Title	短・長期の消費関数
Sub Title	Consumption function in the short run and in the long run
Author	大山, 道広
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1991
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.84, No.特別号-I (1991. 9) ,p.13- 23
JaLC DOI	10.14991/001.19910901-0013
Abstract	
Notes	富田重夫教授退任記念論文集
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19910901-0013

「三田学会雑誌」84巻特別号－I（1991年9月）

短・長期の消費関数

大山道広

1. はじめに

周知のように，消費関数論争は短期のケインズ型消費関数と長期のクズネッツ型消費関数をいかに斉合的に説明するかをめぐるものであった。Modigliani=Brumberg (1954) のライフ・サイクル仮説や Friedman (1957) の恒常所得仮説などの「古典」的な仮説では，消費者の効用最大化行動に基づいて導出された消費関数が所得や資産額に関する仮定を適当に変更することによってケインズ型ともクズネッツ型とも解釈できるとした。しかし，そこでの短・長期の区別は動学的に十分に明確にされているとはいえない。

消費者の効用最大化行動を前提とするとき，資産額が所与とされる状態を短期とし，それが時間の経過と共に調整され尽した定常状態を長期とするのが，最も自然な区別であるように思われる。しかし，消費者が将来の消費から得られる効用を一定率で割引くとする通常の設定の下では，利子率が所与の割引率に等しく与えられる場合を除けば，定常状態は達成できない。Uzawa (1968) は将来の効用の瞬時的な割引率がその時点の効用水準の増加関数であるという仮定によって定常均衡の存在を保証し，短・長期の消費関数を上記の意味で明快に区別して論じている。しかし，この仮定は直観的に必ずしも自明ではなく，一般的妥当性をもつものではないように思われる。また，そこで導出されている長期（定常均衡）の消費は，賃金所得の水準からまったく独立に利子率のみに依存して決まる。この帰結も必ずしも「現実的」ではない。

本稿の目的は，消費者の目的関数に関する仮定を修正することにより，新しい長・短期の消費関数を導出することである。第1に，計画時点で評価した将来時点の消費の効用は両時点間の時間的へだたりの一般的な減少関数であるものとする。これは消費者の時間選好を表現する緩やかな仮定であるが，任意に与えられた利子率の下で同一の消費パターンが維持される定常均衡の存在を許すものである。第2に，将来時点の消費の効用はまたその時点の労働所得にも依存するものとする。これは消費者が自らの消費を労働所得とのバランスで評価するという心理を表わしている。この仮定によって，定常均衡における消費は利子率だけでなく，労働所得にも依存することになる。(1)

注（1） 所得依存型効用関数の概念はクズネッツ型消費関数を導出するために必要とされる。このことは Ohyama (1990)，付録で最初に論じられた。

以下，第2節では消費者の最適化行動のモデルを構成し，定常均衡における平均消費性向が利子率と労働所得の（期待）成長率の関数となることを示す。この関係はクズネッツ型の長期消費関数を根拠づけるものと解釈できる。第3節では，定常均衡へ向う調整過程について考察し，その上では平均消費性向が利子率，労働所得だけでなく，消費者の資産／所得比率の関数となることを明らかにする。これはケインズ型の短期消費関数に対応するものである。最後に第4節では，消費者が労働所得，利子率，さらには労働所得の成長率などのパラメターの変化に対して短・長期にどのように反応するかについて検討する。

2. 長期消費関数

t 期から無限に遠い将来まで見通して最適な計画を立てる消費者を考えよう。s 期の消費を C_s，労働所得を Y_s，労働所得の予想成長率を λ（一定），運用可能な資産の予想利子率を r（一定），資産額を A_s とする。この消費者が

$$\dot{A}_s = Y_s + rA_s - C_s \qquad (1)$$

という制約の下に

$$\int^{\infty} u(C_s,\ Y_s,\ s-t)ds \qquad (2)$$

を最大にするように行動するものとしよう[2]。但し，$\dot{A}_s$ は資産額の時間に関する微分である（以下，ドット（・）を同様に用いる)。時点 s の効用関数 $u(\cdot)$ は連続微分可能，C_s, Y_s に関して強く凸で，しかも k 次同次（$k>0$）であるものとしよう。$u(\cdot)$ が C_s だけでなく，Y_s に依存するという仮定は新奇なものである。これは，消費者が所得から直接満足を引き出しているというよりは，消費によって得る満足の度合いが所得水準によって変るという消費者心理を表していると解釈したい。つまり，一定の消費から得られる効用はそれが所得水準に対して相応と感じられるが不相応と感じられるかで異なるということである。その意味で，所得はいわばシフト・パラメーターとして効用関数に影響するのである。ここではまた，時点 s の効用関数が時間 t からの経過時間 $s-t$ に依存するものとしている。これは消費者の時間選好を一般的に表現するものである。

$u(\cdot)$ が C_s, Y_s の k 次同次関数であり，Y_s が一定率 λ で増加すると予想されることから，(1) の制約の下に (2) を最大化するという問題は

$$\dot{\alpha}_s = 1 - \gamma_s + (r-\lambda)\alpha_s \qquad (1')$$

の制約の下に

$$Y_t\int_t^{\infty} v(\gamma_s,\ s-t)e^{\lambda k(s-t)}ds \qquad (2')$$

を最大化するという問題に変換される。但し，$\alpha_s(=A_s/Y_s)$ は資産／所得比率，$\gamma_s(=C_s/Y_s)$ は労

注（2） 単純化のため，物価水準は一定に保たれるものと仮定する。

働所得からの平均消費性向（以下，誤解の余地がない限り単に消費性向という），また新たに導入された関数 $v(\gamma_s, s-t)$ は

$$v(\gamma_s, s-t)=u(\gamma_s, 1, s-t) \tag{3}$$

によって定義される。限界効用が正で逓減する $(\partial u/\partial C_s>0, \partial^2 u/\partial C_s^2<0)$ という仮定から，$v(\cdot)$ は

$$v_1(=\partial v/\partial\gamma_s)>0, \quad v_{11}(=\partial v^2/\partial\gamma_s^2)<0 \tag{4}$$

という性質があることに注意しよう。また，消費の限界効用が時間の経過とともに逓減するという意味で消費者が時間選好的であるものとし，

$$v_{12}(\equiv\partial^2 v/\partial\gamma_s\partial(s-t))<0 \tag{5}$$

と仮定しよう。

(1′) を (2′) に代入すると，消費者の問題は結局 Y_t, r, λ を所与として

$$Y_t\int_t^\infty v(1-\dot{\alpha}+(r-\lambda)\alpha_s)ds \tag{6}$$

を最大化するという変分法の問題に帰着する。この最大化のための必要条件（オイラー方程式）のうち，$s=t$ に対応するものは

$$v_{11}(\gamma_t, 0)\dot{\gamma}_s=-v_{12}(\gamma_t, 0)-[r-(1-k)\lambda]v_1(\gamma_t, 0) \tag{7}$$

と求められる。(1′), (7) において，$\alpha_s=\alpha_t$, $\gamma_s=\gamma_t$ とおくと，α_t, γ_t の変動を表す動学方程式

$$\dot{\alpha}_t=1-\gamma_t+(r-\lambda)\alpha_t \tag{8}$$

$$v_{11}(\gamma_t, 0)\dot{\gamma}_t=-v_{12}(\gamma_t, 0)-[r-(1-k)\lambda]v_1(\gamma_t, 0) \tag{9}$$

が得られる。この体系の定常均衡は資産／所得比率 α_t，消費性向 γ_t がともに一定に保たれる状態，すなわち $\dot{\alpha}_t=\dot{\gamma}_t=0$ となる状態である。α_t, γ_t の定常均衡値を α^*, γ^* とすれば，それらは

$$(r-\lambda)\alpha^*=\gamma^*-1 \tag{10}$$

$$[r-(1-k)\lambda]v_1(\gamma_t^*, 0)=-v_{12}(\gamma_t^*, 0) \tag{11}$$

を満たす。換言すれば，(10), (11) は α^*, γ^* と決定するといえる。(4), (5), (9) から定常均衡が存在するためには

$$r>(1-k)\lambda \tag{12}$$

でなければならない。また，(10), (11) から $r=\lambda$ の場合には定常均衡は一般に存在しない。定常均衡が一義的に存在する場合，α^*, γ^* はそれぞれ r, λ の関数となり

$$\alpha^*=\alpha^*(r, \lambda) \tag{13}$$

$$\gamma^*=\gamma^*(r, \lambda) \tag{14}$$

と書くことができる。α^*, γ^* の定義から，これらは

$$\alpha_t=\alpha^*(r, \lambda)Y_t \tag{15}$$

$$C_t=\gamma^*(r, \lambda)Y_t \tag{16}$$

と書くことができる。これらのうち，(16) は r, λ が所与であれば消費は長期的には労働所得に比

例するという関係を示している。ところで，t 時点における利子所得を含む総所得を Z_t とすれば，それは

$$Z_t = Y_t + rA_s \tag{17}$$

と定義される。定常均衡における総所得からの平均消費性向は，(16)，(17) から

$$C_t = (1 - r\alpha^*)\gamma^* Z_t \tag{18}$$

という関係が導かれる。すなわち，r, λ が不変であれば，消費は長期的に総所得に比例するということである。これはクズネッツ型の長期の消費関数を表しているといえる。(3)

消費者にとって所与とされる r, λ の変化が α^*, γ^* に及ぼす影響を調べよう。まず (11) を微分することにより

$$\frac{\partial\gamma^*}{\partial r} = -\frac{v_1}{[r-(1-k)\lambda]v_{11}} > 0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial\gamma^*}{\partial\lambda} = \frac{(1-k)v_1}{[r-(1-k)\lambda]v_{11}} \tag{20}$$

を得る。労働所得からの平均消費性向は長期的には利子率の増加関数であるといえる。それが，労働所得の予想増加率にいかに依存しているかは，k が 1 より小か大かによって正反対になる。γ^* は $k<1$ の場合には λ の減少関数，$k>1$ の場合には λ の増加関数となる。また $\lambda=k$ の場合には，γ^* は λ からまったく独立となる。次に (10) を微分することにより

$$(r-\lambda)\frac{\partial\alpha^*}{\partial r} = \frac{\partial\gamma^*}{\partial r} = \alpha^* \tag{21}$$

$$(r-\lambda)\frac{\partial\alpha^*}{\partial\lambda} = \frac{\partial\gamma^*}{\partial\lambda} + \alpha^* \tag{22}$$

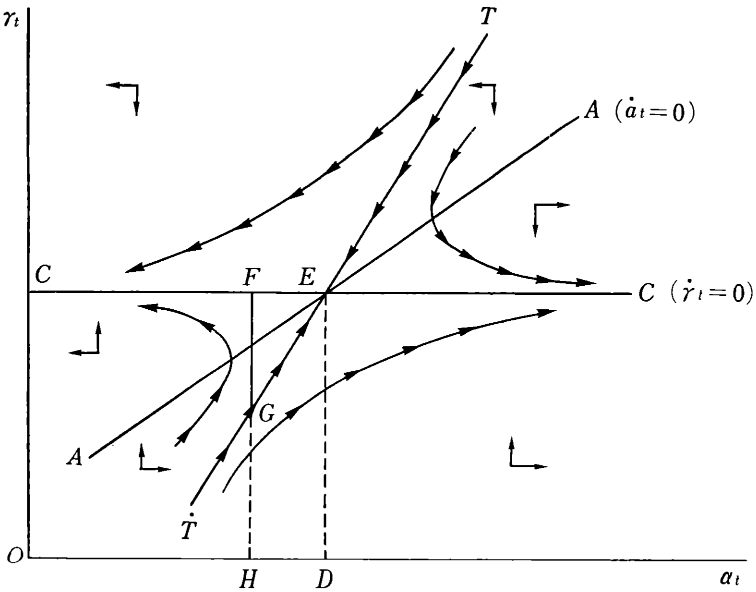
を得る。$\alpha^*>0$ の場合，α^* が n にいかに依存しているかは確定しない。$\alpha^*<0$ の場合，$r>\lambda$ ならば，α^* は n の増加関数となり $r<\lambda$ ならば α^* は r の減少関数となる。α^* の λ に対する依存関数は k の値によって異なるので，いっそう複雑だが，同様に整理することができる。

3. 短期消費関数

前節では，効用最大化を目指す消費者行動の定常均衡を考え，そこで成立する消費と所得の関係がクズネッツ型の長期の消費関数を表すものと解釈した。それでは，現在のモデルでケインズ型の短期の消費関数の関係を見出すことができるであろうか。これが本節の問題である。この問題に答えるためには消費計画の動学的な調整過程を検討し，そこで消費と所得がいかに連動しているかを明らかにしなければならない。

注 (3)　$r^*>\lambda$, $\alpha^*>0$ の場合，(10) から $\gamma^*>1$ となる。しかし，この場合でも (18) の消費関数の総所得にかかる係数は 1 よりも小さくなる可能性があり，クズネッツ型消費関数と矛盾しない。

図 1　定常均衡と調整経路（$r>\lambda$）



動学方程式体系（8），（9）の性質を調べよう。そのヤコービ行列の成分は，定常均衡の近傍において

$$\frac{\partial\dot{\alpha}_t}{\partial\alpha_t}=r-\lambda \tag{23}$$

$$\frac{\partial\dot{\alpha}_t}{\partial\gamma_t}=-1 \tag{24}$$

$$\frac{\partial\dot{\gamma}_t}{\partial\alpha_t}=0 \tag{25}$$

$$\frac{\partial\dot{\gamma}_t}{\partial\gamma_t}=-[r-(1-k)\lambda]-\frac{v_{121}}{v_{11}} \tag{26}$$

と計算される。但し，$v_{121}=\partial v_{12}/\partial\gamma_t$ である。この項の符号は明確でないので，以下では $v_{121}=0$ と仮定しよう。

図 1 は $r>\lambda$ の場合のフェーズ・ダイアグラムである。曲線 AA は $\dot{\alpha}_t=0$ に対応する α_t, γ_t の組合せの軌跡，水平線 CC は $\dot{\gamma}=0$ に対応するそれである。いうまでもなく，定常均衡は AA と CC との交点 E によって示される。この場合，均衡は鞍点（saddle-point）となる。時点 t で，資産／所得比率 α_t は歴史的与件であるが，平均消費性向 γ_t は消費者が決定できる変数と考えられる。資産／所得比率 α_0 が与えられたとき，平均消費性向の初期値 γ_0 が TT 線上で α_0 に対応する水準に決定されるならば，α_t, γ_t は，それ以降 TT 線に沿って均衡に近づいていく。しかし，γ_0 がそれ以外の水準に決められるならば，α_t, γ_t は短期的にはともかく，長期的には均衡から遠ざかっていく。

消費者がこうした調整過程の構造を自覚し，定常均衡に向って進むことを望むならば，TT 線上に乗るように γ_0 を選ぶであろう。ここでは，消費者がそのように行動するものと仮定しよう。[4] フェーズ・ダイアグラムの作図から明らかなように，TT 線は右上りでなければならず，したがって TT 線上では γ_t は α_t の増加関数であり，

$$\gamma_t=\gamma(\alpha_t\,;\ r,\ \lambda) \tag{27}$$

と書くことができよう。これは

$$C_t=\gamma(\alpha_t\,;\ r,\ \lambda)Y_t \tag{28}$$

と書いてもよい。この関係はケインズ型の消費関数を表わしていると見ることができる。$\gamma(\cdot)$ は明らかに α_t の増加関数である。消費者の資産額 A_t が所与と見なされるような短期において Y_t が増加すれば，$\alpha_t(=A_t/Y_t)$ は減少する。したがって，C_t は Y_t の増加関数であるとしても，Y_t に比例的に変化するわけではない。(28) を Y_t に関して微分することにより

$$\frac{Y_t}{C_t}\cdot\frac{\partial C_t}{\partial Y_t}=1-\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha_t}\cdot\frac{\alpha_t}{\gamma} \tag{29}$$

という関係が得られる。これより，C_t の Y_t に関する弾力性は1よりも小さいことがわかる。いうまでもなく，これはケインズ型消費関数の特徴である。(27) はまたケインズ型消費関数では無視された資産効果も取り入れている。すなわち，所得 Y_t が一定のとき，資産額 A_t の増減は消費の増減をひき起す。特に，実質所得が一定のとき，物価の上昇は Y_t の増加を通じて α_t の減少，ひいては実質消費の減少をもたらす。これはピグウ効果にほかならない。[5]

$r<\lambda$ のケースも同様に分析することができる。図2に示したように，AA 線はこのケースでは右下りになる。動学方程式体系 (8)，(9) のヤコービ行列のトレースは負，行列式は正となり，均衡は局所的に安定である。つまり，均衡の近傍のどの点から出発しても，α_t, γ_t は時間の経過とともに均衡Eに近づいていく。しかし，ここでも $r>\lambda$ のケースと同様に均衡に向う右上りの調整経路 TT が存在する。消費者が任意の α_0 に対して TT 線上でこれに対応する γ_0 を選択すれば，その後の動学的調整は TT 線に沿って「効率的に」進められる。この場合，短期の消費関数は $r>\lambda$ のケースと同様な性質をもつことになる。

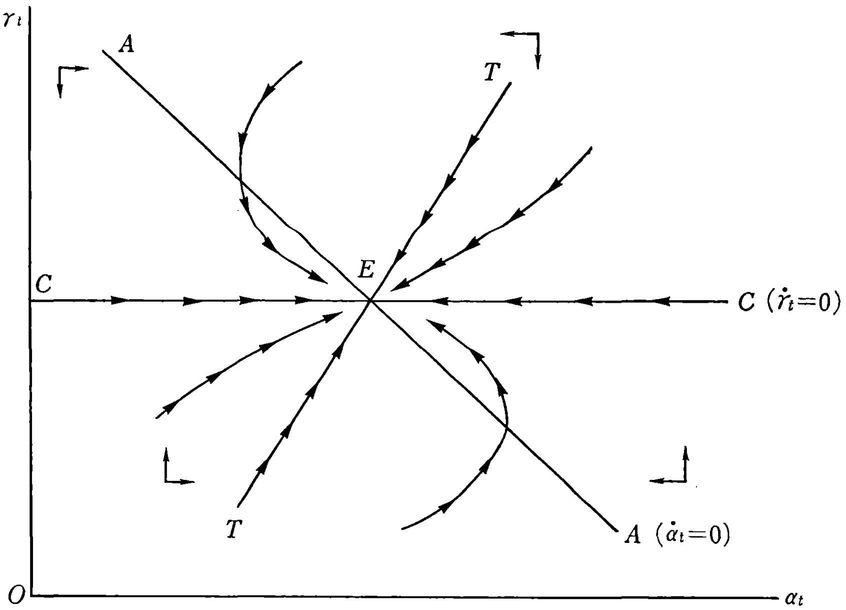
ところで，$r<\lambda$ のケースでは CC 線もまた安定的な調整経路となることに注意しよう。消費者が TT 線と CC 線のどちらを選ぶかは一般に明確ではない。しかし，最も自然な選択の基準は均衡への収束速度であろう。(8)，(9) の線形近似体系の解を調べてみると，

$$\lambda>\frac{2}{2-k}r \tag{30}$$

注（4） 消費者がこのように行動するという理論的根拠は十分明らかにされているとはいえない。しかし，α_t が時間と共に際限なく大きくなったり，際限なく小さくなるようなことはこの仮定によって排除される。これは完全予見に関する Sargent=Wallace (1973) の解釈と本質的に同じことである。

（5） これまで物価は一定としてきたので，C_t, Y_t などは名目値数であると同時に実質値でもあった。時点 t における物価の1回限りの上昇は A_t には影響しないが，Y_t の同率の上昇をもたらすと考えることができる。

図 2　定常均衡と調整過程（$r<\lambda$）



のときには CC 線上の調整速度は TT 線上のそれよりも大きくなる（付録参照）。他方，定常均衡が存在するためには，(12) より $\lambda<r/(1-k)$ でなければならない。したがって，$k<1$ の場合には (30) が成立する可能性がある。(30) が成立し，消費者が CC 線上での調整を選択するような場合には，長・短期の消費関数の区別は消滅する。

4.　比較動学分析——短・長期の接合——

これまで，消費者の最適化行動を前提として長・短期の消費関数がどのように導出されるか，またそれらはどのような性質をもっているかについて考察してきた。本節では，もう一歩進めて消費行動の動学的性質，すなわち消費行動が外生的に所与とされている変数の変化に対して短・長期にどのように反応するかを解明しよう。これは一般に「比較動学」(comparative dynamics) と呼ばれる分析手法であるが，ここでは短・長期の消費関数を関連づけ，接合する役割を果す。

とりあえず，$r>\lambda$ のケースについて考えよう。労働所得の一回限りの増加の効果は図 1 によって例解することができる。当初の均衡が E 点にあったとしよう。労働所得が増加すると，資産／所得比率は CE からたとえば CF に一時的に低下する。それに伴って，平均消費性向は HF から HG に急激に低下する。いうまでもなく，これは貯蓄性向の上昇を意味している。その結果，資産／所得比率は時間の経過とともに上昇し，γ_t，α_t は TT 線上に沿って徐々に当初の均衡水準に回帰していく。短期消費関数はこの γ_t と α_t との共変関係を表わしている。これに対して，長期消費関

図 3　利子率上昇の効果（$r>\lambda$）

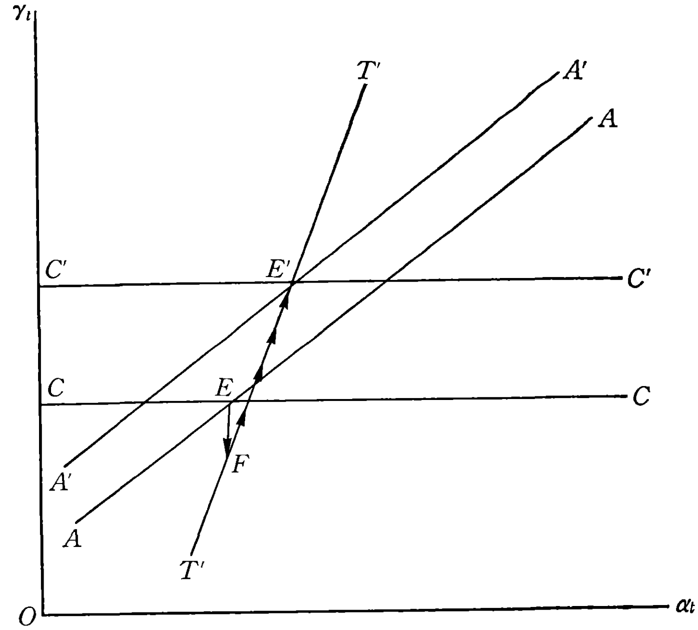
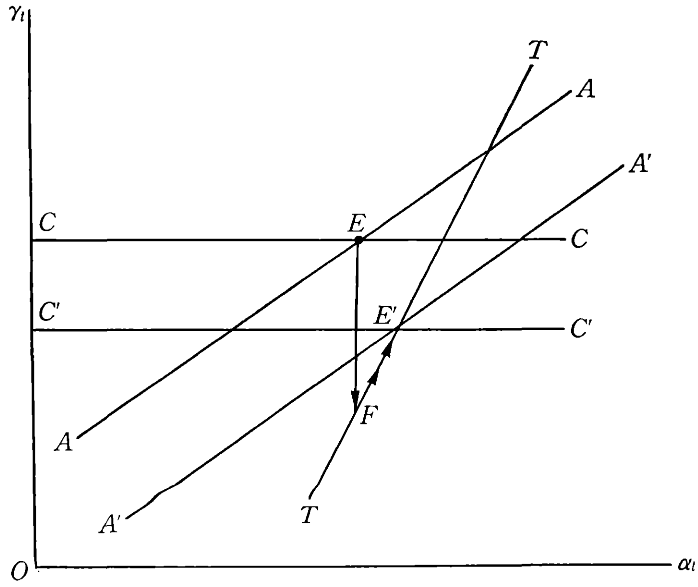


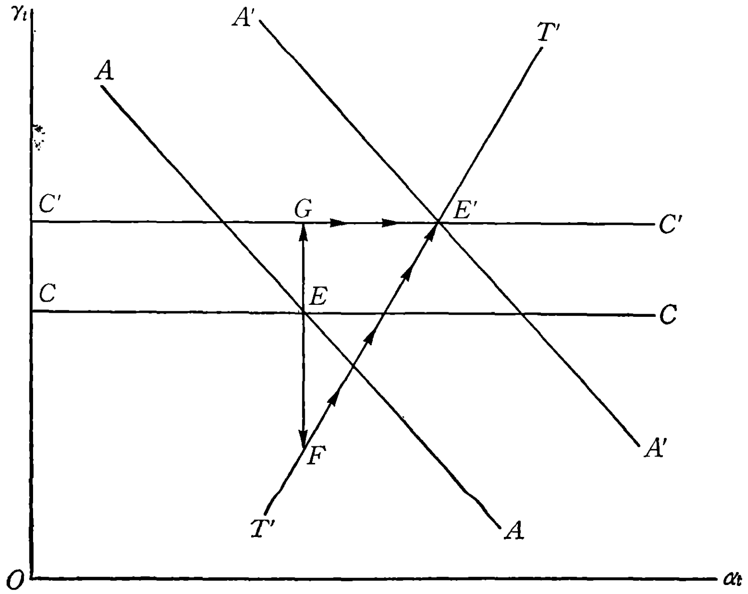
図 4　成長率上昇の効果（$r>\lambda$）



数は γ_t の定常均衡値として与えられる。

ところで，短期消費関数は所得や資産／所得比率だけでなく，利子率や所得の予想成長率にも依

図 5　利子率上昇の効果（$r<\lambda$）



存している。図3は利子率の上昇に対する消費の動学的反応を例示したものである。当初の均衡がEにあったとしよう。利子率が上昇すると，AA 線，CC 線は，上方にシフトし，新しい均衡はE'に移る。E から E' への動学的調整経路は矢印によって示されている。利子率が上昇すると同時にE点からF点へのジャンプが生じ，その後 α_t，γ_t は E' に向う軌道 $T'T'$ に沿って徐々に上昇していく。この場合，平均消費性向は初期に急激に低下するが，すぐ上昇に転じ，長期的には以前の水準を上回るようになる。資産／所得比率は一貫して徐々に上昇する。しかし，この図に示されている帰結は必然的なものではない。すでに指摘したように，資産／所得比率は長期的に低下する可能性もある。そのような場合には，平均消費性向は初期に急激に上昇した後，時間の経過とともに低下する。

図4には，所得の予想成長率の上昇の効果が例示されている。第2節で見たように，その長期的な効果は一義的ではない。ここでは，$k<1$ のケースが描かれている。この場合，CC 線は下方にシフトし，平均消費性向は長期的に低下する。また，AA 線は k の値がどうであれ下方にシフトする。新しい均衡は $A'A'$ と $C'C'$ との交点 E' によって示されている。ここでは，資産／所得比率は長期的に上昇するケースが描かれているが，その必然性はない。所得の成長率が上昇すると同時に平均消費性向は急激に低下する。その後，反転上昇するが，当初の水準までは戻らない。$k \geqq 1$ の場合，平均消費性向は短期的には低下するが，長期的には当初の水準に戻るか，それを抜いてさらに上昇する。

以上，$r>\lambda$ のケースについて詳しく考察したが，$r<\lambda$ のケースの比較動学の例として，利子率

上昇の効果を見ておくことにしよう。図5において，当初の均衡は AA 線と CC 線の交点 E で示されている。利子率の上昇は AA 線，CC 線の上方シフトをもたらす。新しい均衡 E' において，平均消費性向，資本／所得比率はともに上昇している（しかし，資産／所得比率は低下する可能性もある)。新しい均衡への調整は $T'T'$ 線に沿って進められる場合と $C'C'$ 線に沿って進められる場合がある。前者の場合，利子率の上昇と同時に平均消費性向はいったん急激に下落し，その後徐々に上昇していく。α_t, γ_t の調整経路は $E \to F \to E'$ の矢印によって示される。これに対して，後者の場合には，平均消費性向は一挙に新しい均衡水準に上昇し，その後は変化しない。調整経路は $E \to G \to E'$ のようになる。所得の予想成長率の上昇に伴う動学的調整もまったく同様に考えることができるが，省略する。

付録　動学方程式 (8), (9) の解

動学方程式 (8), (9) の線形近似体系の一般解は，α_t, γ_t の初期値を α_0, γ_0, その均衡値を α^*, γ^* として

$$\alpha_t=\alpha^*+\left[\alpha_t-\alpha^*-\frac{\gamma_0-\gamma^*}{2(r-\lambda)+k\lambda}\right]e^{(r-\lambda)t} \tag{A1}$$

$$+\frac{\gamma_0-\gamma^*}{2(r-\lambda)+k\lambda}e^{-[r-(1-k)\lambda]t}$$

$$\gamma_t=\gamma^*+(\gamma_0-\gamma^*)e^{-[r-(1-k)\lambda]t} \tag{A2}$$

と表される（但し，$v_{121}=0$ とする)。図2の CC 線の式は，$\gamma_0=\gamma^*$ とおくことにより

$$\alpha_t=\alpha^*(\alpha_0-\alpha^*)e^{-(\lambda-n)t} \tag{A3}$$

$$\gamma_t=\gamma^* \tag{A4}$$

という関係にまる。また，TT 線の式は，特殊解

$$\alpha_t=\alpha^*+\frac{\gamma_0-\gamma^*}{2(r-\lambda)+k\lambda}e^{-[r-(1-k)\lambda]t} \tag{A5}$$

$$\gamma_t=\gamma^*+(\gamma_0-\gamma^*)e^{-[r-(1-k)\lambda]t} \tag{A6}$$

によって規定される α_t, γ_t の関係として

$$\gamma_t=[2(r-\lambda)+k\lambda]\alpha_t+\gamma^*-[2(r-\lambda)+k\lambda]\alpha^* \tag{A7}$$

と求められる。CC 線に沿っての α_t の調整速度が TT 線に沿ってのそれよりも大きくなるための条件は (A3), (A6) を比較することにより

$$\lambda>\frac{2}{2-k}r \tag{A8}$$

と求められる。

引用文献

Friedman, M., 1957, *A Theory of Consumption Function*, Princeton: Princeton Univ. Press.

Modigliani, F. and R. Brumberg, 1954, "Utility Analysis and the Consumption Function: An Interpretation of Cross-Section Data," in K. Kurihara ed. *Post. Keynsian Economics.* New Brunswick: Rutgers Univ. Press.

Ohyama, M., 1990, "Economic Growth and the Balance of Payments," *Journal of the Japanese and International Economies,* Vol. 4, 272-308.

Sargent, T. and N. Wallace, 1973, "The Stability of Models of Money and Growth with Perfect Foresight," *Econometrica,* Vol. 41, 1043-1048.

Uzawa, H., 1968, "Time Preference, the Consumption Function, and Optimum Asset Holdings", in J. N. Wolfe ed., *Value, Capital and Growth: Papers in Honour of Sir John Hicks.* Chicago: Aldine.

（経済学部教授）