

Title	多価写像に対するペロン-フロベニウスの定理
Sub Title	Perron-Frobenius theorem for set-valued mappings
Author	立石, 寛
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1991
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.84, No.1 (1991. 4) ,p.151- 164
JaLC DOI	10.14991/001.19910401-0151
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19910401-0151

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

多価写像に対するペロン-フロベニウスの定理*

立 石 寛

序

非負行列の固有値に関するペロン-フロベニウスの定理は、経済理論上においても、線形モデルなどにおいて重要な解釈を許し、その重要性から、種々の拡張がなされている。その代表的な例は、非線形関数への拡張、無限次元空間で定義される正線形作用素への拡張、そして多価写像への拡張などが挙げられる。本稿では、そのなかで多価写像へ拡張する試みについて考察を加えたい。

この方向への拡張、すなわち、多価写像版のペロン-フロベニウスの定理に関する研究は、主に経済成長理論におけるいわゆるフォン・ノイマン過程の研究に動機づけられ、その研究がはじまったのである。そこでまず、フォン・ノイマン過程について説明しよう。von Neumann [9] において、彼は以下のような問題を考察した。いま、社会全体で財の数は m 個、プロセスの数は n 個存在するような経済を考える。 A 、 B を $m \times n$ の非負行列とする。ここで、 A の各成分 a_{ij} ($i=1, 2, \dots, m$, $j=1, 2, \dots, n$) は、第 j プロセスを一単位操業するにあたって投入される第 i 財の量を表し、 B の各成分 b_{ij} ($i=1, 2, \dots, m$, $j=1, 2, \dots, n$) は、第 j プロセスを一単位操業することによって産出される第 i 財の量を表す。そして $x(t)$ を、第 t 期における各プロセスの操業水準を表す n 次元ベクトルとするのである。このとき、フォン・ノイマン過程とは、

$$\begin{array}{c} Ax(t) \longrightarrow Bx(t) \\ \downarrow \\ Ax(t+1) \longrightarrow Bx(t+1) \\ \downarrow \\ Ax(t+2) \longrightarrow Bx(t+2) \\ \downarrow \\ \dots \end{array}$$

のような運行形態をもつ過程である。ここで、横の関係は各期における投入産出関係を表し、縦の関係は前期の産出物を今期に投入するという関係を表している。そして彼は、この過程の斉一均衡

* 本稿の作成にあたり、川又邦雄教授、小宮英敏助教授、澤島侑子教授、高橋渉助教授、津野義道教授、および藤本喬雄教授から有益なコメントをいただいた。ここに記して感謝の意を表したい。

成長経路として、次の連立不等式の非負解 δ, r, x, p の存在を証明したのである。

$$\delta Ax \leq Bx$$

$$rA'p \geq B'p$$

$$\delta \langle p, Ax \rangle = \langle p, Bx \rangle$$

$$r \langle x, A'p \rangle = \langle x, B'p \rangle$$

ここで δ は成長要因, r は利子要因, x は斉一均衡成長経路においてその各成分の比率が一定となる各プロセスの操業水準, p は各財の価格のベクトルを表し, 第一式はこの成長経路における各期の需給均衡式, 第二式は各プロセスの利潤率が利子率を越えないという条件, 第三式は自由財の水準, 第四式は負の利潤をあげるプロセスは操業されないという条件をそれぞれ表している。

さて Rockafellar [7] は, この問題を次のような形でとらえる。いま, G を次のような多価写像としよう。

$$G(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : \exists z \in \mathbb{R}^n, x = Az, y = Bz\}.$$

(ここで, A, B は前と同様に $m \times n$ の非負行列を表すものとする。) すると, この G のグラフが凸錐となることは明らかであろう。そこでより一般に, $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を, そのグラフが凸錐となる多価写像とし (このような写像を凸過程 convex process という), その経済において達成可能な投入産出関係を表すものとする。すると

$$y(t) \in G(x(t-1))$$

$$y(t) \geq x(t)$$

として表される過程 $(x(t-1), y(t))_{t=1}^{\infty}$ の最大斉一均衡成長経路は, フォン・ノイマン経路と呼ばれ, ターンパイクの定理をはじめとして多くの重要な性質をもつことが知られているが, このような経路に関する研究は

$$\lambda x \in G(x)$$

という条件を満たす $\lambda \geq 0$ と $x \geq 0$ (この条件を満たす λ と x が存在するとき, λ を G の固有値, eigenvalue, x を G の固有ベクトル eigenvector という) に関する研究に帰着されることが容易に確かめられるのである。

また解析学上, 凸過程には線形作用素のもつ多くの性質を共有することが知られている。よってペロン-フロベニウスの定理を, このような多価写像を含む写像に拡張することは, 凸過程の理論の体系を閉じるためにも研究すべき題材である。

本稿では以上の設定をさらに拡張し, 一価関数 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を導入し, 多価写像 $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ に関して次のような条件を満たす $\lambda \geq 0, x \geq 0$ について考えることにする。

$$\lambda f(x) \in G(x) - \mathbb{R}^m$$

このような定式化は Aubin [1] によってなされたものであるが, こうすると, f を恒等写像, G を凸過程と考えると, ロッカフェラーの扱った問題となり, f と G がそれぞれフォン・ノイマン過程における行列 A, B で, x が各プロセスの操業水準に対応するものと考えたとフォン・ノイマ

ンの扱った問題となるというように両問題を統一的視点で扱うことができる。

さて、Aubin-Ekeland [3] p.147, Proposition 1 では、Aubin [1] における定理をより一般的な仮定の下で考察しており、その証明も凸集合の分離定理を用いた初等的なものであるが、そこにおいて $0/0$ という形式に関する取り扱いに関して無限定であり、そのためにその証明の過程において簡単には飛び越えがたい溝が生じている。そしてその証明自体が成功しているとはいいがたいと思われるのである。そこで本稿では、彼らの主張する定理が実際に正しいことを厳密なる論証をもって示す。(ただし、仮定は多少変更する。) なお、この問題を研究するにあたって、固有値問題は、ある関数の鞍点の存在問題と同等となることに注意する。実際オーバンは、この問題の解が次の関数 ϕ の鞍点として求まることを主張している。

$$\phi(x, p) = \frac{\langle p, f(x) \rangle}{\sigma(G(x), p)}.$$

本稿では、この固有値問題とある関数の鞍点問題との密接な関連に注目し、ミニマックス定理を用いてその証明を行うことにする。

以下、第 I 節ではこの本稿で使われる記号、および考察される仮定に関して述べ、第 II 節において主要定理を述べる。また第 III 節においては、特に G が一価関数になっている場合に、第 II 節における諸定理から帰結される結果について記す。そして最後に、結語において多価写像の固有値問題を扱った、他の諸論文を展望することにする。

I 記号と仮定

\mathbb{R}^n を n 次元ユークリッド空間とし、 \mathbb{R}_+^n をその非負象限、 Σ^n を n 次元ユークリッド空間における基本単体とする。また任意の $A \subset \mathbb{R}^m$, $p \in \mathbb{R}^m$ にたいして、 $\sigma(A, p)$ を次のように定義する。

$$\sigma(A, p) = \sup \{ \langle p, x \rangle : x \in A \}.$$

ここで、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は通常の内積を表す。

さて、 f, G をそれぞれの次の形式を有する一価写像ならびに多価写像としよう。

$$f : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}_+^m, \quad G : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}_+^m$$

この写像 f および G に関する仮定として次のようなものを考える。ただし、 $f_i (i=1, 2, \dots, n)$ は f の第 i 座標関数を表すこととする。

A1. $\forall i=1, 2, \dots, m, f_i : \Sigma^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$; 擬凸, 下半連続。

A2. i) $\forall x \in \Sigma^n, G(x)$; 非空, コンパクト, 凸.

ii) $\forall p \in \Sigma^m, x \mapsto \sigma(G(x), p)$; 擬凹, 上半連続⁽¹⁾。

注 (1) G のグラフが凸ならば、 σ は x に関して擬凹になる。また、 G がコンパクト値、優半連続ならば、 σ は x に関して上半連続となる。

A 3. $\forall p \in \Sigma^m, \exists x \in \Sigma^n, \sigma(G(x), p) > 0.$

A 4. $\exists \hat{p} \in \Sigma^m, \forall x \in \Sigma^n, \langle \hat{p}, f(x) \rangle > 0.$

注意 以上の仮定は、ほぼ Aubin-Ekeland [3] で研究されているものと同じである。オーバナーランドでは、関数 f_i は負の値をとることを許しているが、それが凸関数であるという、本稿より強い仮定をおいている。また、 σ が x に関して擬凹関数であるという仮定にたいしては、 G のグラフが凸という仮定をおいている。 G に関する仮定をこのように一般化することにより、特に、 G が一価非線形関数の場合にも本稿の結果を直接適用できるようになる。

II 主要定理

定理 1 写像 f および G が A 1 ~ A 4 の仮定を満たしているものとする。このとき、次の i), ii), iii), iv) を満たす $\delta > 0, p^* \in \Sigma^m, x^* \in \Sigma^n$ が存在する。

i) $\delta f(x^*) \in G(x^*) - \mathbb{R}^n.$

ii) $\sigma(G(x), p^*) \leq \delta \langle p^*, f(x) \rangle$ for all $x \in \Sigma^n.$

iii) $\sigma(G(x^*), p^*) = \langle p^*, \delta f(x^*) \rangle.$

iv) $\lambda > 0$ が次の条件を満たすものとする。

$$\exists x \in \Sigma^n, \lambda f(x) \in G(x) - \mathbb{R}^n.$$

このとき、 $\lambda \leq \delta.$

序でも述べたごとく、本稿ではこの定理をミニマックス定理を用いて証明する。そこで、本稿で用いるミニマックス定理をあげておこう。

補題 1 (Sion)⁽²⁾ X, Y はそれぞれ $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$ の非空コンパクト凸部分集合とし、関数 $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ は次の性質を満たすものとする。

i) $\forall y \in Y, x \mapsto f(x, y)$; 擬凸, 下半連続。

ii) $\forall x \in X, y \mapsto f(x, y)$; 擬凹, 上半連続。

このとき、

$$\max_y \min_x f(x, y) = \min_x \max_y f(x, y).$$

注意 (たとえば、後述の A 3' のように) 定理 1 の A 3 を強めて、 σ が常に正数に値をとる関数とすれば、序であげた関数 ϕ に補題 1 をもちいることができ、その鞍点における p, x の値を p^*, x^*

注 (2) 高橋 [10] などを参照せよ。

とし、その鞍点における ϕ の値を δ とすれば、この定理が成り立つことは容易に確かめられる。このような仮定は、Kemeny et. al. [5] において新たに、フォン・ノイマン過程に導入された仮定と相似的である。しかしながら、この仮定の経済学的な意味における強さを鑑みると、弱い仮定、すなわち A3 の下で、定理を示すことにいくばくかの益があるものと信ずる。

定理 1 の証明 以下の証明において、分母が 0 となる分数に関して次の二種類のものを考える。まず、 a/b は次のように定義する。

$$a/b = \begin{cases} a/b \text{ (通常の意味)} & \text{if } b \neq 0 \\ +\infty & \text{if } b = 0. \end{cases}$$

また、 $a/*b$ は次のように定義する。

$$a/*b = \begin{cases} a/b \text{ (通常の意味)} & \text{if } b \neq 0 \\ 0 & \text{if } a = b = 0. \\ +\infty & \text{if } a \neq 0, b = 0. \end{cases}$$

さて、

$$\delta = \inf_{p \in \Sigma^m} \sup_{x \in \Sigma^n} \frac{\sigma(G(x), p)}{\langle p, f(x) \rangle}$$

とおこう。こうすると A3, A4 により、 δ は well-defined で、正の値に定まることが次のようにしてわかる。まず、任意の $p \in \Sigma^m$ にたいして

$$S(p) = \sup_{x \in \Sigma^n} \frac{\sigma(G(x), p)}{\langle p, f(x) \rangle}$$

とおくと、A3 により $S(p)$ は、 $(0, +\infty)$ に値をとる関数となる。さらに、A4 を満たす $\hat{p} \in \Sigma^m$ をとれば、任意の $x \in \Sigma^n$ にたいして

$$T(x) = \frac{\sigma(G(x), \hat{p})}{\langle \hat{p}, f(x) \rangle}$$

と定義される関数 T は、非負の実数に値をとり、また任意の $\alpha \geq 0$ にたいして、集合

$$\begin{aligned} & \{x \in \Sigma^n : T(x) \geq \alpha\} \\ & = \{x \in \Sigma^n : \sigma(G(x), \hat{p}) \geq \alpha \langle \hat{p}, f(x) \rangle\} \end{aligned}$$

は閉であるから、上半連続でもある。よって、この関数 T は最大値をもち、関数 S がプロパーであることがわかる。したがって δ は、非負実数である。そこで最後に、 δ が実際に正の値をとることを確かめることにしよう。いま関数 $U : \Sigma^m \rightarrow (0, +\infty)$ を次のように定義する。

$$U(p) = \sup_{x \in \Sigma^n} \frac{\sigma(G(x), p)_*}{\langle p, f(x) \rangle}.$$

こうして定義された U にたいして明らかに

$$U(p) \leq S(p) \text{ for all } p \in \Sigma^m$$

が成り立っており、 S はプロパーであったから U もプロパーである。また、任意の $\alpha > 0$ にたいして、集合

$$\begin{aligned} & \{p \in \Sigma^m : U(p) \leq \alpha\} \\ & = \{p \in \Sigma^m : \sigma(G(x), p) \leq \alpha \langle p, f(x) \rangle \text{ for all } x \in \Sigma^n\} \\ & = \bigcap_{x \in \Sigma^n} \{p \in \Sigma^m : \sigma(G(x), p) \leq \alpha \langle p, f(x) \rangle\} \end{aligned}$$

は閉であるから、 U は下半連続になっている。以上の考察により、 U はコンパクト集合上のプロパー、下半連続関数であるから最小値をもち、その値は正に定まる。よって関数 S の下限 δ も正の値に定まるのである。

さて、関数 $\phi : \Sigma^m \times \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定めよう。

$$\phi(p, x) = \sigma(G(x), p) - \delta \langle p, f(x) \rangle.$$

すると、この関数 ϕ は、任意の $x \in \Sigma^n$ を固定したとき、 $p \in \Sigma^m$ に関して下半連続、擬凸、任意の $p \in \Sigma^m$ を固定したとき、 $x \in \Sigma^n$ に関して上半連続、擬凹になっていることは明らかであろう。そこで補題1を適用すると、この関数 ϕ には鞍点が存在することになる。それを $(p^*, x^*) \in \Sigma^m \times \Sigma^n$ とする。すると、 $\phi(p^*, x^*) = 0$ が成立する。これを $\phi(p^*, x^*) \geq 0$ と $\phi(p^*, x^*) \leq 0$ の両不等式が成立することをもって示そう。

$\phi(p^*, x^*) \geq 0$ の証明。次の二つの場合に分けて考えよう。

場合 1 任意の $x \in \Sigma^n$ にたいして $\langle p^*, f(x) \rangle > 0$ となる場合。次の関数の \sup が達成される Σ^n の一点を x' とする。

$$x \mapsto \frac{\sigma(G(x), p^*)}{\langle p^*, f(x) \rangle}$$

すると、

$$\begin{aligned} & \phi(p^*, x^*) \\ & = \min_{p \in \Sigma^m} \max_{x \in \Sigma^n} [\sigma(G(x), p) - \delta \langle p, f(x) \rangle] \\ & = \max_{x \in \Sigma^n} [\sigma(G(x), p^*) - \left\{ \inf_{p \in \Sigma^m} \sup_{x \in \Sigma^n} \frac{\sigma(G(x), p)}{\langle p, f(x) \rangle} \right\} \langle p^*, f(x) \rangle] \\ & \geq \max_{x \in \Sigma^n} [\sigma(G(x), p^*) - \left\{ \sup_{x \in \Sigma^n} \frac{\sigma(G(x), p^*)}{\langle p^*, f(x) \rangle} \right\} \langle p^*, f(x) \rangle] \\ & = \max_{x \in \Sigma^n} [\sigma(G(x), p^*) - \left\{ \frac{\sigma(G(x'), p^*)}{\langle p^*, f(x') \rangle} \right\} \langle p^*, f(x) \rangle] \\ & \geq \sigma(G(x'), p^*) - \frac{\sigma(G(x'), p^*)}{\langle p^*, f(x') \rangle} \langle p^*, f(x') \rangle \\ & = 0. \end{aligned}$$

場合 2 適当な $x'' \in \Sigma^n$ をとると、 $\langle p^*, f(x'') \rangle = 0$ とすることができるとき。

$$\phi(p^*, x^*) = \min_{p \in \Sigma^m} \max_{x \in \Sigma^n} [\sigma(G(x), p) - \delta \langle p, f(x) \rangle]$$

$$\begin{aligned}
&= \max_{x \in \Sigma^n} [\sigma(G(x), p^*) - \delta \langle p^*, f(x) \rangle] \\
&\geq \sigma(G(x''), p^*) - \delta \langle p^*, f(x'') \rangle \\
&= \sigma(G(x''), p^*) \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

$\phi(p^*, x^*) \leq 0$ の証明。 U の最小値を達成する Σ^m の一点を p' とし、再び二つの場合において考える。

場合 1 $\langle p', f(x^*) \rangle > 0$ のとき。

$$\begin{aligned}
\phi(p^*, x^*) &= \max_{x \in \Sigma^n} \min_{p \in \Sigma^m} [\sigma(G(x), p) - \delta \langle p, f(x) \rangle] \\
&= \min_{p \in \Sigma^m} [\sigma(G(x^*), p) - \delta \langle p, f(x^*) \rangle] \\
&\leq \min_{p \in \Sigma^m} [\sigma(G(x^*), p) - \left\{ \inf_{p \in \Sigma^m} \sup_{x \in \Sigma^n} \frac{\sigma(G(x), p)}{\langle p, f(x) \rangle} \right\} \langle p, f(x^*) \rangle] \\
&= \min_{p \in \Sigma^m} [\sigma(G(x^*), p) - \left\{ \sup_{x \in \Sigma^n} \frac{\sigma(G(x), p')}{\langle p', f(x) \rangle} \right\} \langle p, f(x^*) \rangle] \\
&\leq \sigma(G(x^*), p') - \left\{ \sup_{x \in \Sigma^n} \frac{\sigma(G(x), p')}{\langle p', f(x) \rangle} \right\} \langle p', f(x^*) \rangle \\
&\leq \sigma(G(x^*), p') - \frac{\sigma(G(x^*), p')}{\langle p', f(x^*) \rangle} \langle p', f(x^*) \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

場合 2 $\langle p', f(x^*) \rangle = 0$ のとき。 U の定義により $\delta(G(x^*), p') = 0$ となるので、

$$\begin{aligned}
\phi(p^*, x^*) &= \max_{x \in \Sigma^n} \min_{p \in \Sigma^m} [\sigma(G(x), p) - \delta \langle p, f(x) \rangle] \\
&= \min_{p \in \Sigma^m} [\sigma(G(x^*), p) - \delta \langle p, f(x^*) \rangle] \\
&\leq \sigma(G(x^*), p') - \delta \langle p', f(x^*) \rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

ϕ の鞍点 (p^*, x^*) および δ が i)~iv) の条件を満たすことを確かめよう。まず, iii) および次の 1), 2) を満たすことが直ちにわかる。

- 1) $\sigma(G(x^*), p) - \delta \langle p, f(x^*) \rangle \geq 0$ for all $p \in \Sigma^m$.
- 2) $\sigma(G(x), p^*) - \delta \langle p^*, f(x) \rangle \leq 0$ for all $x \in \Sigma^n$.

この 2) は、条件 ii) にあたる。そこで次に 1) によって、i) の成立が保証されることを確かめよう。このことをみるためにいま、i) が成り立っていないものとする。すなわち、

$$\delta f(x^*) \notin G(x^*) - \mathbb{R}_+^m.$$

すると、凸集合の分離定理により

$$\sigma(G(x^*) - \mathbb{R}_+^m, q) - \delta \langle q, f(x^*) \rangle < 0$$

となる $q \in \Sigma^m$, $q \neq 0$ が存在するが、“ $-\mathbb{R}_+^m$ ”の項がついているために $q \in \Sigma^m$ としてよく、さら

に次の不等式が成り立つことがわかる。

$$\sigma(G(x^*), q) - \delta \langle q, f(x) \rangle < 0.$$

これは 1) に矛盾であろう。

最後に iv) が成り立つことを示そう。そこである $\lambda > 0$ が次の条件を満たしているものとする。

$$\exists x' \in \Sigma^n, \lambda f(x') \in G(x') - \mathbb{R}^m.$$

するとこの x' にたいして、

$$\sigma(G(x'), p) - \lambda \langle p, f(x') \rangle \geq 0 \text{ for all } p \in \Sigma^m.$$

したがって、すべての $p \in \Sigma^m$ にたいして

$$\lambda \leq \frac{\sigma(G(x'), p)}{\langle p, f(x') \rangle} \leq \sup_{x \in \Sigma^n} \frac{\sigma(G(x), p)}{\langle p, f(x) \rangle}.$$

よって、

$$\lambda \leq \inf_{p \in \Sigma^m} \sup_{x \in \Sigma^n} \frac{\sigma(G(x), p)}{\langle p, f(x) \rangle} = \delta.$$

証 了

さて次に、

$$\delta f(x) \in G(x)$$

となる δ と x が存在するための条件について述べておこう。

$$A 3'. \forall p \in \Sigma^m, \forall x \in \Sigma^n, \exists z \in G(x), \langle p, z \rangle > 0.$$

$$A 4'. \exists p \in \text{int. } \mathbb{R}^m, \forall x \in \Sigma^n, \langle p, f(x) \rangle > 0.$$

$$A 5. m = n, x_i = 0 \implies f_i(x) \leq 0.$$

定理 2 (Aubin-Ekeland [3]) $A 1, 2, 3', 4', 5$ を仮定する。このとき, ii), iii), iv) および次の i') を満たす $\delta > 0, p^* \in \text{int. } \Sigma^m, x^* \in \Sigma^n$ が存在する。

$$i') \delta f(x^*) \in G(x^*).$$

証明 (Aubin-Ekeland [3]) まず定理 1 により, i)~iv) を満たす δ, p^*, x^* が存在する。そしてこの仮定の下では, p^* が厳密に正になることに注意する。これは次のようにして確かめられる。

いま, e^j を n 次元ユークリッド空間の第 j 標準基底とする。このとき $A 5$ により、

$$1) \forall k \neq j \implies f_k(e^j) \leq 0$$

となる。このことと $A 4'$ を併せ考えると、

$$2) \forall j = 1, 2, \dots, n, f_j(e^j) > 0$$

となることがわかる。また, ii) に $x = e^j$ を代入し, $A 3'$ を考慮すると、

$$3) p_j^* \delta f_j(e^j) + \sum_{k \neq j} p_k^* \delta f_k(e^j) \geq \sigma(G(e^j), p^*) > 0$$

が成り立つ。この 1), 2), 3) により $p^* \gg 0$ となっていることがわかる。

さて、 δ と x^* が i) を満たすことを示そう。これは条件 i), すなわち次の条件を満たしているのであった。

$$\delta f(x^*) \in G(x^*) - \mathbb{R}^m.$$

そこで、

$$\delta f(x^*) = a - b,$$

となる $a \in G(x^*)$, $b \in \mathbb{R}^m$ をとると、条件 iii) により

$$\sigma(G(x^*), p^*) = \langle p^*, \delta f(x^*) \rangle$$

であったから、

$$\begin{aligned} \sigma(G(x^*), p^*) &= \langle p^*, a - b \rangle \\ &= \langle p^*, a \rangle - \langle p^*, b \rangle. \end{aligned}$$

よって

$$\langle p^*, b \rangle = 0$$

となり、上で注意したことから $b = 0$.

証了

次に、非負行列の非負逆転可能性に関する定理に対応する定理を述べよう。

定理 3 (Aubin-Ekeland [3]) 写像 f および G が A1~A4 の仮定を満たしているものとする、いま、任意の $\mu > \delta$, $y \in \text{int. } \mathbb{R}^m$ にたいして、 $\beta < 0$ を次のように定義する。

$$\beta = \inf_{p \in \Sigma^m} \sup_{x \in \Sigma^n} \frac{\sigma(G(x) - \mu f(x), p)}{\langle p, y \rangle}.$$

このとき、次の条件を満たす $x^* \in \Sigma^n$ が存在する。

v) $\beta y \in G(x^*) - \mu f(x^*) - \mathbb{R}^m$.

証明 関数 $\phi: \Sigma^m \times \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定義する。

$$\phi(p, x) = \frac{\sigma(G(x) - \mu f(x), p)}{\langle p, y \rangle}.$$

この関数 ϕ は、任意の $x \in \Sigma^n$ を固定したとき p に関して下半連続、擬凸、任意の $p \in \Sigma^m$ を固定したとき x に関して上半連続、擬凹であることは明らかであろう。よって補題 1 により、この関数には鞍点 $(p^*, x^*) \in \Sigma^m \times \Sigma^n$ が存在するが、この x^* が v) を満たすことが次のようにしてわかる。任意の $p \in \Sigma^m$ にたいして

$$\begin{aligned} \beta &= \sup_{x \in \Sigma^n} \inf_{p \in \Sigma^m} \frac{\sigma(G(x) - \mu f(x), p)}{\langle p, y \rangle} \\ &= \inf_{p \in \Sigma^m} \frac{\sigma(G(x^*) - \mu f(x^*), p)}{\langle p, y \rangle} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\sigma(G(x^*) - \mu f(x^*), p)}{\langle p, y \rangle}.$$

よって,

$$\langle p, \beta y \rangle \leq \sigma(G(x^*) - \mu f(x^*), p) \text{ for all } p \in \Sigma^m.$$

このことから,

$$\beta y \in G(x^*) - \mu f(x^*) - \mathbb{R}^n.$$

証了

最後に定理3の仮定を強めて、A 3', 4', 5をも仮定すれば、v)の条件が強められて、次のような定理が成り立つ。

定理4 (Aubin-Ekeland [3]) 写像 f および G が A 1, 2, 3', 4', 5 を満たしているものとする。

いま、任意の $\mu > \delta$, $y \in \text{int. } \mathbb{R}^n$ にたいして、 $\beta < 0$ を次のように定義する。

$$\beta = \inf_{p \in \Sigma^m} \sup_{x \in \Sigma^n} \frac{\sigma(G(x) - \mu f(x), p)}{\langle p, y \rangle}.$$

このとき、次の条件を満たす $x^* \in \Sigma^n$ が存在する。

$$v') \quad \beta y \in G(x^*) - \mu f(x^*).$$

証明 (Aubin-Ekeland [3]) 定理3の証明における ψ の鞍点を $(p^*, x^*) \in \Sigma^m \times \Sigma^n$ とする。すると、

$$0 > \beta \geq \frac{\sigma(G(x) - \mu f(x), p^*)}{\langle p^*, y \rangle} \text{ for all } x \in \Sigma^n$$

が成り立つ。そこで定理2の証明における 1), 2) が成り立つことを考慮すると、

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sigma(G(e^j), p^*) < \langle p^*, \mu f(e^j) \rangle \\ &= p_j^* \mu f_j(e^j) + \sum_{k \neq j} p_k^* \mu f_k(e^j) \\ &\leq p_j^* \mu f_j(e^j) \end{aligned}$$

となり、 $p_j^* \gg 0$ となることがわかる。 x^* は v) を満たすので、

$$\beta y = a - \mu f(x^*) - b$$

となる $a \in G(x^*)$ と $b \in \mathbb{R}^n$ が存在する。さらに、

$$\sigma(G(x^*) - \mu f(x^*), p^*) = \langle p^*, \beta y \rangle$$

が成り立っているので、

$$\begin{aligned} \sigma(G(x^*) - \mu f(x^*), p^*) &= \langle p^*, a - \mu f(x^*) - b \rangle \\ &= \langle p^*, a - \mu f(x) \rangle - \langle p^*, b \rangle. \end{aligned}$$

よって

$$\langle p^*, b \rangle = 0$$

となり、 $b = 0$ となる。

証了

III G が一価の場合

この節では、 G が一価関数の場合に第II節の結果からどのような帰結が得られるかを、Aubin-Ekeland [3] にしたがって列挙しておく。

系 1 f と g を、次の条件を満たす Σ^n から \mathbb{R}^m への一価関数とする。

- 1) $\forall i=1, 2, \dots, m, f_i$; 擬凸, 下半連続。
- 2) $\forall i=1, 2, \dots, m, g_i$; 擬凹, 上半連続。
- 3) $\exists p \in \Sigma^m, \forall x \in \Sigma^n, \langle p, f(x) \rangle > 0$.
- 4) $\forall p \in \Sigma^m, \exists x \in \Sigma^n, \langle p, g(x) \rangle > 0$.

このとき、次の条件を満たす $\delta > 0, p^* \in \Sigma^m, x^* \in \Sigma^n$ が存在する。

- i) $\delta f(x^*) \leq g(x^*)$.
- ii) $\langle g(x), p^* \rangle \leq \delta \langle f(x), p^* \rangle$ for all $x \in \Sigma^n$.
- iii) $\langle p^*, g(x^*) \rangle = \delta \langle p^*, f(x^*) \rangle$.
- iv) $\lambda > 0$ が次の条件を満たすものとする。

$$\exists x \in \Sigma^n, \lambda f(x) \leq g(x).$$

このとき、 $\lambda \leq \delta$.

さらに、任意の $\mu > \delta, y \in \text{int. } \mathbb{R}_+^m$ にたいして、 $\beta < 0$ を次のように定義する。

$$\beta = \inf_{p \in \Sigma^m} \sup_{x \in \Sigma^n} \frac{\langle p, g(x) - \mu f(x) \rangle}{\langle p, y \rangle}.$$

このとき、次の条件を満たす $x' \in \Sigma^n$ が存在する。

$$\beta y \leq g(x') - \mu f(x').$$

f, g が特に行列 A, B で表現されるとき、この定理からフォン・ノイマン過程の斉一均衡成長経路の存在が帰結される。

系 2 $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ を次の条件を満たす $m \times n$ 非負行列とする。

- 1) $\forall j=1, 2, \dots, n, \sum_{i=1}^m a_{ij} > 0$.
- 2) $\forall i=1, 2, \dots, m, \sum_{j=1}^n b_{ij} > 0$.

このとき、次の条件を満たす $\delta > 0, p^* \in \Sigma^m, x^* \in \Sigma^n$ が存在する。

- i) $\delta A x^* \leq B x^*$.
- ii) $\delta A' p^* \geq B' p^*$.

iii) $\delta\langle p^*, Ax^* \rangle = \langle p^*, Bx^* \rangle.$

iv) $\lambda > 0$ が次の条件を満たすものとする。

$$\exists x \in \Sigma^n, \delta Ax \leq Bx.$$

このとき, $\lambda \leq \delta.$

さらに, 任意の $\mu > \delta, y \in \text{int. } \mathbb{R}^m$ にたいして, 次の条件を満たす $x' \in \mathbb{R}^n$ が存在する。

$$\mu Ax' - Bx' \leq y.$$

また $\delta f(x) = g(x)$ となる x が存在するための条件は次のようになる。

系 3 f, g を次の条件を満たす Σ^n から \mathbb{R}^n への一価関数とする。

- 1) $\forall i=1, 2, \dots, n, f_i$; 擬凸, 下半連続。
- 2) $\forall i=1, 2, \dots, n, g_i$; 擬凹, 上半連続。
- 3) $\exists p \in \text{int. } \mathbb{R}^n, \forall x \in \Sigma^n, \langle p, f(x) \rangle > 0.$
- 4) $x_i = 0 \implies f_i(x) \leq 0.$
- 5) $\forall x \in \Sigma^n, g(x) \gg 0.$

このとき, 次の条件を満たす $\delta > 0, p^*, x^* \in \text{int. } \Sigma^n$ が存在する。

- i) $\delta f(x^*) = g(x).$
- ii) $\langle g(x), p^* \rangle \leq \delta \langle f(x), p^* \rangle$ for all $x \in \Sigma^n.$
- iii) $\langle p^*, g(x^*) \rangle = \delta \langle p^*, f(x^*) \rangle.$
- iv) $\lambda > 0$ が次の条件を満たすものとする。

$$\exists x \in \Sigma^n, \lambda f(x) \leq g(x)$$

このとき, $\lambda \leq \delta.$

さらに, 任意の $\mu > \delta, y \in \text{int. } \mathbb{R}^n$ にたいして, $\beta < 0$ を次のように定義する。

$$\beta = \inf_{p \in \Sigma^n} \sup_{x \in \Sigma^n} \frac{\langle p, g(x) - \mu f(x) \rangle}{\langle p, y \rangle}$$

このとき, 次の条件を満たす $x' \in \text{int. } \Sigma^n$ が存在する。

$$\beta y = g(x') - \mu f(x').$$

最後に, ソロー-サムエルンなどによりその研究がなされた, ベロン-フロベニウス定理の非線形関数への拡張定理を挙げて, この節を終わることにする。

系 4 g を次の条件を満たす Σ^n から \mathbb{R}^n への一価関数とする。

- 1) $\forall i=1, 2, \dots, n, g_i$; 擬凹, 上半連続。
- 2) $\forall x \in \Sigma^n, g(x) \gg 0.$

このとき、次の条件を満たす $\delta > 0$, p^* , $x^* \in \text{int. } \Sigma^n$ が存在する。

i) $\delta x^* = g(x^*)$.

ii) $\langle p^*, g(x) \rangle \leq \delta \langle p^*, x \rangle$ for all $x \in \Sigma^n$.

iii) $\langle p^*, g(x^*) \rangle = \delta \langle p^*, x^* \rangle$.

iv) $\lambda > 0$ が次の条件を満たすものとする。

$$\exists x \in \Sigma^n, \lambda x \leq g(x).$$

このとき、 $\lambda \leq \delta$.

さらに、任意の $\mu > \delta$, $y \in \text{int. } \mathbb{R}_+^n$ に対して、次の条件を満たす $\beta < 0$, $x' \in \text{int. } \Sigma^n$ が存在する。

$$\beta y = g(x') - \mu f(x')$$

結 語

本稿では、主に Aubin-Ekeland [3] における定式化を参照して、ペロン-フロベニウスの定理の多価写像への拡張に関する考察を行った。ここでは、参考文献にあげてあるその他の論文について少々コメントしておきたい。まず Aubin [2] では“臨界点定理”，すなわちある多価写像 G に対して、 $0 \in G(x)$ となる、 x が存在するための十分条件を述べた定理をもちいて本稿におけるのとはほぼ同じ定理を証明している。また Rockafellar [7] では、“non-singular monotone process” という、条件の強い多価写像に関して考察しているので、その固有値の存在問題はほとんど自明であり、その結果は特殊ケースとして本稿の結果に含まれる。最後に、Fujimoto-Herrero [4] では \mathbb{R}^n のある凸錐からその凸錐への双価写像にたいして、一般化された意味における劣一次同次性と単調性を仮定して固有値の存在問題を解いている。藤本-ヘレロの論文では、多価写像の定義域を \mathbb{R}^n のある凸錐にしており、その諸仮定を写像の定義域が \mathbb{R}^n の基本単体の場合に還元できないため、本稿の結果と比較することはできない。

参 考 文 献

- [1] Aubin, J-P., Propriété de Perron-Frobenius pour des Correspondances, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 22, 1978, 911-914.
- [2] ———, *Applied Functional Analysis*, (Wiley, N. Y.), 1979.
- [3] Aubin, J-P. and I. Ekeland, *Applied Nonlinear Analysis*, (Wiley, N. Y.), 1984.
- [4] Fujimoto, T. and C. Herrero, The Perron-Frobenius Theorem for Set-Valued Mappings, 『香川大学経済論叢』, 59, 1988, 234-245.
- [5] Kemeny, J., O. Morgenstern, and G. Thompson, A Generalization of von Neumann Model of an Expanding Economy, *Econometrica*, 24 (1956), 115-135.
- [6] Makarov, V. L. and A. M. Rubinov, *Mathematical Theory of Economic Dynamics and Equilibria*, (Springer, N. Y.), 1977.

- [7] Rockafellar, R., Monotone Process of Convex and Concave Type. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 77, 1967.
- [8] ———, Convex Algebra and Duality in Dynamic Models of Production in *Mathematical Models in Economics*, ed. by Jerry Los and Maria W. Los, (Elsvier, N. Y.), 1974.
- [9] von Neumann, A Model of General Economic Equilibrium, *Review of Economic Studies*, 13, 1945, 1-9.
- [10] 高橋 渉, 『非線形関数解析学』(近代科学社, 東京), 1988.
- [11] 福岡正夫他, 『近代経済学の理論構造』(筑摩書房, 東京), 1977.
- [12] 渡部隆一, 正作用素, 『三田学会雑誌』73, 1980, 69-92.

(慶應義塾大学大学院経済学研究科博士課程)