

Title	回帰モデルの誤差項の正規性検定(2)
Sub Title	Tests for normality of disturbances in regression model (2)
Author	蓑谷, 千鳳彦
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1990
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.83, No.3 (1990. 10) ,p.613(129)- 648(164)
JaLC DOI	10.14991/001.19901001-0129
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	<a href="https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19901001-0129">https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19901001-0129</a>

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

## 回帰モデルの誤差項の正規性検定（2）

藁谷 千風彦

### 7 半正規プロット

正規性の検定および外れ値検出のために、前節の正規確率プロットよりも半正規プロット **half normal plot**（半正規確率プロットともいう）の方が有効であると Atkinson [4], [5], [6] は述べている。Atkinson は線形回帰モデルに関して  $|t_i|$  あるいは

$$A_i = \left\{ \left( \frac{n-k}{k} \right) \left( \frac{h_{ii}}{1-h_{ii}} \right) \right\}^{\frac{1}{2}} |t_i| \quad (41)$$

の半正規プロットを提唱した。

半正規分布 **half normal distribution** とは標準正規確率変数の絶対値の分布である。すなわち  $Z \sim N(0, 1)$  とすれば、 $|Z|$  は半正規分布に従い、 $|Z|$  の分布関数  $\Phi_0(t)$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Phi_0(t) &= P(|Z| \leq t) \\ &= P(-t \leq Z \leq t) \\ &= \int_{-t}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= 2 \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= \int_0^t \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \end{aligned}$$

したがって  $|Z|$  の p. d. f. は

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad (42)$$

である。他方

$$\begin{aligned} &\int_{-t}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \\ &= 1 - 2[1 - \Phi(t)] = 2\Phi(t) - 1 \end{aligned}$$

であるから

$$\Phi_0(t) = 2\Phi(t) - 1 \quad (43)$$

の関係がある。

順序化された  $|z_i|$  を  $|z_{(i)}|$  とすれば、

$$\mu_{(i)}^* = E(|z_{(i)}|) \doteq \Phi_0^{-1} \left( \frac{i - \frac{3}{8}}{n + \frac{1}{4}} \right) \quad (44)$$

であり、

$$(\mu_{(i)}^*, |z_{(i)}|), \quad i=1, \dots, n$$

のプロットを半正規プロットという。もし標本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  が期待値 0, 分散  $\sigma^2$  の正規分布に従っているならば、順序化された  $X_i$  を  $X_{(i)}$  とすれば

$$X_{(i)} = \sigma z_{(i)}$$

であるから

$$E(|X_{(i)}|) = \sigma E(|z_{(i)}|) = \sigma \mu_{(i)}^*$$

となる。したがって  $|X_{(i)}|$  と  $\mu_{(i)}^*$  をプロットすれば、原点を通り、勾配  $\sigma$  の直線となる。

半正規プロットを描くためには、 $\mu_{(i)}^*$  を求める必要がある。

$$\mu_{(i)}^* \doteq \Phi_0^{-1}(a_i)$$

とすれば

$$\Phi_0(t) = 2\Phi(t) - 1$$

の関係があるから、 $\Phi_0(t_i) = u_i$  とおけば

$$t_i = \Phi_0^{-1}(u_i)$$

他方

$$u_i = 2\Phi(t_i) - 1$$

より

$$t_i = \Phi^{-1} \left( \frac{u_i + 1}{2} \right)$$

したがって

$$\Phi_0^{-1}(u_i) = \Phi^{-1} \left( \frac{u_i + 1}{2} \right)$$

ゆえに次式を得る。

$$\Phi_0^{-1}(a_i) = \Phi^{-1} \left( \frac{a_i + 1}{2} \right) \quad (45)$$

$\Phi^{-1}(t_i)$  を求めるためには(33)式、(34)式の方法を適用すればよい。すなわち

$$a_i = \frac{i - \alpha}{n - 2\alpha + 1} \quad (\alpha \text{ は(33)式参照})$$

のとき

$$\frac{a_i + 1}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{n - 3\alpha + 1 + i}{n - 2\alpha + 1} \right)$$

図25 半正規確率プロット, 一様分布

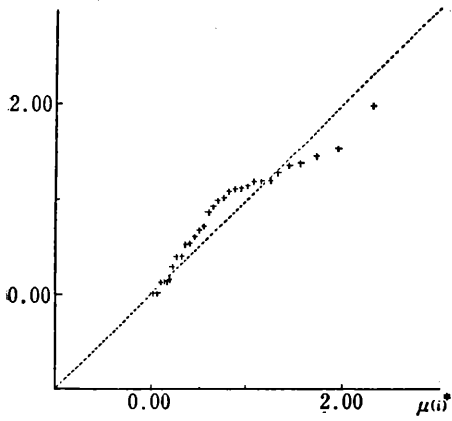


図26 半正規確率プロット, 指数分布

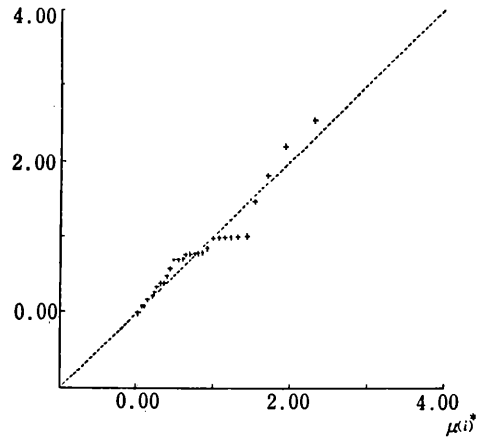


図27 半正規確率プロット, ロジスティック分布

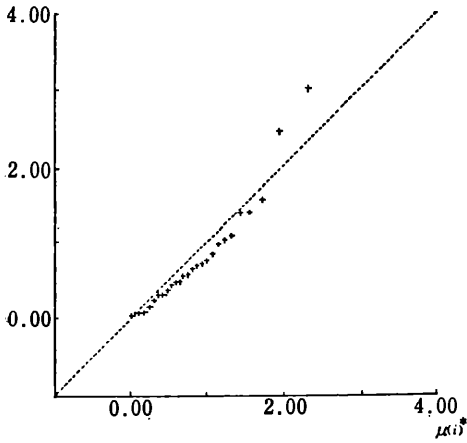


図28 半正規確率プロット, ジョ  
ンソン無限SU(0, 2)

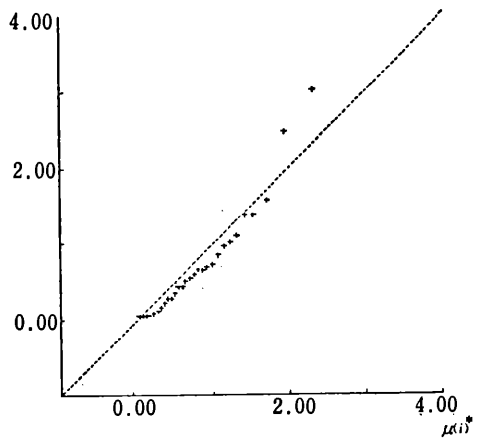


図29 半正規確率プロット, ジョ  
ンソン無限SU(1, 2)

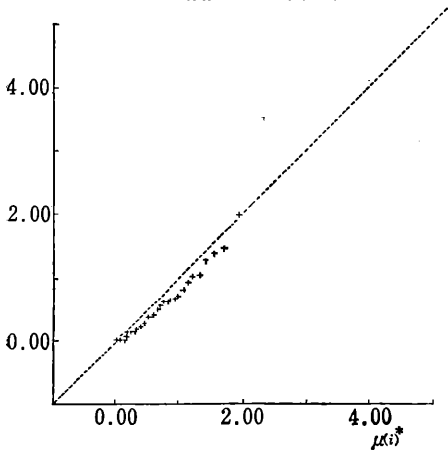


図30 半正規確率プロット,  
ワイブル分布

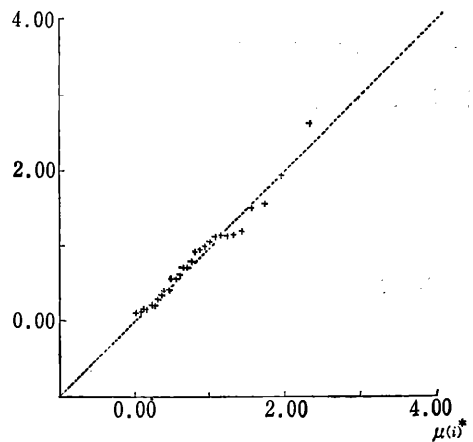


表16 ジョンソン無限分布SU(0, 2)からの標本データと半正規得点他

	X	Z	順序化Z(i)	RANKITS	Z(i)	Half Normal Scores
1	0.21	0.60334	-3.0078	-2.0407	0.0495	0.0258
2	0.32	0.84703	-1.3684	-1.6159	0.0613	0.0664
3	-0.02	0.09379	-1.0139	-1.3648	0.0613	0.1080
4	-0.27	-0.46007	-0.7259	-1.1786	0.0613	0.1498
5	-0.12	-0.12776	-0.7038	-1.0262	0.0834	0.1918
6	0.38	0.97996	-0.6595	-0.8944	0.0938	0.2342
7	-1.42	-3.00782	-0.5487	-0.7767	0.1278	0.2771
8	-0.68	-1.36840	-0.4601	-0.6688	0.1602	0.3205
9	0.01	0.16025	-0.4379	-0.5682	0.2164	0.3645
10	-0.52	-1.01393	-0.3493	-0.4731	0.2828	0.4092
11	-0.19	-0.28284	-0.2828	-0.3821	0.2828	0.4548
12	0.23	0.64765	-0.2828	-0.2942	0.3493	0.5013
13	0.65	1.57813	-0.2164	-0.2086	0.4379	0.5490
14	-0.36	-0.65946	-0.1278	-0.1245	0.4601	0.5979
15	-0.1	-0.08345	-0.0834	-0.0414	0.5147	0.6483
16	-0.16	-0.21637	-0.0613	0.0414	0.5487	0.7005
17	-0.04	0.04948	-0.0613	0.1245	0.6033	0.7546
18	-0.09	-0.06129	-0.0613	0.2086	0.6476	0.8110
19	-0.19	-0.28284	0.0495	0.2942	0.6595	0.8702
20	-0.38	-0.70377	0.0938	0.3821	0.7038	0.9325
21	-0.39	-0.72592	0.1602	0.4731	0.7259	0.9987
22	-0.31	-0.54869	0.5147	0.5682	0.8470	1.0696
23	0.17	0.51472	0.6033	0.6688	0.9800	1.1463
24	-0.22	-0.34930	0.6476	0.7767	1.0139	1.2304
25	-0.26	-0.43792	0.8470	0.8944	1.1129	1.3242
26	0.57	1.40089	0.9800	1.0262	1.3684	1.4314
27	-0.09	-0.06129	1.1129	1.1786	1.4009	1.5580
28	0.44	1.11289	1.4009	1.3648	1.5781	1.7162
29	1.05	2.46430	1.5781	1.6159	2.4643	1.9346
30	-0.09	-0.06129	2.4643	2.0407	3.0078	2.3146

平均 = -6.23333333333334D-02

標準偏差 = .4513786034784557

であるから  $\Phi_0^{-1}(a_i)$  は

$$\Phi_0^{-1}(a_i) = \Phi^{-1} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{n-3\alpha+1+i}{n-2\alpha+1} \right) \right] \quad (46)$$

によって求めることができる。ただしランキッを求めるときと同様に、 $n \geq 9$  であつ  $i=1$  あるいは  $i=n$  のときのみ

$$a_i = \frac{i - \frac{3}{8}}{n + \frac{1}{4}}$$

したがって

$$\Phi_0^{-1}(a_i) = \Phi^{-1} \left( \frac{n+i-\frac{1}{8}}{2n+\frac{1}{2}} \right) \quad (47)$$

図31 賃金率関数 (38) 式の半正規確率プロット

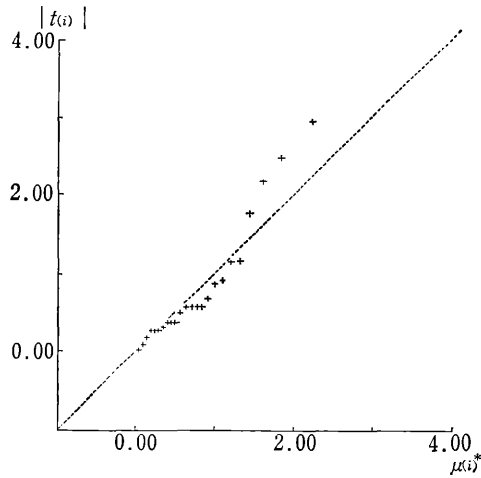


図32 アメリカからEC向け輸出関数 (39) 式の半正規確率プロット

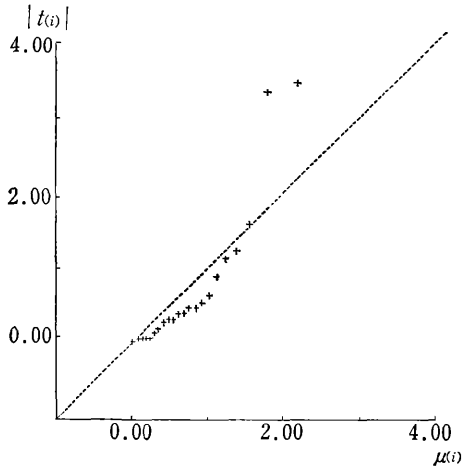
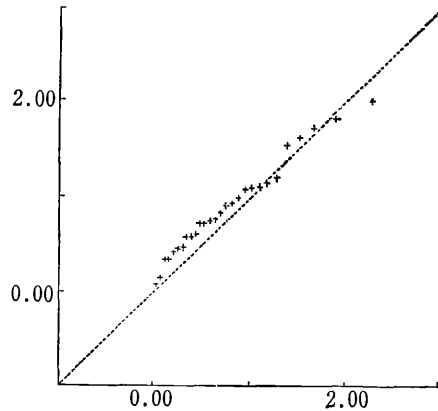


図33 アメリカの日本からの輸入関数 (40) 式の半正規確率プロット



によって  $\Phi_0^{-1}(a_i)$  を求めるという方法が私が採用した  $\mu_i^*$  の近似計算である。

表9に示した6種類の非正規分布からの標本データにもとづいて描かれた半正規確率プロットは図25から図30に示されている。ジョンソン無限分布  $SU(0, 2)$  についてのみ標本データと半正規得点等を表16に示した。

また(38)式、(39)式、(40)式の順序化されたスチューデント化残差の絶対値  $|r_{(i)}|$ 、 $|t_{(i)}|$  と半正規得点 half normal score  $\mu_i^*$  の値は表13、14、15に与えられている。 $|t_{(i)}|$  を用いる半正規確率プロットは図31、図32、図33に示されている。いずれのプロットも正規性を示す直線から乖離しており、誤差項の分布が正規分布ではないということを示唆している。しかし半正規プロットのパターンから非正規分布の歪みや両すそに関する情報を得ようとするとき、正規確率プロットより

半正規プロットがすぐれているとは思えない。正規性の検定には正規確率プロットがあれば十分であろう。

## 8 正規性の検定 (2)——Geary の検定

尾の長さ (すその長さ) を  $\beta_2$  ではなく

$$\gamma = \frac{\nu_1}{\sqrt{\mu_2}} \quad (48)$$

によって測る方法がある。ここで

$\nu_1$  = 平均偏差 mean deviation

$\mu_2$  = 分散

である。  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  のとき  $\nu_1 = \sqrt{2/\pi} \sigma$ ,  $\mu_2 = \sigma^2$  であるから

$$\gamma = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \doteq 0.7979$$

である。

指数分布

$$\frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)$$

のとき  $\nu_1 = 2\beta/e$ ,  $\mu_2 = \beta^2$  であるから

$$\gamma = \frac{2}{e} \doteq 0.7358$$

である。自由度  $m$  の  $t$  分布を考えると

$$\nu_1 = \frac{\sqrt{m} \Gamma\left[\frac{1}{2}(m-1)\right]}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \quad (49)$$

$$\mu_2 = \frac{m}{m-2} \quad m > 2 \quad (50)$$

であるから

$$\gamma = \frac{\sqrt{m-2} \Gamma\left[\frac{1}{2}(m-1)\right]}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \quad (51)$$

となる。自由度  $m$  によって  $\gamma$  の値がどのように変わるかは表17に示されている。  $m=3$  の  $t$  分布のように正規分布より長い尾をもつ分布の場合には  $\gamma$  の値は0.6366となり、正規分布の  $\gamma$  の値0.7979より小さい。このように長い尾をもつ分布のとき  $\gamma$  の値は小さくなると予想される。したがって

表17 自由度  $m$  の  $t$  分布の  $\gamma$

$m$	3	5	7	10	20	30	40	50	60	100	$\infty$
$\gamma$	0.6366	0.7351	0.7592	0.7734	0.7869	0.7908	0.7927	0.7937	0.7945	0.7959	0.7979

$\nu_1$  の一致推定量

$$d_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}|$$

$\mu_2$  の一致推定量

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

から,  $\gamma$  の一致推定量

$$G = \frac{d_1}{\sqrt{s^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}|}{\sqrt{n \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}} \quad (52)$$

を求めたとき

$$G < G_0$$

の場合に, 正規分布という仮説  $H_0$  を棄却して長い尾をもつ分布と考え,

$$G > G_0$$

のとき  $H_0$  を棄却して短い尾をもつ分布と考えればよい。この  $G$  を用いる検定は Geary の検定とよばれている (Geary [22])。

正規分布の仮説のもとで

$$E(G) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 + \frac{1}{4n}\right) + O(n^{-2}) \quad (53)$$

$$\text{Var}(G) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{3}{\pi}\right) + O(n^{-2}) \quad (54)$$

が得られる (柴田 [38] p.236)。したがって  $n$  が十分大きければ ( $n \geq 41$  ぐらい)

$$Z = \frac{\sqrt{n} \left(G - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)}{\sqrt{1 - \frac{3}{\pi}}} = \frac{\sqrt{n} (G - 0.7979)}{0.2123} \quad (55)$$

は標準正規分布に従うから  $G$  検定は正規検定となる。  $G$  を用いる検定の表は Pearson and Hartley [30], 柴田 [38] を利用することができる。

前述の表 9 の 6 種類の非正規分布からの標本から計算された  $G$  の値は次の通りである。

一様 ( $\beta_2=1.80$ )	0.861
指数 ( $\beta_2=9$ )	0.805



ロジスティック ( $\beta_2=4.2$ )	0.719**
ジョソソンSU (0, 2) ( $\beta_2=4.51$ )	0.709**
ジョソソンSU (1, 2) ( $\beta_2=5.59$ )	0.691***
ワイブル ( $\beta_2=3.25$ )	0.809

$n=30$ の $G$ の下側1%点は0.709, 下側5%点は0.740であるから上の6個の $G$ の観測値のなかで\*\*\*は1%, \*\*は5%で有意であり, いずれも長い尾をもつ分布を検出している。(38)式, (39)式, (40)式の残差から計算された $G$ の値は次の通りである。

$$(38) \text{ 式} \quad 0.769$$

$$(39) \text{ 式} \quad 0.675***$$

$$(40) \text{ 式} \quad 0.889***$$

(38)式の $G$ は有意でないが(39)式は下側1%, (40)式は上側1%で有意であり, 正規確率プロットの結果と一致する。

前述の結果は, Geary の検定が,  $\beta_2 \approx 3$  の分布, すなわち正規分布より長い尾あるいは短い尾をもつ分布に対して高い検定力をもつことを示しているが, このことはモンテ・カルロ実験でも確かめられている (Shapiro et al. [36])。

## 9 正規性の検定 (3)——Shapiro-Wilk 検定

正規確率プロットと関連している正規性検定のための重要な検定統計量は Shapiro-Wilk [35] の $W$ である。

$Y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$  とし,  $Y_i$  の順序化された値を

$$Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq \dots \leq Y_{(n)}$$

とすれば

$$E[Y_{(i)}] = \mu + \sigma \mu_{(i)}$$

となることはすでに述べた ((29) 式)。ここで

$$\mu_{(i)} = E[Z_{(i)}]$$

であり,  $Z_{(i)}$  は  $Z_i = (Y_i - \mu) / \sigma$  の順序化された値である。

$$E[Y_{(i)}] = \mu + \sigma \mu_{(i)}$$

は

$$Y_{(i)} = \mu + \sigma \mu_{(i)} + \varepsilon_i \tag{56}$$

という回帰モデルの期待値である。ここで

$$E(\varepsilon_i) = 0 \tag{57}$$

$$E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \sigma^2 v_{ij} \tag{58}$$

である。そして

$$\mathbf{y}_{(t)} = \begin{bmatrix} Y_{(1)} \\ Y_{(2)} \\ \vdots \\ Y_{(n)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & \mu_{(1)} \\ 1 & \mu_{(2)} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \mu_{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & m_1 \\ 1 & m_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & m_n \end{bmatrix} = [\mathbf{1} \quad \mathbf{m}] \quad (59)$$

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mu \\ \sigma \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

とすれば、(56) 式～(58) 式は次のように表すことができる。

$$\mathbf{y}_{(t)} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (60)$$

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}$$

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = \sigma^2 \mathbf{V}$$

したがって  $\boldsymbol{\beta}$  の一般化最小 2 乗法 GLS による推定量は次式で与えられる。

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}_{(t)} \quad (61)$$

ところが

$$\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1} & \mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{m} \\ \mathbf{m}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1} & \mathbf{m}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{m} \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}_{(t)} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}_{(t)} \\ \mathbf{m}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}_{(t)} \end{bmatrix} \quad (63)$$

において

$$\mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{m} = 0 \quad (64)$$

であるから (数学注参照)

$$\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{m}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{m} \end{bmatrix} \quad (65)$$

したがって  $\mu$  および  $\sigma$  の GLS 推定量は次式で与えられる。

$$\hat{\mu} = \frac{\mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}_{(t)}}{\mathbf{1}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{1}} \quad (66)$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\mathbf{m}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}_{(t)}}{\mathbf{m}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{m}} \quad (67)$$

$\hat{\sigma}$  は

$$\hat{\sigma} = (\mathbf{m}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{m})^{-1}\mathbf{m}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}_{(t)} = \mathbf{a}'\mathbf{y}_{(t)} = \sum_{i=1}^n a_i Y_{(i)} \quad (68)$$

と書くこともできる。ここで

$$\mathbf{a}' = (\mathbf{m}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{m})^{-1}\mathbf{m}'\mathbf{V}^{-1} \quad (69)$$

である。Shapiro and Wilk は

$$H_0: Y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

の検定統計量として

$$W = \frac{(k\hat{\sigma})^2}{s^2} = \frac{\left\{ \sum_{i=1}^n k a_i Y_{(i)} \right\}^2}{s^2} \quad (70)$$

を提唱した。ここで

$$s^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \quad (71)$$

であり、 $k$ は $W$ がつねに0と1の間をとるよう

$$\sum_{i=1}^n (k a_i)^2 = 1$$

という規準化を満たす定数である。

$$\sum_{i=1}^n (k a_i^2) = k^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 = k^2 \mathbf{a}' \mathbf{a}$$

他方

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' \mathbf{a} &= (\mathbf{m}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{m})^{-1} \mathbf{m}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{m} (\mathbf{m}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{m})^{-1} \\ &= (\mathbf{m}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{m})^{-2} \mathbf{m}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{m} \end{aligned}$$

であるから

$$k^2 = (\mathbf{a}' \mathbf{a})^{-1} = (\mathbf{m}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{m})^2 (\mathbf{m}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{m})^{-1}$$

ゆえに

$$k = \frac{\mathbf{m}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{m}}{(\mathbf{m}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{m})^{1/2}} \quad (72)$$

したがって

$$k\hat{\sigma} = \frac{\mathbf{m}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y}_{(i)}}{(\mathbf{m}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{m})^{1/2}} \quad (73)$$

$$\mathbf{c}' = (c_1, c_2, \dots, c_n) = \frac{\mathbf{m}' \mathbf{V}^{-1}}{(\mathbf{m}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{m})^{1/2}} \quad (74)$$

とおくと

$$k\hat{\sigma} = \sum_{i=1}^n c_i Y_{(i)}$$

と書くことができるから、 $W$ は次のように表すこともできる。

$$W = \frac{\left\{ \sum_{i=1}^n c_i Y_{(i)} \right\}^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} \quad (75)$$

あるいは

$$m_i + m_{n-i+1} = 0$$

であるから (David [20] p. 36)

$$c_i + c_{n-i+1} = 0, \quad i=1, \dots, n$$

の関係が成立し,  $W$  は

$$W = \frac{\sum_{i=1}^{[n/2]} c_{n-i+1} \{Y_{(n-i+1)} - Y_{(i)}\}^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} \quad (76)$$

と表すこともできる。  $[n/2]$  は  $n/2$  の整数部分である。

$W$  の性質 (Shapiro and Wilk [35])

(1)  $W$  は順序化された標本値  $Y_{(i)}$  と  $c_i$  との間の相関係数の 2 乗である。

$Y_{(i)}$  と  $c_i$  の相関係数の 2 乗は

$$r^2 = \frac{\{\sum [Y_{(i)} - \bar{Y}] (c_i - \bar{c})\}^2}{\sum [Y_{(i)} - \bar{Y}]^2 \sum (c_i - \bar{c})^2}$$

である。ところが (64) 式と (74) 式より

$$\sum_{i=1}^n c_i = 0 \quad \text{したがって} \quad \bar{c} = 0$$

であるから

$$\sum_{i=1}^n (c_i - \bar{c})^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2 = \mathbf{c}' \mathbf{c} = 1$$

となることに注意すれば  $r^2 = W$  となる。

さらに (74) 式の分子に現れる  $m' V^{-1}$  の  $i$  番目の要素を  $a_i^*$  とおくと,  $a_i^*$  は近似的にランキッ ト  $m_i$  に比例する (Shapiro and Wilk [35], p. 596)。したがって  $Y_{(i)}$  と  $c_i$  の相関係数の 2 乗である  $W$  は,  $Y_{(i)}$  とランキッ ト  $m_i$  の線形関係を測る尺度でもある。  $Y_i$  が正規分布に従っていれば,  $Y_{(i)}$  と  $m_i$  との間に線形関係が成立し ((29) 式),  $W$  は 1 に近い値をとるであろう。いいかえれば  $W$  が 1 より有意に小さければ,  $Y_i$  の正規性の仮定は棄却される。実際, Shapiro and Wilk は種々の非正規分布のもとで  $E(W)$  をモンテ・カルロ実験によって求め, それが正規分布のもとの  $W$  の期待値より小さくなることから

$$W < w_0$$

のとき  $H_0$  を棄却すべきであると述べた。

(2)  $W$  は尺度パラメータ  $\sigma$  と期待値  $\mu$  が変わっても不変である。いいかえれば, 正規母集団からの標本に対して  $W$  の分布は  $n$  のみ依存する。

(3) 正規母集団からの標本において,  $W$  は  $s^2$  と  $\bar{Y}$  から独立である。

$$(4) \quad E(W^r) = \frac{E(b^{2r})}{E(s^{2r})} = \frac{k^{2r} E(\hat{\theta}^{2r})}{E(s^{2r})}$$

ここで

$$b = \frac{\mathbf{m}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y}_{(i)}}{(\mathbf{m}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{m})^{1/2}} = k \hat{\sigma}$$

$r$  は任意の実数

$$(5) \quad \frac{n c_1^2}{n-1} \leq W \leq 1$$

$W$  の最小値の証明は Shapiro and Wilk [35] をみよ。  $W$  の最大値が 1 であることは次のように示すことができる。

$$\sum_{i=1}^n c_i = 0 \text{ であるから}$$

$$\sum_{i=1}^n c_i Y_{(i)} = \sum_{i=1}^n c_i [Y_{(i)} - \bar{Y}]$$

ゆえに

$$\begin{aligned} W &= \frac{[\sum c_i Y_{(i)}]^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} = \frac{[\sum c_i (Y_{(i)} - \bar{Y})]^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} \\ &\leq \frac{\sum c_i^2 \sum [Y_{(i)} - \bar{Y}]^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} = \sum c_i^2 = 1 \end{aligned}$$

(6)  $n=3$  のとき  $W$  の p. d. f.  $f(W)$  は

$$\begin{aligned} f(W) &= \frac{3}{\pi} (1-W)^{-\frac{1}{2}} W^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{3}{4} &\leq W \leq 1 \end{aligned}$$

で与えられる。

### $W$ の計算

$W$  の値を計算するためには、 $c_i$  の値を知る必要がある。 $c_i$  の値は Shapiro and Wilk [35], Barnett and Lewis [7], D'Agostino and Stephens [17], 柴田 [38] などを利用すればよい。

しかし  $W$  の値を計算するために、 $c_i$  の値をコンピュータ・プログラムの中に入れておくことは不経済であり、あるいは表から一回一回読みとることは面倒である。以下の方法によって  $W$  を求めることができる。計算方法は Shapiro and Wilk [35] および Royston [34] を参考にしている。

まず (74) 式の分子を

$$\mathbf{a}^* = \mathbf{m}' \mathbf{V}^{-1} \tag{77}$$

とおくと、 $\mathbf{a}^*$  の  $i$  番目の要素  $a_i^*$  の近似値  $\hat{a}_i^*$  は次式で与えられる。

$$\hat{a}_i^* = \begin{cases} 2 m_i & i = 2, 3, \dots, n-1 \\ \left( \frac{\hat{c}_1^2}{1-2\hat{c}_1^2} \sum_{i=2}^{n-1} \hat{a}_i^{*2} \right)^{\frac{1}{2}} & i = 1, i = n \end{cases} \tag{78}$$

ここで

$$\hat{c}_1^2 = \hat{c}_n^2 = \begin{cases} g(n-1) & n \leq 20 \\ g(n) & n > 20 \end{cases}$$

$$\hat{c}_1 < 0, \hat{c}_n > 0$$

$$g(n) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}[n+1]\right)}{\sqrt{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}n+1\right)} \div \left[ \frac{6n+7}{6n+13} \right] \left( \frac{\exp(1)}{n+1} \left[ \frac{n+1}{n+2} \right]^{n-2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (79)$$

(74) 式の分母を

$$B = (\mathbf{m}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{m})^{1/2} \quad (80)$$

とおくと

$$B^2 = \mathbf{a}^{*'} \mathbf{a}^* = \sum_{i=2}^{n-1} a_i^{*2} + 2a_1^{*2} = \sum_{i=2}^{n-1} a_i^{*2} + 2B^2 \hat{c}_1^2 \quad (81)$$

ここで上式を得るために

$$m_j = -m_{n-j+1} \\ v_{ij} = v_{n-j+1, n-t+1}$$

を用いると

$$a_n^* = \sum_{j=1}^n m_j v^{jn} = - \sum_{j=1}^n m_{n-j+1} v^{1, n-j+1} \\ = - \sum_{j=1}^n m_{n-j+1} v^{n-j+1, 1} \\ = - \sum_{j=1}^n m_j v^{j, 1} \\ = -a_1^*$$

であるから

$$a_1^{*2} = a_n^{*2}$$

であること、そして  $\alpha$  は

$$\hat{c}_i = \frac{a_i^*}{B} \quad (82)$$

によって近似することができるということを用いている。したがって  $B^2$  は次式で近似することができる。

$$\hat{B}^2 = \frac{\sum_{i=2}^{n-1} a_i^{*2}}{1 - 2\hat{c}_1^2} \quad (83)$$

ランキット  $m_u$  の計算も含め、以上の点をまとめれば、 $W$  の計算は次の順序で行えばよい。

- ① ランキット  $m_u$  を求める ((33)式, (34)式)
- ②  $\hat{a}_i^*$ ,  $i=2, 3, \dots, n-1$  ((78)式),  $\hat{c}_1, \hat{c}_n$  ((79)式) を求める。
- ③  $\hat{B}$  を求める ((83)式)。
- ④  $\hat{c}_i = \hat{a}_i^* / \hat{B}$  ((82)式),  $i=2, 3, \dots, n-1$  を求める。
- ⑤  $A = \sum_{i=1}^n \hat{c}_i Y_i$ ,  $s^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$  を計算し,

表18 W検定のための係数  $c_i$  と近似値  $\hat{c}$

$i$	n=10		n=20		n=30	
	$c_{n-i+1}$	$\hat{c}_{n-i+1}$	$c_{n-i+1}$	$\hat{c}_{n-i+1}$	$c_{n-i+1}$	$\hat{c}_{n-i+1}$
1	0.5739	0.5831	0.4734	0.4817	0.4254	0.4289
2	0.3291	0.3178	0.3211	0.3151	0.2944	0.2931
3	0.2141	0.2081	0.2565	0.2531	0.2487	0.2476
4	0.1224	0.1191	0.2085	0.2061	0.2148	0.2138
5	0.0399	0.0388	0.1686	0.1668	0.1870	0.1861
6			0.1334	0.1321	0.1630	0.1622
7			0.1013	0.1003	0.1415	0.1409
8			0.0711	0.0704	0.1219	0.1213
9			0.0422	0.0418	0.1036	0.1031
10			0.0140	0.0139	0.0862	0.0858
11					0.0697	0.0693
12					0.0537	0.0534
13					0.0381	0.0378
14					0.0227	0.0226
15					0.0076	0.0075

注:  $c_i, \hat{c}_i$  とも,  $c_i = -c_{n-i+1}, \hat{c}_i = -\hat{c}_{n-i+1}$  を用いれば残りの値は得られる。

$$W = \frac{A}{s^2} \quad ((75) \text{ 式})$$

を求める。

ここで上述の方法で求めた  $c_i$  の近似値  $\hat{c}_i$  と, Shapiro and Wilk [35] が与えている  $c_i$  の値を比較しておこう。 $n=10, 20, 30$  の場合についてのみ  $c_i$  と  $\hat{c}_i$  の値を表18に示した。 $n \geq 20$  のとき  $\hat{c}_i$  の有効数字2桁は  $c_i$  と同じであり,  $\hat{c}_i$  は十分な近似を与えている。 $n=10$  の場合には若干  $\hat{c}_i$  は  $c_i$  と異なる。しかし正規母集団からの10個の標本データ (D'Agostino et al. [17] Table 9.6)

84.27, 90.87, 92.55, 96.2, 98.7, 98.98, 100.42, 101.58, 106.82, 113.75

によって係数に  $c_i$  を用いたときの  $W=0.984$  に対して,  $\hat{c}_i$  を用いたときの  $W=0.9856$  であるから,  $n=10$  の場合も  $W$  の値にそれほど大きな相違をもたらさない。実用上,  $W$  の値を求めるためには上述の近似値  $\hat{c}_i$  を用いる計算で十分であろう。

Weisberg and Bingham [41] は, このような  $c_i$  の求め方ではなく,  $c_i$  に代えて

$$m_i = \Phi^{-1} \left( \frac{i - \frac{3}{8}}{n + \frac{1}{4}} \right)$$

を用いることを提唱している。この  $m_i$  を使えば  $W$  の計算はもっと簡単になる。

回帰モデルの誤差項の正規性を Shapiro-Wilk の  $W$  で検定する場合には, 5節の正規確率プロットに合せて, スチューデント化残差  $r_i$  あるいは  $t_i$  を用いればよい。例として (39)式のアメリカから EC 向け輸出関数  $\log QXUEC\$$  を採ってみよう。(39)式の順序化されたスチューデント

化残差  $t_{(i)}$  は表 14 に示されている。この  $t_{(i)}$  と前述の方法で計算された  $c_i$  の値 (表 19) を用いて

$$W = \frac{\left\{ \sum_{i=1}^n c_i t_{(i)} \right\}^2}{\sum_{i=1}^n (t_{(i)} - \bar{t})^2}$$

を計算すると

$$W = 0.8818$$

が得られる。

### W の百分位点

Shapiro and Wilk [35] は、正規分布の帰無仮説のもとでの  $W$  の分布をジョンソン有界システム

$$Z = \gamma + \delta \log \left( \frac{W - \epsilon}{1 - W} \right) \quad (84)$$

によって近似し、 $W$  の百分位点を求めた。 $Z$  は標準正規変数、 $\gamma$ 、 $\delta$ 、 $\epsilon$  は所与の  $n$  に対して一定の値が与えられる。 $W$  の百分位点は  $n=3(1)50$  の場合が Shapiro and Wilk [35]、同じ表が D'Agostino and Stephens [17]、柴田 [38] に示されている。

Wetherill [43] は  $10 \leq n \leq 50$  に対して、 $\gamma$ 、 $\delta$ 、 $\epsilon$  の 3 つのパラメータを  $n$  の関数によって回帰し、有意水準  $\alpha$  に対応する  $Z$  を  $\alpha = \Phi(Z)$  によって求め、 $e = \exp\{(Z - \gamma)/\eta\}$  から

$$W = \frac{\epsilon + e}{1 + e}$$

によって  $W$  の百分位点を求めている。

$W$  の観測値を、 $W$  の百分位点の表を参照して一回一回検定するのは面倒であり、 $n > 50$  に対しては利用可能な表がないので、私が採用した  $W$  の検定方法は Royston [34] によっている。

$W$  の分布は漸近的に正規ではないが、Royston は  $n=750$  の近くで正規分布とみなしてよいことに注目し

$$y = (1 - W)^2 \quad (85)$$

によって  $W$  から  $y$  へ変換し、次に  $y$  から標準正規変数  $z$  への変換

$$z = \frac{y - \mu_y}{\sigma_y} \quad (86)$$

を行なう。ここで、 $\lambda$ 、 $\mu_y$ 、 $\sigma_y$  はすべて  $n$  の関数である。

$n$  の値に応じて  $\lambda$  は次式で与えられる。

$$\lambda = \sum_{i=0}^6 d_i (\log n - D)^i \quad (87)$$

表 19 係数  $c_i$

$i$	$c_{n-i+1}$
1	0.46403
2	0.31309
3	0.25507
4	0.21136
5	0.17500
6	0.14309
7	0.11407
8	0.08701
9	0.06129
10	0.03643
11	0.01209

注:  $c_i = -c_{n-i+1}$



$$D = \begin{cases} 3 & n \leq 20 \\ 5 & 21 \leq n \leq 2000 \end{cases}$$

係数  $d_i$  は次の通りである。

$7 \leq n \leq 20$  のとき

$$d_0 = 0.118898$$

$$d_1 = 0.133414$$

$$d_2 = 0.327907$$

$$d_3 = d_4 = d_5 = 0$$

$21 \leq n \leq 2000$  のとき

$$d_0 = 0.480385$$

$$d_1 = 0.318828$$

$$d_2 = 0$$

$$d_3 = -0.0241665$$

$$d_4 = 0.00879701$$

$$d_5 = 0.002989646$$

$\mu_y$  および  $\sigma_y$  は次式で与えられる。対数は自然対数である。

$$\log \mu_y = \sum_{i=0}^5 e_i (\log n - D)^i \quad (88)$$

係数  $e_i$  は次の通りである。

$7 \leq n \leq 20$  のとき

$$e_0 = -0.37542$$

$$e_1 = -0.492145$$

$$e_2 = -1.124332$$

$$e_3 = -0.199422$$

$$e_4 = e_5 = 0$$

$21 \leq n \leq 2000$  のとき

$$e_0 = -1.91487$$

$$e_1 = -1.37888$$

$$e_2 = -0.04183209$$

$$e_3 = 0.1066339$$

$$e_4 = -0.03513666$$

$$e_5 = -0.01504614$$

$$\log \sigma_y = \sum_{i=0}^5 f_i (\log n - D)^i \quad (89)$$

係数  $f_i$  は次の通りである。

$7 \leq n \leq 20$  のとき

$$f_0 = -3.15805$$

$$f_1 = 0.729399$$

$$f_2 = 3.01855$$

$$f_3 = 1.558776$$

$$f_4 = f_5 = f_6 = 0$$

$21 \leq n \leq 2000$  のとき

$$f_0 = -3.73538$$

$$f_1 = -1.015807$$

$$f_2 = -0.331885$$

$$f_3 = 0.1773538$$

$$f_4 = -0.01638782$$

$$f_5 = -0.03215018$$

$$f_6 = 0.003852646$$

このようにして、 $n$ が与えられれば、(87)式、(88)式、(89)式によって $\lambda$ 、 $\mu_y$ 、 $\sigma_y$ が得られる。そして(85)式、(86)式より

$$P(Z > z_\alpha) = \alpha$$

は

$$P(W < w_\alpha) = \alpha$$

に等しい。ここで

$$w_\alpha = 1 - (\mu_y + \sigma_y z_\alpha)^{\frac{1}{2}} \quad (90)$$

である。したがって $W$ 検定において $W$ の百分位点の表をみなくても、(90)式で $w_\alpha$ を計算するか、あるいは

$$z_0 = \frac{(1-W)^2 - \mu_y}{\sigma_y}$$

の有意確率 $P(Z > z_0)$ を計算すればよい。

このShapiro-Wilkの $W$ 検定は、Shapiro, Wilk and Chen [36]によって、他の検定統計量にくらべて検定力が一番大きいことが確認されている。D'Agostino [15]は、この $W$ 検定に「この分野における1930年以来最高の真に革新的な業績」と高い評価を与えた。回帰モデルの誤差項の正規性を $r_{(i)}$ と $\mu_{(i)}$ あるいは $t_{(i)}$ と $\mu_{(i)}$ の正規確率プロットによって検定するとき、 $r_{(i)}$ と $\mu_{(i)}$ あるいは $t_{(i)}$ と $\mu_{(i)}$ の一次関係を測る尺度として、この $W$ 統計量はきわめて有力な検定統計量である。

Shapiro-Wilkの $W$ は $Y_{(i)}$ の $\mu_{(i)}$ への回帰

$$Y_{(i)} = \mu + \sigma \mu_{(i)} + \varepsilon_i$$

において  $\sigma$  を GLS で推定する場合に定義されたが, Shapiro-Francia [37] は  $\sigma$  を OLS で推定するときに定義される決定係数  $W'$  を正規性の検定統計量として提唱した。すなわち

$$W' = \frac{\left\{ \sum_{i=1}^n b_{(i)} Y_{(i)} \right\}^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2} \quad (91)$$

$$b' = (b_1 \cdots b_n) = \frac{\mathbf{m}'}{(\mathbf{m}' \mathbf{m})^{\frac{1}{2}}}$$

である。彼等は  $W'$  の百分位点を  $n=35(15)50(2)99$  に対して与えた。 $W'$  は  $W$  のように  $\mathbf{V}$  の知識を必要とせず, ランキッツから  $b_i$  を求めれば良いだけであるから計算はきわめて簡単であり, しかも  $W$  と  $W'$  の百分位点は類似している。とくに  $n$  が大きいとき  $Y_{(i)}$  は独立であるかのようにあつかうことができるから  $W$  と  $W'$  の相違は小さくなり  $W'$  を用いても良い (Weisberg et al. [41])。

## 10 正規性の検定 (4)——D'Agostino 検定

D'Agostino [13] は次の  $D$  統計量による正規性の検定を与えた。

$$D = \frac{T}{n^2 S} \quad (92)$$

ここで

$$T = \sum_{i=1}^n \left\{ i - \frac{1}{2}(n+1) \right\} Y_{(i)}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{n}$$

$Y_{(i)}$  は  $Y_i$  の順序化された値

$$Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq \cdots \leq Y_{(n)}$$

(92)式を 2 乗すれば

$$D^2 = \frac{\left\{ \sum_{i=1}^n b_i Y_{(i)} \right\}^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} \quad (93)$$

ここで

$$b_i = \frac{i - \frac{1}{2}(n+1)}{n^{\frac{3}{2}}}$$

と表すことができるから, (93)式と (75)式を比較すればわかるように,  $D^2$  と  $W$  は類似している。しかし  $W$  を求めるためには, (74)式で示されているように,  $c_i$  の計算にランキッツ  $m_i$  と順序化標準正規変数の分散共分散行列  $\mathbf{V}$  の情報を必要とする。これに対して (93)式の  $b_i$  は簡単に求めることができる。したがって計算は  $D$  の方がはるかに  $W$  より簡単である。

もし  $Y_i$  が正規母集団からの無作為標本であるならば、

$$E(D) = \frac{(n-1)}{2\sqrt{2n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n\right)} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} = 0.2820948$$

$$D \text{ の漸近的分散 } av(D) = \frac{12\sqrt{3} - 27 + 2\pi}{24\pi n} = \left(\frac{0.02998598}{\sqrt{n}}\right)^2$$

となる。 $E(D)$  および  $av(D)$  の次のような十分な近似が Wetherill [43] によって与えられた。

$$E(D) = 0.2820948 - \frac{0.07052370}{n} + \frac{0.008815462}{n^2} + \frac{0.01101933}{n^3} - \frac{0.002892575}{n^4} \quad (94)$$

$$av(D) = \frac{0.0008991591}{n} - \frac{0.0004779168}{n^2} - \frac{0.004973592}{n^3} + \frac{0.003108496}{n^4} \quad (95)$$

したがって

$$X = \frac{D - E(D)}{\sqrt{av(D)}}$$

は近似的な標準変数である。もし正規性の帰無仮説が間違っていれば、 $X$  は 0 と有意に異なるであろう。D'Agostino のシミュレーションによれば、母集団分布が  $\beta_2 > 3$  の非正規分布の場合には  $X$  は 0 より小さい値をとり、 $\beta_2 < 3$  の非正規分布の場合には  $X$  は 0 より大きくなる。

D'Agostino [13] は、0.5, 1, 2.5, 5, 10, 90, 95, 97.5, 99, 99.5%,  $n=50(10)100(50)1000$  に対して  $X$  のパーセント点を与え、[14] で  $n=10(2)50(10)100$  について  $X$  のパーセント点を与えている。

$D$  のパーセント点を参照しなくても次のような方法によって正規性の検定が可能である。 $D_p, Z_p$  をそれぞれ  $D, Z$  (標準正規変数) の 100  $p$  パーセント点とすれば

$$D_p = E(D) + V_p \sqrt{\mu_2(D)} \quad (96)$$

ここで  $\mu_2(D)$  は  $D$  の分散

と表すことができる。なぜならば、 $D$  を規準化した

$$X = \frac{D - E(D)}{\sqrt{\mu_2(D)}}$$

の 100  $p$  パーセント点を  $V_p$  とすれば

$$\begin{aligned} P(X \leq V_p) &= P(D \leq E(D) + V_p \sqrt{\mu_2(D)}) \\ &= P(D \leq D_p) \\ &= p \end{aligned}$$

となるからである。ここで  $V_p$  は  $Z_p$  と近似的に次の関係がある。

$$V_p = Z_p + \frac{r_1(Z_p - 1)}{6} + \frac{r_2(Z_p^3 - 3Z_p)}{24} - \frac{r_3(2Z_p^5 - 5Z_p)}{36} \quad (97)$$

ここで、 $r_1, r_2$  はそれぞれ  $D$  の 3 次キュミュラント、4 次キュミュラントである。

検定の有意水準を  $\alpha$  とすれば、 $p = \alpha/2$  および  $p = 1 - \alpha/2$  において  $D_p$  を求め、 $D$  が  $(D_{\alpha/2},$

$D_{1-\alpha/2}$ )の外へ落ちれば、母集団分布は正規であるという帰無仮説を棄却する。 $\beta_2 > 3$ の非正規分布のとき  $D$  は  $D_{\alpha/2}$  より小さくなり、 $\beta_2 < 3$ の非正規分布においては  $D$  は  $D_{1-\alpha/2}$  より大きくなる。

さて以上の  $D$  による正規性検定の手続きは次の通りである。

- ①  $D^2$  を (93)式によって計算し、正の平方根  $D$  を求める。
- ② 有意水準  $\alpha$  を与え、 $p=1-\alpha/2$  とし、 $Z_p$  = 標準正規分布の右片側  $100p$  パーセントの値を求める。
- ③  $E(D)$  を (94)式、 $\mu_2(D)$  を (95)式によって求める。
- ④  $r_1, r_2$  を次式で求める (Wetherill [43])。

$$\begin{aligned} r_1 &= -\frac{8.5836542}{\sqrt{n}} \left\{ 1 - \frac{3.938688}{n} + \frac{7.344405}{n^2} \right\} \\ r_2 &= \frac{114.732}{n} \left\{ 1 - \frac{8.38004}{n} \right\} \end{aligned} \quad (98)$$

- ⑤  $D_p$  を (96)式によって求める。
- ⑥  $V_p$  を (97)式によって求める。
- ⑦  $D_p$  を  $D_{1-\alpha/2}$  とする。
- ⑧  $-Z_p (=Z_\alpha)$  を  $Z_p$  とおいて②から⑥をくりかえし、 $D_p$  を  $D_{\alpha/2}$  とする。
- ⑨  $D < D_{\alpha/2}$  のとき  $\beta_2 > 3$  の非正規分布。  
 $D > D_{1-\alpha/2}$  のとき  $\beta_2 < 3$  の非正規分布。

と判断する。

この D'Agostino の  $D$  検定は、他の検定量にくらべ、 $\beta_2 > 3$  の分布に対してもっとも検定力が高いことが、モンテ・カルロ実験によって確かめられている。 $\beta_2 > 3$  という長い尾をもつ分布においては「外れ値」が発生しやすく、その「外れ値」に対して  $OLS$  は敏感に反応し、最小 2 乗推定量の有効性は著しく低下するということがわれわれの関心事であった。したがって、 $\beta_2 > 3$  の非正規分布に対する検出力の高い D'Agostino の  $D$  は計量経済学においても標準的な正規性検定統計量として用いられるべきである。

## 11 正規性の検定 (5)——積率検定

正規性からの乖離を 3 次および 4 次モーメントによって特徴づけるというアイデアは K. Pearson [29] による。正規分布のとき歪度  $\sqrt{b_1} = 0$ 、尖度  $\beta_2 = 3$  である。この関係が成立しているかどうかを標本歪度  $\sqrt{b_1}$ 、標本尖度  $b_2$  にもとづいて正規性の検定を行うのが積率検定である。ここで

$$\sqrt{b_1} = \frac{m_3}{m_2^{3/2}} \quad (99)$$

$$b_2 = \frac{m_4}{m_2^2} \quad (100)$$

$$m_i = \frac{\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^i}{n}, \quad i=2, 3, 4 \quad (101)$$

である。 $\sqrt{b_1}$ ,  $b_2$  を用いる正規性検定の詳細は Bowman and Shenton [10] に譲り, 正規性の検定方法として私が検討した統計量についてのみ, 主要な結果を示しておこう。<sup>(1)</sup>

(1)  $\sqrt{b_1}$  による検定

歪度  $\sqrt{\beta_1}$  の推定値  $\sqrt{b_1}$  によって分布の非対称性を検定することができる。D'Agostino [13] は  $n \geq 8$  のとき,  $\sqrt{b_1}$  を次のように変換することによって,  $H_0: \sqrt{\beta_1} = 0$  を正規検定することができることを示した。

$$Z = \delta \log \left\{ \frac{Y}{\alpha} + \left[ \left( \frac{Y}{\alpha} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (102)$$

ここで

$$\begin{aligned} Y &= \sqrt{b_1} \left\{ \frac{(n+1)(n+3)}{6(n-2)} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \gamma &= \frac{3(n^2 + 27n - 70)(n+1)(n+3)}{(n-2)(n+5)(n+7)(n+9)} \\ B^2 &= -1 + \left\{ 2(\gamma - 1) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ \delta &= \frac{1}{\sqrt{\log B}} \\ \alpha &= \left\{ \frac{2}{(B^2 - 1)} \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

対立仮説が  $H_1: \sqrt{\beta_1} > 0$  あるいは  $H_1: \sqrt{\beta_1} < 0$  の場合には片側検定,  $H_1: \sqrt{\beta_1} \neq 0$  ならば両側検定になる。

$\sqrt{b_1}$  の  $t$  分布近似については D'Agostino and Tietjen [19] をみよ。柴田 [38] は  $\sqrt{b_1}$  の  $H_0$  のもとでの分布のエッジワース展開から  $\sqrt{b_1}$  のパーセント点を  $n = 30(5)50(10)100(50)1000$  について示している。

(2)  $b_2$  による検定

尖度  $\beta_2$  の推定値  $b_2$  が 3 と有意に異なるかどうかを調べることによって急尖的分布 ( $\beta_2 > 3$ ) か緩尖的分布 ( $\beta_2 < 3$ ) かを検定することができる。

$$E(b_2) = \frac{3(n-1)}{n+1} \quad (103)$$

$$\text{var}(b_2) = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)} \quad (104)$$

注 (1) 以下, 本節の内容は主として Bowman and Shenton [10], D'Agostino [13], Wetherill [43] に依る。

で与えられるから,

$$Y = \frac{b_2 - E(b_2)}{\sqrt{\text{var}(b_2)}}$$

は漸近的に標準正規分布に従うが, この近似は十分大きい  $n$  (1000をこえる  $n$ ) のときのみ有効である。したがって有限標本におけるもっと精度の高い近似が必要とされる。Anscombe and Glynn [3] は  $n \geq 20$  に対して次のような標準正規分布による近似を与えた。

$$Z = \frac{\left(1 - \frac{2}{9A}\right) - \left[\frac{1 - (2/A)}{1 + Y\sqrt{2/(A-4)}}\right]^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{2/9A}} \quad (105)$$

ここで

$$A = 6 + \frac{8}{k_3} \left[ \frac{2}{k_3} + \sqrt{1 + \left(\frac{2}{k_3}\right)^2} \right]$$

$$k_3 = \frac{6(n^2 - 5n + 2)}{(n+7)(n+9)} \sqrt{\frac{6(n+3)(n+5)}{n(n-2)(n-3)}}$$

であり,  $Y$  は前述の規準化された変数である。

モンテ・カルロ実験による  $b_2$  のパーセント点は  $n=7$  から50までが, D'Agostino and Tietjen [18],  $n=200$  まで拡張した点が D'Agostino and Pearson [16] に,  $b_2$  の漸近分布のエッジワース展開によるパーセント点は柴田 [38] に示されている。

(3)  $\sqrt{b_1}$  と  $b_2$  のオムニバステスト

正規分布は  $\sqrt{\beta_1} = 0$  かつ  $\beta_2 = 3$  であるから, 正規性の検定に  $\sqrt{b_1}$  と  $b_2$  を別々に用いないで同時に用いるオムニバステストがある。 $\sqrt{b_1}$  と  $b_2$  は漸近的には独立であるから (Bowman and Shenton [10]),  $Z(\sqrt{b_1})$ ,  $Z(b_2)$  をそれぞれ  $\sqrt{b_1}$ ,  $b_2$  の規準化された変数とすれば

$$Z^2(\sqrt{b_1}) + Z^2(b_2) \quad (106)$$

は自由度2のカイ2乗分布をするとみなすことができる。

Bowman and Shenton [9] は

$$\frac{nb_1}{6} + \frac{n(b_2 - 3)^2}{24} \quad (107)$$

を, Gurland and Dahiya [25] は

$$\frac{nb_1}{6} + \frac{3n}{8} \left[ \log\left(\frac{b_2}{3}\right) \right]^2 \quad (108)$$

を自由度2のカイ2乗分布に従う検定統計量として提唱した。また前述の(102)式の  $Z$  を,  $Z(\sqrt{b_1})$ , (105)式の  $Z$  を  $Z(b_2)$  とすれば, (106)式は自由度2のカイ2乗検定統計量となる。

## 12 正規性の検定 (6)——Anderson-Darling 検定

Anderson-Darling [1] によって与えられた  $A^2$  検定とは次のような  $n \geq 8$  に対して有効な検定方法である。

- (1) 観測データ  $X_1, X_2, \dots, X_n$  を大きさの順に並べかえる。

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$$

- (2)  $X_{(i)}$  を標準化する。

$$Z_{(i)} = \frac{X_{(i)} - \bar{X}}{s}$$

- (3) 次の  $p_i$  を計算する。

$$p_i = \Phi(Z_{(i)}) = \int_{-\infty}^{Z_{(i)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

- (4) Anderson-Darling 統計量  $A^2$  を求める。

$$A^2 = - \sum_{i=1}^n \left\{ (2i-1) [\log p_i + \log (1-p_{n+1-i})] / n \right\} - n \quad (109)$$

- (5) 修正統計量  $A^*$  を計算する。

$$A^* = A^2(1.0 + 0.75/n + 2.25/n^2) \quad (110)$$

- (6) 有意水準 0.10, 0.05, 0.025, 0.01, 0.005 でそれぞれ  $A^*$  が, 0.631, 0.752, 0.873, 1.035, 1.159 をこえれば, 正規分布という帰無仮説を棄却する。

## 13 検定統計量の検定力

さて以上の正規性検定統計量の検定力を比較するため, 表9の6種類の非正規分布からの標本にもとづいて正規性の検定を行うことにしよう。1組の標本データを用いる検定であって, 膨大な何百組もの標本にもとづくモンテ・カルロ実験ではないが, 各検定統計量の特徴はかなり顕著に現れている。用いた標本データは表9と同じである。6種類の非正規分布と検定統計量の値は表20に示されている。次の点を表から読みとることができる。

- ① D'Agostino および Geary の検定力は高い。
- ②  $\beta_2 \approx 3$  のワイブルを除き,  $\beta_2 > 3$  の非正規分布を検出しているのは D'Agostino だけである。
- ③ Geary も  $\beta_2 \approx 3$  の非正規分布を検出する力は強いが, 指数分布に対しては検定力が弱い。
- ④  $\sqrt{\beta_1} \approx 0$  の非対称性は  $\sqrt{b_1}$  によって検出される。
- ⑤  $\beta_2 \approx 3$  の非正規性は  $b_2$  によって検出される。



表20 非正規分布と検定統計量

分布 検定統計量	一様 0, 1.8	指数 2, 9	ロジスティック 0, 4.2	ジョーンソン 無限SU(0,2) 0, 4.51	ジョーンソン 無限SU(1,2) -0.87, 5.59	ワイブル 0.63, 3.25
Shapiro-WilkのW	0.9103 **	0.8437 ***	0.9572	0.9505	0.9176 **	0.9575
D'AgostinoのD	0.283478	0.264336 **	0.264842 **	0.263249 **	0.257969 ***	0.279238
Anderson-DarlingのA*	0.852 **	1.703 ***	0.553	0.675	0.667 *	0.341
GearyのG	0.861 *	0.805	0.719 **	0.709 **	0.691 ***	0.808
$\sqrt{b_1}$	-0.413	1.137 ***	0.276	-0.248	-1.161 ***	0.509 *
b <sub>2</sub>	1.843 **	3.234	4.867 **	4.909 **	6.566 ***	3.031
カイ2乗1	2.525	6.534 **	4.737 *	4.862 *	22.632 ***	1.297
カイ2乗2	3.522	6.529 **	3.015	3.036	13.641 ***	1.297
カイ2乗3	4.946 *	2.993	4.787 *	4.859 *	10.935 ***	0.877

注(1) 各分布の数値, たとえば一様分布の0, 1.8はそれぞれ,  $\sqrt{\beta_1}$ ,  $\beta_2$  を表す。

(2) カイ2乗1は(107)式, カイ2乗2は(108)式, カイ2乗3は(106)式(ただし  $Z(b_1)=(102)$ 式,  $Z(b_2)=(105)$ 式)。

(3) \* は10%, \*\* は5%, \*\*\* は1%で有意。

⑥  $\sqrt{\beta_1} \neq 0$ ,  $\beta_2 \neq 3$  の非正規分布に対する検定力は Shapiro-Wilk が高い。

⑦ 3通りのカイ2乗検定の中ではカイ2乗1の検定力が高いが, カイ2乗1で非正規性が検出された分布はすべてもっと有意に D'Agostino によって検出される。

以上の評価は1標本にもとづいているにすぎないから確定的な結論とすべきではない。モンテ・カルロ実験による検定統計量の検定力の比較は D'Agostino [13], Green and Hegazy [24], Pearson et al. [31], Shapiro, Wilk and Chen [36], White and Macdonaldo [44] などで試みられている。D'Agostino [17] から検定力に関して主要な結果をまとめれば次の通りである。

① 正規性からの乖離を歪度  $\sqrt{\beta_1} \neq 0$ , 尖度  $\beta_2 \neq 3$  によって表すとき, 正規性からのあらゆる可能な乖離 ( $\sqrt{\beta_1} \neq 0$  で  $\beta_2 > 3$ ,  $\sqrt{\beta_1} \neq 0$  で  $\beta_2 < 3$ ,  $\sqrt{\beta_1} \neq 0$  で  $\beta_2 \neq 3$ ,  $\sqrt{\beta_1} < 0$  で  $\beta_2 > 3$  等々) に対して検定力が一樣に強力な最適の検定統計量はない。

② 対立仮説  $H_1: \sqrt{\beta_1} \neq 0$  の非正規性に対しては Shapiro-Wilk の  $W$  および Shapiro-Francia の  $W'$  が最強力である。歪みの方向に関して情報が利用可能 ( $\sqrt{\beta_1} < 0$  あるいは  $\sqrt{\beta_1} > 0$ ) のとき, 母集団分布が非正規で正の歪み ( $\sqrt{\beta_1} > 0$ ) をもつという  $H_1$  に対しては  $\sqrt{b_1}$  の上側確率にもとづく

検定, 負の歪み ( $\sqrt{\beta_1} < 0$ ) という  $H_1$  に対しては  $\sqrt{b_1}$  の下側確率による検定が非常に検定力が高い。

③ D'Agostino の  $D$  は, 対称的ではあるが  $\beta_2 > 3$  の非正規分布に対してもっとも検定力が高い。

④ Geary 検定は, 対称ではあるが  $\beta_2 \approx 3$  の非正規分布に対して高い検定力をもつが, 通常,  $b_2$  の方が Geary より検定力が高い。

⑤ カイ 2 乗検定は他の検定統計量より検定力は低い。

⑥ Anderson-Darling の  $A^2$  はしばしば  $W$  と同じ検定力をもつが,  $A^2$  の検定力に関しては十分な研究が少ない。

計量経済学の回帰モデルにおける OLS によるパラメータ推定および検定にとって重要な正規性からの乖離は, 「外れ値」を発生させやすい長い尾をもつ分布 ( $\beta_2 > 3$  の分布) であることを考えると,  $\sqrt{\beta_1} = 0$ ,  $\beta_2 > 3$  の非正規分布に高い検定力をもつ D'Agostino の  $D$ こそ重要な検定統計量である。この D'Agostino の  $D$  と正規確率プロットによって正規分布より長い尾をもつ分布でないかどうかを検定し,  $\sqrt{\beta_1} = 0$ ,  $\beta_2 > 3$  が検出されたときには頑健推定を行なうという手続きが計量経済学の標準的方法として採用されるべきであろう。

歪度および尖度を含めた非正規性の検定には Shapiro-Wilk の  $W$  あるいは Shapiro-Francia の  $W'$  を用いると良い。しかしこの  $W$  あるいは  $W'$  によって非正規性が検出されたときわれわれは何をなすべきなのか?

#### 14 最小 2 乗残差を用いる正規性検定

正規性の検定統計量を標本から計算するとき, 標本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  は同一の分布に従い, 統計的に独立と仮定されている。ところが線形回帰モデルの最小 2 乗残差  $e_1, e_2, \dots, e_n$  は

$$\begin{aligned}\text{var}(e_i) &= (1 - h_{ii})\sigma^2 \\ \text{cov}(e_i, e_j) &= -h_{ij}\sigma^2 \quad i \neq j \\ h_{ij} &= \text{ハット行列の } (i, j) \text{ 要素}\end{aligned}\tag{111}$$

をもち, 独立でもなければ均一分散でもない。しかし  $k$  (説明変数の数) にくらべて  $n$  が十分大きければ  $e_1, e_2, \dots, e_n$  の変動は誤差項  $u_1, u_2, \dots, u_n$  の変動とほぼ同じとみなすことができるから, 正規性の検定を最小 2 乗残差に適用することができる。

しかしわれわれは有限標本の世界に住んでいる。どれぐらいの標本の大きさがあれば最小 2 乗残差を正規性の検定に用いることができるのか? White and Macdonald [44], Pierce and Gray [32] のシミュレーションによれば,  $k=4\sim 6$  のとき  $n=20$ ,  $k=8$  のとき  $n=40$  ぐらいでも, 最小 2 乗残差を用いる正規性の検定において, 検定の大きさ size (第 I 種の過誤確率) は余り変わらないということが示されている。

$n$  が大きくなれば  $e_i$  の相関の問題は小さくなるが, 他方で超正規性 supernormality の問題が

生ずる。最小2乗残差  $e$  は

$$e_i = u_i - \sum_{j=1}^n h_{ij} u_j$$

と誤差項  $u$  の和として表すことができるから、中心極限定理により  $u$  が正規分布をしていなくても  $e_i$  は正規性を示すようになる。Gnanadesikan [23] は  $e$  のこの性質を超正規性とよんだ。  $e$  のこの超正規性によって、  $H_0: u$  は正規分布する、という仮説を棄却しない確率は高くなるから、  $e$  を用いる正規性検定において有意水準を 0.01 のように小さくすると、第II種の過誤確率 ( $H_1$ : 非正規分布が真のときこの  $H_1$  を採択しないという確率) は非常に大きくなる。したがって最小2乗残差  $e$  を用いる正規性検定の有意水準は10%ぐらいが良い。

最後に、最小2乗残差  $e_1, \dots, e_n$  は  $n$  が大きくなっても不均一分散であるから、均一分散をもつ学生化残差  $r_i$  あるいは  $t_i$  を用いて正規性検定の統計量の値を計算する方がよい。このことは Wetherill [43] による広範囲にわたるシミュレーションによって確かめられている。

結局、計量経済分析における線形回帰モデルの説明変数の数  $k$  は 2~4 ぐらいが多いことを考えると  $n$  は 20 以上、  $W, W', D$  および  $A^2$  の検定統計量の計算には (残差  $e_i$  ではなく) 学生化残差  $r_i$  あるいは  $t_i$  を用い、有意水準は 10% ぐらいで実行すれば良い。誤差項が 1 階の自己回帰過程

$$\begin{aligned} u_t &= \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \\ |\rho| &< 1 \\ E(\varepsilon_t) &= 0 \\ E(\varepsilon_t \varepsilon_s) &= \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2 & t=s \\ 0 & t \neq s \end{cases} \end{aligned}$$

に従っている場合は、Prais-Winsten 変換後の推定結果 (GLS) の残差を用いて誤差項の正規性検定を行うことができる。

## 15 線形回帰モデルの誤差項の正規性検定

6本の線形回帰モデルの誤差項の正規性を検定しよう。Shapiro-Wilk の  $W$ , D'Agostino の  $D$ , Anderson-Darling の  $A^*$  の計算には学生化残差  $t_i$ , その他の検定統計量の計算には残差  $e_i$  を用いた。6本の回帰モデルのうち2本は (39) 式と (40) 式であり、その他の4本は次式である。

$$\log VL \ 63 = 5.5496 + 0.41550 \log KL \ 63 \quad (112)$$

$$(14.859)(10.477)$$

$$\bar{R}^2 = 0.685, \quad s = 0.167$$

昭和63年の製造業51産業

ここで

VL 63<sub>i</sub> = i産業の従業員1人当り粗付加価値額

(昭和63年, 千円)

KL 63<sub>i</sub> = i産業の労働装備率(昭和63年, 千円)

$\log QXUJ\$ = 4.5915 + 0.89770 \log GNPJ\$88$   
(3.633) (12.125)

$-0.81271 \log PXUWPIJ_{-1}$   
(-4.048)

(113)

$\bar{R}^2 = 0.939, s = 0.0851, DW = 1.629$

推定期間 1967年~1988年

ここで

$QXUJ\$$  = アメリカから日本への輸出数量

(1988年基準, 億ドル)

$GNPJ\$88$  = 日本の実質GNP(1988年基準, 100

億ドル)

$PXUWPIJ = PXUSA88 / WPIJ\$88$

$PXUSA88$  = アメリカの輸出価格指数(1988年

=100)

$WPIJ\$88$  = 日本の卸売物価指数(1988年=100,

ドル表示)

$GNPHL DOT = -6.088 + 0.7962 IFKF21$   
(-4.642)(8.932)

(114)

$\bar{R}^2 = 0.782, s = 1.50, DW = 1.729$

推定期間 1966年度~1988年度

ここで

$GNPHL DOT = \frac{GNP2}{H \cdot L}$  の対前年変化率(%)

$GNP2$  = 実質GNP(兆円)

$H$  = 全産業の総実労働時間指数(1980年=100)

$L$  = 就業者数(100万人)

$IFKF21 = \frac{IF2}{KF2_{-1}}$  (%)

$IF2$  = 民間設備投資(1980年基準, 兆円)

$KF2$  = 全産業粗資本ストック(取付ベース,

1980年基準, 兆円)

表21 (112) 式のデータ

	KL63 (千円)	VL63 (千円)
1	+1.7402000D+04	+1.4122000D+04
2	+2.2934000D+04	+1.3476000D+04
3	+1.0463000D+04	+1.0404000D+04
4	+2.8132000D+04	+2.1301000D+04
5	+1.5803000D+04	+1.5189000D+04
6	+1.6049000D+04	+1.4199000D+04
7	+8.0020000D+03	+7.3970000D+03
8	+1.0594000D+04	+1.3275000D+04
9	+6.8720000D+03	+9.7770000D+03
10	+3.1735000D+04	+1.7633000D+04
11	+1.6012000D+04	+1.4187000D+04
12	+2.6717000D+04	+1.8345000D+04
13	+2.2724000D+04	+1.4368000D+04
14	+1.7261000D+04	+1.6889000D+04
15	+1.5081000D+04	+1.1695000D+04
16	+1.0851000D+04	+1.2222000D+04
17	+8.1140000D+03	+1.5959000D+04
18	+1.4344000D+04	+1.9640000D+04
19	+6.5225000D+04	+3.5885000D+04
20	+9.1190000D+03	+1.2745000D+04
21	+9.3780000D+03	+8.9690000D+03
22	+2.1246000D+04	+1.8945000D+04
23	+4.9060000D+04	+2.2367000D+04
24	+8.3240000D+03	+1.1647000D+04
25	+3.0117000D+04	+1.7202000D+04
26	+1.0772000D+04	+1.1680000D+04
27	+1.3501000D+04	+1.1790000D+04
28	+2.1107000D+04	+1.4739000D+04
29	+1.6650000D+04	+1.4282000D+04
30	+9.3530000D+03	+1.1499000D+04
31	+2.0287000D+04	+1.2343000D+04
32	+1.0547000D+04	+1.3506000D+04
33	+8.5740000D+03	+1.0726000D+04
34	+8.6730000D+03	+1.0165000D+04
35	+7.8270000D+03	+9.7350000D+03
36	+9.1170000D+03	+1.0559000D+04
37	+6.0110000D+03	+1.1529000D+04
38	+3.8780000D+03	+8.5720000D+03
39	+6.6000000D+03	+1.1962000D+04
40	+7.5220000D+03	+1.0867000D+04
41	+8.5530000D+03	+1.2877000D+04
42	+6.6430000D+03	+1.2215000D+04
43	+1.2262000D+04	+1.2935000D+04
44	+7.0290000D+03	+9.9720000D+03
45	+7.7920000D+03	+6.5320000D+03
46	+5.4720000D+03	+8.5510000D+03
47	+5.3790000D+03	+1.0564000D+04
48	+8.2230000D+03	+1.0652000D+04
49	+5.5220000D+03	+9.4890000D+03
50	+2.1144000D+04	+1.5986000D+04
51	+8.9210000D+03	+1.1473000D+04

表22 (113) 式のデータ

	GNPJ \$88 (100億ドル)	PXUWPIJ (-1) ('88CY=100)	QXUJ \$ (億ドル('88))
1967	+9.5497800D+01	+1.4955562D+02	+9.4200000D+01
1968	+1.0746100D+02	+1.4984575D+02	+1.0285500D+02
1969	+1.2046300D+02	+1.5046880D+02	+1.1772600D+02
1970	+1.3185700D+02	+1.5245249D+02	+1.4901100D+02
1971	+1.3754000D+02	+1.5486254D+02	+1.2555500D+02
1972	+1.4927900D+02	+1.5642206D+02	+1.4925800D+02
1973	+1.6106500D+02	+1.3923784D+02	+2.1295100D+02
1974	+1.5878000D+02	+1.2522625D+02	+2.1539600D+02
1975	+1.6302800D+02	+1.3081595D+02	+1.7170300D+02
1976	+1.7084700D+02	+1.4441558D+02	+1.7689800D+02
1977	+1.7996300D+02	+1.4182576D+02	+1.1775200D+02
1978	+1.8930500D+02	+1.3050624D+02	+2.0162700D+02
1979	+1.9931200D+02	+1.1230815D+02	+2.4257800D+02
1980	+2.0783800D+02	+1.2400648D+02	+2.5376900D+02
1981	+2.1547100D+02	+1.2360642D+02	+2.4078600D+02
1982	+2.2211400D+02	+1.2948730D+02	+2.2747300D+02
1983	+2.2931300D+02	+1.4533043D+02	+2.3468200D+02
1984	+2.4095200D+02	+1.4316338D+02	+2.4740600D+02
1985	+2.5227200D+02	+1.4561664D+02	+2.3741700D+02
1986	+2.5904400D+02	+1.4667722D+02	+2.4908100D+02
1987	+2.7060600D+02	+1.1513575D+02	+2.8816900D+02
1988	+2.8588800D+02	+1.0438840D+02	+3.6048000D+02

表23 (114) 式のデータ

	IFKF21 (%)	GNPHLDOT (%)
1966	+1.5728836D+01	+9.0968484D+00
1967	+1.8139268D+01	+8.9745644D+00
1968	+1.9493748D+01	+1.2599893D+01
1969	+2.2136675D+01	+1.2337235D+01
1970	+2.1771655D+01	+9.1429518D+00
1971	+1.8060009D+01	+6.5297178D+00
1972	+1.7035780D+01	+8.8405044D+00
1973	+1.7257583D+01	+3.7041820D+00
1974	+1.4250099D+01	+4.6658517D+00
1975	+1.2644115D+01	+4.0317298D+00
1976	+1.1879052D+01	+2.8834703D+00
1977	+1.1238686D+01	+3.7391172D+00
1978	+1.1545667D+01	+3.5427358D+00
1979	+1.1972205D+01	+3.4044692D+00
1980	+1.2055465D+01	+3.3774566D+00
1981	+1.1742474D+01	+2.7927111D+00
1982	+1.1205099D+01	+2.1885574D+00
1983	+1.1072287D+01	+1.9124707D+00
1984	+1.1592854D+01	+4.0721631D+00
1985	+1.2261823D+01	+3.6786321D+00
1986	+1.1302821D+01	+2.5627984D+00
1987	+1.1661634D+01	+2.9786544D+00
1988	+1.2551290D+01	+4.5613760D+00

表24 (115) 式のデータ

	GNP 2 (兆円)	RD 2 (%)	M 2 C D 2 (-1) (兆円(年央))	M 2 C D 2 (兆円(年央))
1966	+1.0003340D+02	+7.6300000D+00	+6.3061389D+01	+6.9995391D+01
1967	+1.1097360D+02	+8.2300000D+00	+6.9995391D+01	+7.6524672D+01
1968	+1.2599640D+02	+8.5700000D+00	+7.6524672D+01	+8.4627092D+01
1969	+1.4140240D+02	+8.9700000D+00	+8.4627092D+01	+9.3752768D+01
1970	+1.5391540D+02	+9.0400000D+00	+9.3752768D+01	+1.0405623D+02
1971	+1.6168810D+02	+7.5000000D+00	+1.0405623D+02	+1.2030671D+02
1972	+1.7662790D+02	+6.7600000D+00	+1.2030671D+02	+1.4048672D+02
1973	+1.8456930D+02	+9.5500000D+00	+1.4048672D+02	+1.4519984D+02
1974	+1.8379780D+02	+1.1300000D+01	+1.4519984D+02	+1.3809906D+02
1975	+1.9087470D+02	+9.2900000D+00	+1.3809906D+02	+1.4773034D+02
1976	+1.9963010D+02	+8.9100000D+00	+1.4773034D+02	+1.5663689D+02
1977	+2.1023440D+02	+7.0000000D+00	+1.5663689D+02	+1.6576812D+02
1978	+2.2124300D+02	+6.6800000D+00	+1.6576812D+02	+1.7745529D+02
1979	+2.3287830D+02	+8.2000000D+00	+1.7745529D+02	+1.9229276D+02
1980	+2.4213090D+02	+8.9800000D+00	+1.9229276D+02	+1.9892534D+02
1981	+2.5015880D+02	+8.3400000D+00	+1.9892534D+02	+2.1126031D+02
1982	+2.5824090D+02	+8.0100000D+00	+2.1126031D+02	+2.2678662D+02
1983	+2.6769970D+02	+7.4000000D+00	+2.2678662D+02	+2.4271747D+02
1984	+2.8139890D+02	+7.0400000D+00	+2.4271747D+02	+2.5945930D+02
1985	+2.9398180D+02	+6.5700000D+00	+2.5945930D+02	+2.7701868D+02
1986	+3.0184640D+02	+5.1700000D+00	+2.7701868D+02	+2.9578018D+02
1987	+3.1810920D+02	+4.2900000D+00	+2.9578018D+02	+3.2721856D+02
1988	+3.3496880D+02	+4.3300000D+00	+3.2721856D+02	+3.5997276D+02

$$\log M 2 C D 2 = -0.24164 + 0.4687 \log G N P 2 - 0.022437 R D 2 + 0.60641 \log M 2 C D 2_{-1}$$

(-1.243) (4.428)
(-7.982)
(8.106)

(115)

$$\bar{R}^2 = 0.998, s = 0.0184, DW = 1.436 (h = 1.654)$$

推定期間 1966年度～1988年度

ここで

$M 2 C D 2$  = 名目のマネーサプライ  $M 2 + C D$  (未残) の対前年度との平均を  $GNP$  デフレーターでデフレート (兆円)

$GNP 2$  = 実質  $GNP$  (兆円)

$RD 2$  = 電々債利回り (年利%)

推定に用いたデータは表21, 表22, 表23, 表24 に示した。(39)式と (40)式のデータはそれぞれ表11および表12に示されている。

正規性検定のための正規確率プロットは図22, 図23, 図34, 図35, 図36, 図37に示されている。(39)式および (40)式の正規確率プロットについてはすでに6節で述べた。図34 および 図36 は 図14(c)のパターン ( $\beta_2 > 3$ ), 図35は図14(e)のJ型 ( $\sqrt{\beta_1} > 0$ ), 図37のパターンは必ずしも明瞭ではないが図14(d)の逆J型 ( $\sqrt{\beta_1} < 0$ ) に近い。正規確率プロットのみでも, 非正規性と歪みの方向あるいはその長・短を知ることができる。

6本の最小2乗推定結果の残差あるいはスチューデント化残差  $e_i$  を用いて正規性検定のための検

図34 (112) 式の正規確率プロット

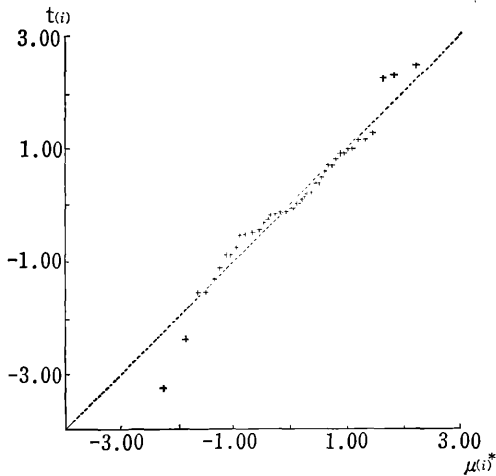


図35 (113) 式の正規確率プロット

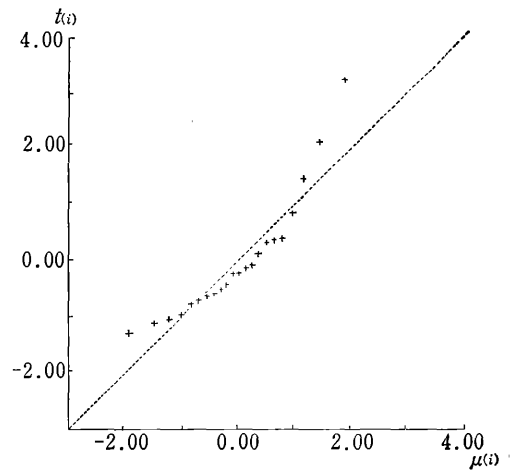


図36 (114) 式の正規確率プロット

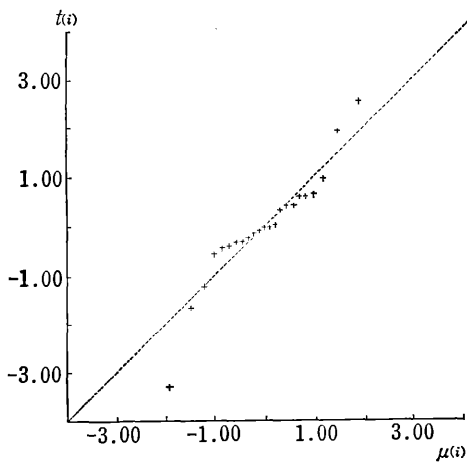
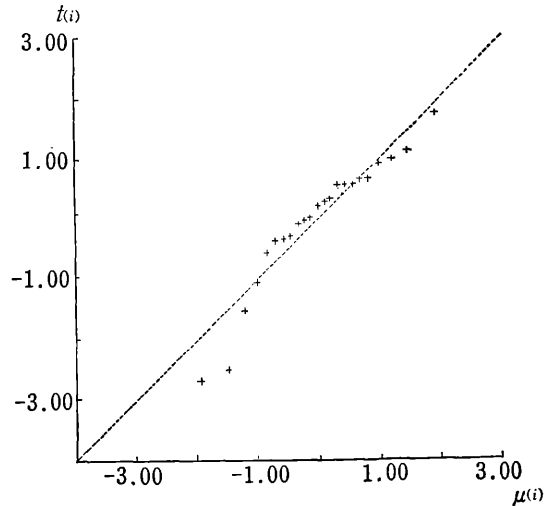


図37 (115) 式の正規確率プロット



定統計量の値を計算したのが表25である。表から次のことがわかる。

- (1) 検定結果は正規確率プロットが示している非正規性のパターンと一致している。
- (2)  $\beta_3 > 3$  は  $D$ ,  $G$ ,  $b_2$ ,  $A^*$  によって検出されている。
- (3)  $\beta_2 \approx 3$  を検出しているのは  $G$  と  $b_2$  である。
- (4)  $\sqrt{\beta_1} \approx 0$  は  $W$ ,  $\sqrt{b_1}$  によって検出されている。
- (5) Anderson-Darling の  $A^*$  によって非正規性が検出されるケースは  $D$  によっても検出されており、 $A^*$  を  $D$  と並んで使用すべき積極的理由はない。
- (6) カイ 2 乗 1, 2, 3 の検定によって非正規性が検出される可能性はきわめて小さい。

$\beta_2 > 3$  と判定された log VL 63 と GNPFLDOT の残差の箱型図を 38 図に示した。log VL 63

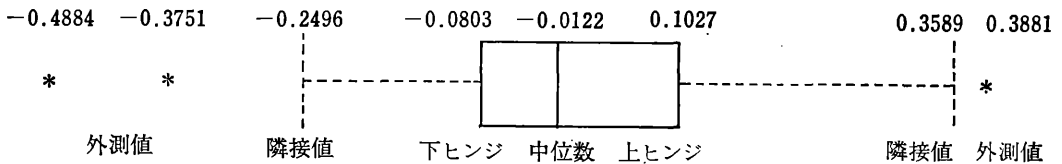
表25 線形回帰モデルの誤差項の正規性検定

回帰式 検定統計量	(112)式 n=51	(113)式 n=22	(39)式 n=22	(114)式 n=23	(115)式 n=23	(40)式 n=28
Shapiro-WilkのW	0.9623	0.8665 ***	0.8818 **	0.9171 *	0.9097 **	0.9523
D'AgostinoのD	0.267562 **	0.258860 **	0.244952 ***	0.255652 **	0.266117 *	0.235164
Anderson-DarlingのA*	0.660 *	0.938 **	0.907 **	0.755 **	0.751 *	0.570
GearyのG	0.731 **	0.765	0.675 ***	0.700 *	0.759	0.889 ***
$\sqrt{b_1}$	-0.196	1.218 **	0.105	-0.322	-0.933 **	-0.237
$b_2$	4.065 **	3.937	4.955 **	4.386 *	3.636	1.885 **
カイ2乗1	2.734	6.241 **	3.542	2.239	3.723	1.713
カイ2乗2	2.089	6.046 **	2.117	1.642	3.654	2.531
カイ2乗3	3.055	4.417	4.648 *	3.498	2.981	3.622
検定結果	$\beta_2 > 3$	$\sqrt{\beta_1} > 0$	$\beta_2 > 3$	$\beta_2 > 3$	$\sqrt{\beta_1} < 0$	$\beta_2 < 3$

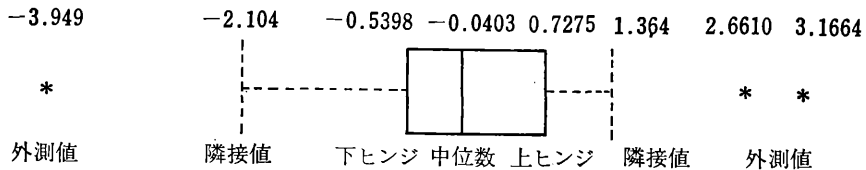
注(1) D'Agostino, Geary,  $\sqrt{b_1}$ ,  $b_2$  は両側検定。

(2) \*は10%, \*\*は5%, \*\*\*は1%で有意。

図38 残差の箱型図



(a) (112) 式



(b) (114) 式

の式には外測値は3個, *GNPHLDOT* の式でも外測値が3個あり, 長い尾をもつ分布からの「外れ値」が発生している。

結局これらの結果からも, 13節で述べたように正規確率プロットと D'Agostino の *D* による検定が線形回帰モデルの誤差項の正規性検定で用いられるべき有力な方法であることがわかる。



## 16 おわりに

線形回帰モデルにおける誤差項が正規分布に従わないとすれば、それはモデルの定式化が悪いかデータ数が足りないかであると計量経済学者は考えてきた。しかし定式化の誤りやデータ数の不足ではなく、誤差項の確率分布自身が正規分布より長い尾をもつ分布に従っているという例が数多くみられるようになってきた。誤差項が正規分布より長い尾をもつ分布に従っているとき、「外れ値」が発生する確率は高い。この「外れ値」に通常の最小2乗推定量 (*OLSE*) は敏感に反応し、*OLSE* の有効性は「外れ値」によって著しく損われ、さらに仮説検定においても効率の頑健性がきわめて小さくなることをみてきた。

正規性を検定する統計量は多数あり、 $\sqrt{\beta_1} \approx 0$  あるいは  $\beta_2 \approx 3$  のあらゆる正規性の乖離に対して一様に最強力な検定力をもつ検定統計量は存在しない。しかしわれわれの関心は、あらゆる非正規性ではなく、対称的ではあるが  $\beta_2 > 3$  というすその長い分布に誤差項が従っている場合を検出し、その場合には通常の最小2乗法に代って頑健推定 *robust estimation* へと進むべきかどうかを判断することにある。したがってどのような非正規性に対しても一様に高い検定力を有している検定統計量を探すことが関心事ではない。前述のわれわれの判断に対してもっとも適切な統計量は *D'Agostino* の *D* であり、パターン認識においてすぐれているのは正規確率プロットである。計量経済学分野においてもこの2つは標準的な出力に加えられ、活用されねばならない。あらゆるタイプの非正規性の検定には *Shapiro-Wilk* の *W* がもっとも検定力が高いことがわかっている。この *W* も正規確率プロット、*D* と並んで用いるとよい。

### 数学注

$Y_i$  が母平均  $\mu$  を中心にして対称的な分布に従うとき、 $(Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(n)})$  の分布と  $(-Y_{(n)}, -Y_{(n-1)}, \dots, -Y_{(1)})$  の分布は同じである。

$$\begin{bmatrix} -Y_{(n)} \\ -Y_{(n-1)} \\ \vdots \\ -Y_{(1)} \end{bmatrix} = -\mathbf{J} \begin{bmatrix} Y_{(1)} \\ Y_{(2)} \\ \vdots \\ Y_{(n)} \end{bmatrix}$$

とおくと

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であり、 $\mathbf{J}$  は次式を満たす。

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}' = \mathbf{J}^{-1}$$

$$\mathbf{J}' \mathbf{1} = \mathbf{1}$$

$$\mathbf{J}^2 = \mathbf{1}$$

$\mathbf{y}_{(n)}$  と  $-\mathbf{J} \mathbf{y}_{(n)}$  は同一の分布に従うから

$$E[\mathbf{y}_{(n)}] = E[-\mathbf{J} \mathbf{y}_{(n)}]$$

すなわち

$$\mathbf{m} = -\mathbf{J} \mathbf{m}$$

$\mathbf{m}$  の要素で表せば,  $m_i = \mu_{(i)}$  であるから

$$\mu_{(i)} = \mu_{(n-i+1)}, \quad i=1, \dots, n$$

そして

$$\mathbf{1}' \mathbf{m} = -\mathbf{1}' \mathbf{J} \mathbf{m} = -\mathbf{1}' \mathbf{m}$$

したがって

$$\sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n \mu_{(i)} = 0$$

次に  $\mathbf{y}_{(n)}$  の分散共分散行列を  $\text{Var}(\mathbf{y}_{(n)}) = \mathbf{V}$  とすると

$$\begin{aligned} \text{Var}(\mathbf{y}_{(n)}) &= \text{Var}(-\mathbf{J} \mathbf{y}_{(n)}) \\ &= -\mathbf{J} \mathbf{V} (-\mathbf{J}') = \mathbf{J} \mathbf{V} \mathbf{J}' \end{aligned}$$

ゆえに

$$\mathbf{V}^{-1} = \mathbf{J}'^{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{J}$$

したがって

$$\begin{aligned} \mathbf{1}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{m} &= \mathbf{1}' (\mathbf{J} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{J}) (-\mathbf{J} \mathbf{m}) \\ &= -(\mathbf{1}' \mathbf{J}) \mathbf{V}^{-1} \mathbf{J}^2 \mathbf{m} \\ &= -\mathbf{1}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{m} \end{aligned}$$

ゆえに

$$\mathbf{1}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{m} = 0.$$

とくに  $Y_i \sim N(0, 1)$  のとき

$$\sum_{j=1}^n v_{ij} = 1 \quad i=1, 2, \dots, n$$

(David [20] p. 40) であるから

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_{ij} = n$$

となる。したがって

$$\mathbf{V} \mathbf{1} = \begin{bmatrix} \sum_j v_{1j} \\ \vdots \\ \sum_j v_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{1}$$

ゆえに

$$\mathbf{1}' \mathbf{V}^{-1} = (\mathbf{V} \mathbf{1})' \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{1}' \mathbf{V} \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{1}'$$

したがって

$$\mathbf{1}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{1} = \mathbf{1}' \mathbf{1} = n$$

このとき (66) 式は

$$\hat{\mu} = \bar{Y}$$

となる。

#### 参考文献

- [1] Anderson, T. W. and Darling, D. A.: A test of goodness-of-fit, *Journal of the American Statistical Association*, 49, 1954, 765-769.
- [2] Anscombe, F. J.: Rejection of outliers, *Technometrics*, 2, 1960, 123-147.
- [3] Anscombe, F. J. and Glynn, W. J.: Distribution of the kurtosis statistic  $b_2$  for normal statistics, *Biometrika*, 70, 1983, 227-234.
- [4] Atkinson, A. C.: Two graphical displays for outlying and influential observations in regression, *Biometrika*, 68, 1981, 13-20.
- [5] Atkinson, A. C.: Regression diagnostics, transformations and constructed variables, *Journal of the Royal Statistical Society, B*, 44, No. 1, 1982, 1-36.
- [6] Atkinson, A. C.: *Plots, Transformations, and Regression*, Oxford University Press, 1985.
- [7] Barnett, V., and Lewis, T.: *Outliers in Statistical Data* 2nd ed., John Wiley & Sons, 1984.
- [8] Boos, D. D.: A new method for constructing approximate confidence intervals from M-estimators, *Journal of the American Statistical Association*, 75, 1980, 142-145.
- [9] Bowman, K. O., and Shenton, B. R.: Omnibus test contours for departures from normality based on  $\sqrt{b_1}$  and  $b_2$ , *Biometrika*, 62, 1975, 243-250.
- [10] Bowman, K. O., and Shenton, L. R.: Moment ( $\sqrt{b_1}$ ,  $b_2$ ) technique, in D'Agostino, R. B. and Stephens, M. A. ed *Goodness-of-Fit Techniques*, Marcel Dekker Inc., 1986.
- [11] Cook, R. D., and Weisberg, S.: *Residuals and Inference in Regression*, Chapman and Hall, 1982.
- [12] Daniel, C., and Wood, F. S.: *Fitting Equations to Data: Computer Analysis of Multifactor Data*, 2nd ed., John Wiley & Sons, 1980.
- [13] D'Agostino, R. B.: An omnibus test of normality for moderate and large size samples, *Biometrika*, 58, 1971, 341-348.
- [14] D'Agostino, R. B.: Small sample probability points for D test of normality, *Biometrika*, 59, 1972, 219-221.
- [15] D'Agostino, R. B.: Departures from normality, tests for, *Encyclopedia of Statistical Sciences*, Vol. 2, Wiley International, 1982.
- [16] D'Agostino, R. B. and Pearson, E. S.: Testing for departures from normality. I. Fuller empirical results for the distribution of  $b_2$  and  $\sqrt{b_1}$ , *Biometrika*, 60, 1973, 613-622.
- [17] D'Agostino, R. B., and Stephens, M. A.: *Handbook of Goodness-of-Fit Techniques*, Marcel Dekker, 1986.
- [18] D'Agostino, R. B., and Tietjen, G. L.: Simulation probability points for  $b_2$  for small samples,

- Biometrika*, 58, 1971, 669-672.
- [19] D'Agostino, R. B., and Tietjen, G. L.: Approaches to the null distribution of  $\sqrt{b_1}$ , *Biometrika*, 60, 1973, 169-173.
- [20] David, H. A.: *Order Statistics*, 2nd ed., John Wiley & Sons, 1981.
- [21] Dudewicz, E. J., and Mishra, S. Y.: *Modern Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, 1988.
- [22] Geary, R. C.: The ratio of the mean deviation to the standard deviation as a test of normality, *Biometrika*, 27, 1935, 310-332.
- [23] Gnanadesikan, R.: *Methods for Statistical Data Analysis of Multivariate Observations*, John Wiley & Sons, 1977.
- [24] Green, J. R., and Hegazy, Y. A. S.: Powerful modified-EDF goodness-of-fit test, *Journal of the American Statistical Association*, 71, 1976, 204-209.
- [25] Gurland, J., and Dahiya, R. C.: Tests of fit for continuous distributions based on generalized minimum chi-squared, in *Statistical Papers in Honour of George W. Snedecor* (ed. T. A. Bancroft), State University Press, Iowa, 1972, 115-128.
- [26] Harter, H. L.: Expected values of normal order statistics, *Biometrika*, 48, 1961, 151-165.
- [27] Hocking, R. R.: Developments in linear regression methodology: 1959-1982, *Technometrics*, Vol. 25, No. 3, August 1983, 219-249.
- [28] Mage, D. T.: An objective graphical method for testing normal distributional assumptions using probability plots, *The American Statistician*, 36, 2, 1982, 116-120.
- [29] Pearson, K.: Contributions to the mathematical theory of evolution, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 1895.
- [30] Pearson, E. S. and Hartley, H. O.: *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. I and II, Cambridge University Press, 1972.
- [31] Pearson, E. S., D'Agostino, R. B., and Bowman, K. O.: Tests for departures from normality, *Biometrika*, 64, 1977, 231-246.
- [32] Pierce, D. A., and Gray, R. J.: Testing normality of errors in regression models, *Biometrika*, 69, 1982, 233-236.
- [33] Royston, J. P.: Expected normal order statistics (exact and approximate) Algorithm AS 177, *Applied Statistics*, 31, 1982, 115-124.
- [34] Royston, J. P.: Algorithm AS 181. The W test for normality, *Applied Statistics*, 31, 1982, 176-180.
- [35] Shapiro, S. S., and Wilk, M. B.: An Analysis of variance test for normality (complete samples), *Biometrika*, 52, 1965, 591-611.
- [36] Shapiro, S. S., Wilk, M. B., and Chen, H. J.: A comparative study of various tests for normality, *Journal of the American Statistical Association*, Dec. 1968, 1343-1372.
- [37] Shapiro, S. S., and Francia, R. S.: An approximate analysis of variance test for normality, *Journal of the American Statistical Association*, March 1972, 215-216.
- [38] 柴田義貞:『正規分布——特性と応用』, 東京大学出版会, 1981.
- [39] Sparks, D. N.: Half normal plotting, *Applied Statistics*, 19, 1970, 192-196.
- [40] 竹内 啓:『確率分布と統計解析』, 日本規格協会, 1975.
- [41] Weisberg, S., and Bingham, C.: An analysis of variance test for normality suitable for machine calculation, *Technometrics*, 17, 1975, 133.
- [42] Weisberg, S.: *Applied Linear Regression*, 2nd ed., John Wiley & Sons, 1985.

- [43] Wetherill, G. B.: *Regression Analysis with Applications*, Chapman and Hall, 1986.
- [44] White, H., and Macdonald, G. M.: Some large-sample tests for nonnormality in the linear regression model, *Journal of the American Statistical Association*, March, 1980, Vol. 75, No. 369, 16-31.
- [45] Wilk, M. B., and Gnanadesikan, R.: Probability plotting methods for the analysis of data, *Biometrika*, 55, 1968, 1-17.

(経済学部教授)