流点と考えられる。

(13) Adams [1] Theorem 3.5, p. 47.

(14) たとえば丸山徹『函数解析学』(慶應通信, 東京) 1980, p. 357 を見よ。

とすることができる (Mazur の定理)。ここで

$$\eta_j(t) = \sum_{i=1}^{m(j)} \alpha_{ij} \dot{y}_{n_j+i}(t)$$

とおけば,

$$\eta_j(t) \in \text{co} \left( \bigcup_{i=1}^{m(j)} \Gamma(t, x_{n_j+i}(t)) \right)$$

である。また  $\{\eta_j\}$  は  $\dot{y}^*$  に概収束する部分列を有するから、一般性を失うことなく

$$\eta_j(t) \longrightarrow \dot{y}^*(t) \text{ a. e.} \quad (3)$$

としてよいであろう。

他方 (1) によれば、殆どすべての  $t \in [0, T]$  とすべての  $V \in \mathcal{B}(0; \mathfrak{H}_w)$  に対して、十分に大きな  $n_0(V) \in \mathbb{N}$  を選び

$$x_n(t) \in x^*(t) + V \quad \text{for all } n \geq n_0(V),$$

すなわち

$$(t, x_n(t)) \in K(t; x^*(t), V) \quad \text{for all } n \geq n_0(V)$$

とすることができる。ゆえに十分に大きな  $j$  については

$$\eta_j(t) \in \text{co} \Gamma(K(t; x^*(t), V)) \text{ a. e.}$$

である。極限に移れば、(3) により

$$\dot{y}^*(t) \in \overline{\text{co}} \Gamma(K(t; x^*(t), V)) \text{ a. e.} \quad (4)$$

を得る。(4) はすべての  $V \in \mathcal{B}(0; \mathfrak{H}_w)$  について成り立つのであるから、

$$\dot{y}^*(t) \in \bigcap_{V \in \mathcal{B}(0; \mathfrak{H}_w)} \overline{\text{co}} \Gamma(K(t; x^*(t), V)) = \Gamma(t, x^*(t)) \text{ a. e.} \quad (5)$$

(5) の等式は補題 3 による。こうして  $(a^*, x^*, y^*) \in H$  が示された。 (証了)

#### 4. 基本定理

さていよいよ発展方程式 (\*) の解の存在証明へと進もう。ここでは Sobolev 空間  $\mathfrak{B}^{1,2}([0, T], \mathfrak{H})$  の中に解を求めることとし、

$$\mathcal{A}(a) \equiv \{x \in \mathfrak{B}^{1,2} \mid x \text{ は殆どいたるところ (*) を満たす}\}$$

を、初期値  $a$  に応ずる解の集合と考えよう。

次の定理は  $\mathcal{A}(a) \neq \emptyset$  なることと、解集合  $\mathcal{A}(a)$  が初期値  $a$  にある意味で連続に依存することとを主張するものである。

**定理 2 (Maruyama [36])**  $\Gamma$  は仮定 1 ~ 4 を満たすものとし、 $A$  は  $\mathfrak{H}_*$  の非空・凸・コンパクト集合とする。このとき次の命題が成り立つ。

- (i) 任意の  $a^* \in A$  に対して  $\mathcal{A}(a^*) \neq \emptyset$ 。
- (ii) 多価作用素  $\mathcal{A} : A \longrightarrow \mathfrak{B}^{1,2}$  は  $\mathfrak{B}^{1,2}$  の弱位相についてコンパクト値で、しかも優半連

続である。

**証明** (i)  $a^* \in A$  を任意に固定する。  $X$  の部分集合  $X'$  を

$$X' = \{x \in X \mid x(0) = a^*\}$$

と定義すれば、  $X'$  は  $\mathbb{R}^{1,2}$  における凸・弱コンパクト集合である。さらに多価作用素  $\Phi: X' \rightarrow X'$  を次のように定義しよう。

$$\Phi(x) = \{y \in X' \mid \dot{y}(t) \in \Gamma(t, x(t)) \text{ a. e.}\}.$$

まず各  $x \in X'$  に対して  $\Phi(x) \neq \emptyset$  であることが次のようにして知られる。補題 1 により、

$$\Sigma(t) \subset \Gamma(t, x(t)) \quad \text{for all } t \in [0, T]$$

を満たす閉値・可測多価作用素  $\Sigma: [0, T] \rightarrow \mathfrak{D}_s$  が存在する。可測選択子の存在定理により、<sup>(15)</sup>

$$\sigma(t) \in \Sigma(t) \subset \Gamma(t, x(t)) \quad \text{for all } t \in [0, T]$$

となる(一価)可測函数  $\sigma: [0, T] \rightarrow \mathfrak{D}_s$  が存在することも知られている。そこで  $y: [0, T] \rightarrow \mathfrak{D}$  を

$$y(t) = a^* + \int_0^t \sigma(\tau) d\tau$$

と定義すれば、  $y \in \Phi(x)$  である。こうして  $\Phi(x) \neq \emptyset$  が示された。

$\Phi$  が凸・コンパクト値であることの証明は容易であるから読者に任せよう。

最後に、  $\Phi$  のグラフ  $G(\Phi)$  が閉じていることも次のようにして確かめることができる。補題 4 で定義した  $H$  に対して

$$H_{a^*} = \{(a, x, y) \in H \mid a = a^*\}$$

と定義すれば、  $H_{a^*}$  は  $A \times X \times X$  の弱コンパクト集合である。  $G(\Phi)$  は

$$G(\Phi) = \text{proj}_{X \times X} H_{a^*}$$

(右辺は  $H_{a^*}$  の  $X \times X$  の中への射影)

と表現することができるから、確かに  $G(\Phi)$  は閉である。

これまでの結果から、Fan=Glicksbergの不動点定理を  $\Phi$  に適用すれば、<sup>(16)</sup>  $x^* \in \Phi(x^*)$  なる  $x^* \in X'$  の存在が知られる。すなわち

$$\dot{x}^*(t) \in \Gamma(t, x^*(t)), \quad x^*(0) = a^*$$

であり、この  $x^*$ こそ  $\Delta(a^*)$  の元である。

(ii)  $\Delta(a)$  のコンパクト性については、仮定 1, 2 と Mazur の定理を利用することによってただちに知られる。また  $\Delta$  のグラフ  $G(\Delta)$  は

$$G(\Delta) = \text{proj}_{A \times X} \{(a, x, y) \in H \mid x = y\}$$

と表わすことができるので、それは  $A \times X$  の中で閉じている。したがって、  $\Delta$  は優半連続であ

注 (15) Castaing and Valadier [14] Chap. III, 丸山 [32] 第7章を参照。

(16) 丸山 [32] 第5章 §4 を見よ。

る。

ここで  $\Gamma$  が一価の特殊ケースについて考察しておくことが有益であろう。

今までどおり  $\mathfrak{H}$  は可分な実 Hilbert 空間とし、 $f: \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$  は所与の函数とする。このとき、 $\dim \mathfrak{H} = +\infty$  の場合には、 $f$  が連続であるとしても微分方程式

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = a$$

( $a$  は  $\mathfrak{H}$  のベクトル) は必ずしも解をもたないことが今日ではよく知られている。Lasota and Yorke [28] および Yorke [45] らの反例が発見されて以来、多くの学者が無限次元空間上で定義された常微分方程式の解の存在をめぐる研究を重ねてきた。<sup>(18)</sup> 次の系はこの分野の既存の知識に、ひとつの新しい結果をつけ加えようとするものである。

ここでもまた、 $f$  の定義域と値域の位相の違いに注意していただきたい。

系 1 函数  $f: [0, T] \times \mathfrak{H}_w \rightarrow \mathfrak{H}$  は次の三条件を満たすことを仮定する。

- (i) 任意に  $t \in [0, T]$  を固定したとき、函数  $x \mapsto f(t, x)$  は連続。
- (ii) 任意に  $x \in \mathfrak{H}$  を固定したとき、函数  $t \mapsto f(t, x)$  は可測。
- (iii) すべての  $t \in [0, T]$  について  $\sup_{x \in \mathfrak{H}} \|f(t, x)\| \leq \psi(t)$  を満たす  $\psi \in \mathfrak{L}^2([0, T], [0, +\infty))$  が存在する。

このとき微分方程式

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = a \tag{**}$$

は、 $\mathfrak{W}^{1,2}([0, T], \mathfrak{H})$  の中に少なくともひとつの解を有する。

ここで (\*\*) の解とは

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \text{ a. e. } \quad x(0) = a$$

を満たす  $\mathfrak{W}^{1,2}$  の元のことである。

### 5. Filippov型発展方程式を制約に含む変分問題

$K$  を  $\mathfrak{H}$  における非空・有界な円板集合とし、 $u: [0, T] \times \mathfrak{H}_w \times K \rightarrow (-\infty, +\infty]$  は所与の proper な函数とする。このとき次のような変分問題を考えよう。

---

注 (17) この証明の中で Castaing and Valadier [13] の着想をいくつか利用した。またこの定理と密接に関連を有する結果が De Blasi [16] によって報告されている。そこでは Baire のカテゴリー定理の巧みな応用をつうじて、本稿よりもずっと一般的な枠組の中で存在証明が行なわれている。さらに Papageorgiou [41] も最近の重要な貢献である。

$$\text{Minimize } J(x) \equiv \int_0^T u(t, x(t), \dot{x}(t)) dt. \quad (\#)$$

変分問題 (#) の解の存在を確かめるには、(I)  $A(a)$  がある位相についてコンパクトであることと、(II) 積分汎関数  $J$  が  $A(a)$  上で下半連続であることを示せばよい。このうち (I) については、既に前節でひとつの解決を得ているので、ここでは (II) に注意を集中しよう。

そのために非線形積分汎関数の連続性に関する一般的な結果を述べておこう。<sup>(20)</sup>

**定義**  $(T, \mathcal{E}, \mu)$  を測度空間,  $X$  を位相空間,  $\mathfrak{B}$  を Banach 空間,  $f: T \times X \times \mathfrak{B} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  を所与の函数とする。また  $T$  上で定義され  $X$  に値をとる  $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(X))$ -可測函数の全体を  $\mathfrak{M}(T, X)$  と書くことにしよう。 $(\mathcal{B}(X))$  は  $X$  上の Borel  $\sigma$ -集合体である。) 次の三条件(a), (b), (c) を満たす,  $\mathfrak{M}(T, X) \times \mathfrak{L}^p(T, \mathfrak{B})$  ( $p \geq 1$ ) のいかなる函数列  $\{(x_n, v_n)\}$  に対しても  $\{f^-(t, x_n(t), v_n(t))\}$  が  $\mathfrak{L}^1(T, \bar{\mathbb{R}})$  における弱相対コンパクト集合であるとき,  $f$  は下方コンパクト性 (lower compactness property) を有するという。

(a)  $\{x_n\}$  はある  $x^* \in \mathfrak{M}(T, X)$  に対して各点収束する。

注 (18) この主題をめぐる優れた展望として Deimling [17] と Martin [29] とを推す。

学説史的にはまず J. Dieudonné が空間  $c_0$  で反例を作って、無限次元空間上では、Cauchy=Peano の存在定理が成立しないことに注意を喚起した。(Dieudonné [18].) ここで  $c_0$  とは 0 に収束する実数列の空間に、 $x=(x_1, x_2, \dots)$  のノルムを  $\|x\| = \text{Max}_{j \in \mathbb{N}} |x_j|$  と定めて得られる線形ノルム空間を表わしている。

いま各  $j \in \mathbb{N}$  に対して

$$e_j = (0, \dots, 0, \underset{j\text{-th}}{1}, 0, \dots) \in c_0$$

と定義すれば、どの  $x=(x_1, x_2, \dots) \in c_0$  も

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$$

と表現することができる。さてそこで

$$f(x) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{|x_j|} e_j, \quad a = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} e_j$$

とおいて、微分方程式  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ ,  $x(0) = a$  を考えてみよう。仮にこれが  $c_0$  の中で局所的な解をもつとしてみる。このとき各  $j \in \mathbb{N}$  について

$$\dot{x}_j(t) = 2\sqrt{|x_j(t)|}, \quad x_j(0) = \frac{1}{j^2}$$

とならねばならないから、

$$x_j(t) = \left(t + \frac{1}{j}\right)^2 \quad \text{for all } j \text{ and } t \geq 0$$

である。しかしこれから、

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_j(t) = t^2 \neq 0 \quad \text{for } t > 0.$$

となり  $x(t) \in c_0$  であることに矛盾。

この例はきわめて簡明だが、 $c_0$  というあまりにタチの悪い、特異な空間での作例であることが遺憾であった。しかしその後 Yorke [45] が  $l_2$  上で反例をあげ、さらに Lasota and Yorke [28] が一層の整理を施すとともに、 $\mathfrak{L}^2$  上での反例を作って、事態はまことに深刻となったのである。

より最近の研究としてたとえば、H-P. Heinz [23] などをも見よ。

(19) 線形位相空間における閉・凸・円形 (balanced) な集合を円板集合 (disked set) と呼ぶ。

- (b)  $\{v_n\}$  はある  $v^* \in \mathfrak{L}^p(T, \mathfrak{B})$  に対して弱収束する。  
 (c) ある  $C < +\infty$  に対して

$$\sup_n \int_T f(t, x_n(t), v_n(t)) d\mu \leq C.$$

この概念を用いて Castaing and Clauzure [12] および Maruyama [34] による、非線形積分汎関数の連続性定理を述べることができる。しかしこの定理の証明は複雑で、きわめて多くの紙数を要するため、関心のある読者は原論文を参照していただきたい。

**定理 3** ( $T, \mathcal{E}, \mu$ ) は正值 Radon 測度  $\mu$  をもつコンパクト空間、 $X$  は Souslin 位相空間<sup>(22)</sup>、 $\mathfrak{B}$  は可分・回帰的な Banach 空間、 $C$  は  $\mathfrak{B}$  の有界な円板集合とする。また函数  $f: T \times X \times C \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  は次の諸条件を満たす proper な函数とする。

- (i)  $f$  は次のような意味での正規非線形積分核 (normal integrand) である。  
 a.  $f$  は  $(\mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(C), \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ -可測。  
 b.  $t \in T$  を任意に固定したとき、函数  $(x, v) \mapsto f(t, x, v)$  は下半連続。  
 (ii)  $(t, x) \in T \times C$  を任意に固定したとき、函数  $v \mapsto f(t, x, v)$  は凸。  
 (iii)  $f$  は下方コンパクト性を有する。

さらに  $\mathfrak{M}(T, X)$  の点列  $\{x_n\}$  はある  $x^* \in \mathfrak{M}(T, X)$  に各点収束し、 $\mathfrak{L}^p(T, C)$  ( $1 \leq p < +\infty$ ) の点列  $\{v_n\}$  はある  $v^* \in \mathfrak{L}^p(T, C)$  に弱収束するものとする。また最後に

注 (20)  $\mathfrak{H} = \mathbb{R}^l$  の場合については Ioffe [24] の研究が決定的に重要である。 $(T, \mathcal{E}, \mu)$  を測度空間とし、 $v: T \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  を所与の函数とすると、 $\mathfrak{L}^p(T, \mathbb{R}^l) \times \mathfrak{L}^q(T, \mathbb{R}^k)$  ( $p, q \geq 1$ ) 上で定義される積分汎函数

$$H(x, y) = \int_T v(t, x(t), y(t)) d\mu$$

を考える。Ioffe は  $\mathfrak{L}^p$  には強位相、 $\mathfrak{L}^q$  には弱位相を定め、この位相の組み合わせについて  $H(\cdot, \cdot)$  が下半連続となるための条件を示した。実は  $\mathfrak{B}^{1,p}([0, T], \mathbb{R}^l)$  上で定義される積分汎函数

$$J(x) = \int_0^T u(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$$

の連続性のチェックは、Sobolev 空間  $\mathfrak{B}^{1,p}([0, T], \mathbb{R}^l)$  の弱収束定理 (c.f. 丸山 [37] の [M]) をつうじて、結局上記の Ioffe の問題に還元されるのである。Balder [6] は無限次元の場合 ( $\dim \mathfrak{H} = +\infty$ ) についても、Ioffe と同様の位相の組み合わせ——すなわち  $\mathfrak{L}^p(T, \mathfrak{H})$  に強位相、 $\mathfrak{L}^q(T, \mathfrak{H})$  に弱位相——で  $H(\cdot, \cdot)$  の下半連続性を導いた。しかしこの形では  $\mathfrak{B}^{1,p}([0, T], \mathfrak{H})$  上の積分汎函数を取り扱うのに不便であることが定理 1 から明らかである。Castaing and Clauzure [12] と Maruyama [34] が理論の複雑化をおかして、あえて本文のようなアプローチを採ったのは、この理由によるのである。

Ioffe の理論については丸山 [32] 第 9 章をも参照。また非線形積分汎関数の連続性に関する総合報告として、Buttazo [10] が詳しい。この問題については L. Cesari の影響の下に、イタリアの学者が積極的な活躍を示している。

(21)  $f^-$  は函数  $f$  の negative part, つまり  $f^-(\cdot, \cdot, \cdot) = -\text{Min}\{f(\cdot, \cdot, \cdot), 0\}$ 。

(22) 丸山 [32] pp. 10-18 を見よ。



$$\int_T |f(t, x^*(t), \bar{v}(t))| d\mu < +\infty$$

を満たす  $\bar{v} \in \mathcal{L}^p(T, C)$  が少なくともひとつ存在することを仮定する。このとき

$$\liminf_n \int_T f(t, x_n(t), v_n(t)) d\mu \geq \int_T f(t, x^*(t), v^*(t)) d\mu.$$

叙述をできる限り簡潔にするために、ここでは  $\mathfrak{B}$  を Banach 空間として論じたが、この結果は半回帰的局所凸 Polish 線形位相空間の場合にまで、容易に一般化することができる。

さて変分問題 (#) に戻ろう。まず仮定 4 を幾分強化して——

**仮定 4'** すべての  $(t, x) \in [0, T] \times \mathfrak{X}$  について  $\Gamma(t, x) \subset K$ .

また  $u$  の性質としては次のような仮定をおく。

**仮定 5**  $u$  は正規非線形積分核である。すなわち

(a)  $u$  は  $(\mathcal{E} \otimes \mathcal{B}(\mathfrak{X}_w) \otimes \mathcal{B}(K), \mathcal{B}((-\infty, +\infty)))$ -可測。(ここで  $\mathcal{E}$  は  $[0, T]$  上の Lebesgue 可測集合が作る  $\sigma$ -集合体である。)

(b)  $t \in [0, T]$  を任意に固定したとき、函数  $(x, v) \mapsto u(t, x, v)$  は下半連続。

**仮定 6**  $(t, x) \in T \times \mathfrak{X}$  を任意に固定したとき、函数  $v \mapsto u(t, x, v)$  は凸。

**仮定 7** 次の条件を満たす  $\theta \in \mathcal{L}^1([0, T], \mathbb{R})$  と  $\zeta \in \mathcal{L}^2([0, T], \mathfrak{X})$  が存在する。

$$u(t, x, v) \geq \langle \zeta(t), v \rangle + \theta(t) \quad \text{for all } (t, x, v) \in [0, T] \times \mathfrak{X} \times K.$$

**仮定 8** 少なくともひとつの  $x \in A(a)$  について

$$\int_0^T u(t, x(t), \dot{x}(t)) dt < +\infty.$$

**補題 5** 仮定 5, 7 の下において、 $u$  は下方コンパクト性を有する。

**証明**  $\{(x_n, v_n)\}$  を次の条件を満たす、 $\mathfrak{M}([0, T], \mathfrak{X}_w) \times \mathcal{L}^2([0, T], K)$  の点列としよう。

(a)  $\{x_n\}$  はある  $x^* \in \mathfrak{M}([0, T], \mathfrak{X}_w)$  に各点収束する。

(b)  $\{v_n\}$  はある  $v^* \in \mathcal{L}^2([0, T], K)$  に弱収束する。

(c)  $\sup_n \int_0^T u(t, x_n(t), v_n(t)) dt < +\infty$ .

すると任意の  $h \in \mathcal{L}^\infty([0, T], \mathbb{R})$  に対して  $h \cdot \zeta \in \mathcal{L}^2([0, T], \mathfrak{X})$  であることと、(b)により、

注 (23) いわゆる Mackey の定理により、このような空間では任意の有界集合が弱相対コンパクトになることが重要なポイントである。

$$\left| \int_0^T [\langle \zeta(t), v_n(t) \rangle - \langle \zeta(t), v^*(t) \rangle] h(t) dt \right| = \left| \int_0^T \langle h(t) \zeta(t), v_n(t) - v^*(t) \rangle dt \right| \longrightarrow 0 \text{ as } n \longrightarrow \infty$$

for all  $h \in \mathcal{L}^\infty([0, T], \mathbb{R})$ .

ゆえに  $\{\langle \zeta(t), v_n(t) \rangle\}$  は  $\mathcal{L}^1([0, T], \mathbb{R})$  における弱収束点列であり、したがってまた一様可積分であることがわかった。

しかるに

$$\begin{aligned} \langle \zeta(t), v_n(t) \rangle + \theta(t) &\leq -u^-(t, x_n(t), v_n(t)) \leq 0 \\ \text{on } \{t \in [0, T] \mid u(t, x_n(t), v_n(t)) &= -u^-(t, x_n(t), v_n(t))\} \end{aligned}$$

であるから、 $\{u^-(t, x_n(t), v_n(t))\}$  が一様可積分であることもただちに知られる。 (証了)

**定理 4** 仮定 1-3, 4', 5-8 の下において, (#) は解を有する。

**証明** まず仮定 7, 8 および  $\mathcal{A}(a)$  の有界性より,

$$-\infty < \inf_{x \in \mathcal{A}(a)} J(x) < +\infty$$

は明らかである。そこで  $\mathcal{A}(a)$  の点列  $\{x_n\}$  を

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(x_n) = \inf_{x \in \mathcal{A}(a)} J(x)$$

となるように選ぶ。Sobolev 空間の弱収束定理 (定理 1) により,  $\{x_n\}$  の部分列  $\{z_n\}$  と,  $x^* \in \mathbb{W}^{1,2}([0, T], \mathfrak{H})$  を適当に選んで

- (a)  $z_n \longrightarrow x^*$  ( $\mathfrak{H}_w$  における一様収束)
- (b)  $z_n \longrightarrow x^*$  ( $\mathcal{L}^2([0, T], \mathfrak{H})$  における弱収束)

とすることができる。

この  $x^*$  は  $\mathcal{A}(a)$  に属する。実際(a)により, 任意の  $t \in [0, T]$  と任意の  $\eta \in \mathcal{L}^2([0, T], \mathfrak{H})$  に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle z_n(t), \eta(t) \rangle = \langle x^*(t), \eta(t) \rangle$$

であり, また仮定 4' から

$$|\langle z_n(t), \eta(t) \rangle| \leq C \|\eta(t)\|$$

なる  $C < +\infty$  が存在するから, 上限収束定理を用いて

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \langle z_n(t), \eta(t) \rangle dt = \int_0^T \langle x^*(t), \eta(t) \rangle dt$$

for any  $\eta \in \mathcal{L}^2([0, T], \mathfrak{H})$ .

こうして  $w\text{-}\lim_n z_n = x^*$  (in  $\mathcal{L}^2$ ) であることが知られた。これと(b)とを併せて,  $w\text{-}\lim_n z_n = x^*$  (in  $\mathbb{W}^{1,2}$ )。  $\mathcal{A}(a)$  は  $\mathbb{W}^{1,2}$  において弱閉であるから,  $x^* \in \mathcal{A}(a)$  を得る。

ゆえに

$$\inf_{x \in \mathcal{A}(a)} J(x) \leq J(x^*).$$

他方, 補題 5 と定理 3 により

$$J(x^*) \leq \inf_{x \in \mathcal{J}(a)} J(x) = \liminf_n J(x_n).$$

こうして  $x^*$  は (#) の解であることが判明したのである。

(証了)

#### 参 考 文 献

- [1] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, (Academic Press, New York, San Francisco, London) 1975.
- [2] Attouch, H. and A. Damlamian, "On Multivalued Evolution Equations in Hilbert Spaces", *Israel J. Math.*, **12**, 373-390 (1972).
- [3] Aubin, J-P., "Monotone Evolution of Resource Allocations", *J. Math. Eco.*, **6**, 43-62, (1979).
- [4] ——— and A. Cellina, *Differential Inclusions*, (Springer, Berlin) 1984.
- [5] Balder, E. J., "On Seminormality of Integral Functionals and Their Integrands", *SIAM J. Control*, **24**, 95-121, (1986).
- [6] ———, "Necessary and Sufficient Conditions for  $L_1$ -Strong-Weak Lower Semicontinuity of Integral Functionals", *Nonlinear Anal.*, **11**, 1399-1404, (1987).
- [7] Blagodatskikh, V. I. and A. F. Filippov, "Differential Inclusions and Optimal Control", *Proc. Steklov Inst. Math.*, **4**, 199-259, (1986).
- [8] Bottaro, G. and P. Oppezzi, "Condizioni necessarie per la semicontinuità inferiore di un funzionale integrale dipendente da funzioni a valori in uno spazio di Banach", *Boll. Un. Mat. Ital.*, **18-B**, 47-65, (1981).
- [9] Brezis, H., *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, (North-Holland, Amsterdam) 1973.
- [10] Buttazzo, G., *Semicontinuity, Relaxation and Integral Representation in the Calculus of Variations*, (Longman Scientific & Technical, Harlow) 1989.
- [11] Castaing, C., "Sur les équations différentielles multivoques", *C. R. Acad. Sc. Paris, Serie A*, **263**, 63-66, (1966).
- [12] ——— and P. Clazure, "Semi continuité des fonctionnelles intégrales", *Acta Math. Vietnam.*, **7**, 139-170, (1982).
- [13] ——— and M. Valadier, "Equations différentielles multivoques dans les espaces vectoriels localement convexes", *Rev. Française Informat. Recherche Opérationnelle*, **3**, 3-16, (1969).
- [14] ——— and ———, *Convex Analysis and Measurable Multifunctions*, (Springer, Berlin) 1977.
- [15] Cesari, L., *Optimization—Theory and Applications*, (Springer, Berlin) 1983.
- [16] De Blasi, F. S. "Differential Inclusions in Banach Spaces", *J. Differential Equations*, **66**, 208-229, (1987).
- [17] Deimling, K., *Ordinary Differential Equations in Banach Spaces*, (Springer, Berlin), 1977.
- [18] Dieudonné, J., "Deux exemples d'équations différentielles", *Acta. Sci. Math.* (Szeged) **12B**, 38-40, (1950).
- [19] Fan, K., "Fixed-point and Minimax Theorems in Locally Convex Topological Linear Spaces" *Proc. Nat. Acad. Sc., U. S. A.*, **38**, 121-126, (1952).
- [20] Filippov, A. F., "Differential Equations with Discontinuous Right Hand Side", *Transl. Amer. Math. Soc.*, **42**, 199-232, (1964).
- [21] ———, *Differential Equations with Discontinuous Righthand Side*, (Kluwer, Dordrecht) 1988.

- [22] Henry, C., "Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side for Planning Procedure", *J. Economic Theory*, **4**, 545-551, (1972).
- [23] Heinz, H-P., "On the Behavior of Measure of Noncompactness with Respect to Differentiation and Integration of Vector-valued Functions", *Nonlinear Anal.*, **12**, 1351-1371 (1983).
- [24] Ioffe, A. D., "On Lower Semicontinuity of Integral Functionals I"; *SIAM J. Control*, **15**, 521-538, (1977).
- [25] ———, "Single-valued Representation of Set-valued Mappings II ; Application to Differential Inclusions", *SIAM J. Control*, **21**, 641-651, (1983).
- [26] Kato, T., "Nonlinear Semigroups and Evolution Equations", *J. Math. Soc. Japan*, **19**, 508-520 (1967).
- [27] ———, "Accretive Operators and Nonlinear Evolution Equations in Banach Spaces", *Nonlinear Functional Analysis*, Proc. Symp. Pure Math., **18**, Part I, (Amer. Math. Soc.), 1970.
- [28] Lasota, A., and J. A. York, "A Generic Property of Existence of Solutions of Differential Equations in Banach Space", *J. Diff. Equations*, **13**, 1-12, (1973).
- [29] Martin Jr., R., *Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces*, (Wiley, New York), 1976.
- [30] Maruyama, T., "On a Multi-valued Differential Equation: An Existence Theorem", *Proc. Japan Acad.*, **60A**, 161-164, (1984).
- [31] ———, "Variational Problems Governed by a Multi-valued Differential Equation", *Proc. Japan Acad.*, **60A**, 212-214, (1984).
- [32] ———, 『均衡分析の数理』(日本経済新聞社, 東京) 1985.
- [33] ———, "Variational Problem Governed by a Multi-Valued Evolution Equation", V. Lakshmikantham ed., *Trends in the Theory and Practice of Non-linear Analysis*, (North-Holland, Amsterdam) 1985.
- [34] ———, "Lower Semi-continuity Theorems for Nonlinear Integral Functionals on Spaces of Bochner-integrable functions", preprint (1989).
- [35] ———, "A Variational Problem Governed by a Multi-valued Differential Equation in a Separable Hilbert Space", S. Elaydi ed., *Differential Equations—Stability and Control*, (Marcel Dekker, New York) 1990.
- [36] ———, "Weak Convergence Theorem in Sobolev Spaces with Application to Filippov's Evolution Equations", *Proc. Japan Acad.*, **66A**, 217-221, (1990).
- [37] ———, 「無限次元空間における絶対連続函数の収束」『三田学会雑誌』82巻 特別号 I, 89-104, (1990).
- [38] 宮寺功, 『非線形半群』(紀伊國屋書店, 東京) 1977.
- [39] 二階堂副包, 「探索過程と非負条件」, 森嶋通夫他編『新しい経済分析』(大阪大学社会経済研究室, 大阪) 1960.
- [40] Nikaido, H. and H. Uzawa, "Stability and Non-negativity in a Walrasian Tâtonnement Process", *International Eco. Rev.* **1**, 50-59, (1960).
- [41] Papageorgiou, N. S., "On Bounded Solutions of Differential Inclusions in Banach Spaces", *J. Math. Anal. Appl.*, **135**, 654-663, (1988).
- [42] Schwartz, L., *Functional Analysis*, (Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York) 1964.
- [43] Tolstonogov, A. A., "On the Structure of the Solution Set for Differential Inclusions in a Banach

- Space”, *Math. USSR Sbornik*, **46**, 1-15 (1983).
- [44] Valadier, M., “Convex Integrands on Souslin Locally Convex Spaces”, *Pacific J. Math.*, **59**, 267-276, (1975).
- [45] Yorke, J. A., “A Continuous Differential Equation in Hilbert Space without Existence”, *Funkcialaj Ekvacioj*, **13**, 19-21, (1970).
- [46] Yosida, K., *Functional Analysis*, 3rd. ed., (Springer, Berlin), 1971.

〔付記〕 この論文を含む一連の研究の過程で、伊藤清・加藤敏夫両教授から多くのご教示を賜った。また野村投資信託記念資金および財清明會からは資金面のご助力をいただいた。特に記して謝意を表す。

(経済学部教授)