Title	2人経済におけるワルラス均衡のナッシュ実行可能性について
Sub Title	On Nash-implementability of Walrasian equilibria in two-person economies
Author	中村, 愼助
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1990
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.83, No.1 (1990. 4) ,p.54- 62
JaLC DOI	10.14991/001.19900401-0054
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19900401-0054

「三田学会雑誌」83巻1号（1990年4月）

2人経済におけるワルラス均衡のナッシュ実行可能性について*

中村 慎 助**

1 序 論

いわゆるインセンティヴ・コンパティビリティーの議論は，本来公共財のフリーライダーの問題として知られていた。しかしながら，Hurwicz（1972）によってこの種の問題が通常のワルラス的な経済についても起こり得ることが指摘されて以来，多くの貢献がなされてきている。具体的には，比較的少数の構成員からなる経済で各経済主体に価格支配力のあるような情況の下で，オークショニァーの存在を仮定せずに，ワルラス均衡と同じ配分をナッシュ解を通じて実現するような経済機構についての考察がなされてきた。

3人以上の純粋交換経済の場合には，Schmeidler（1980）が，関数としては不連続であるが，常に総消費が総供給量と一致するという意味で需給一致的な経済機構を用いてワルラス均衡と同じ配分を実行する（implement）ことができることを示した。さらに Hurwicz（1979a）は，微分可能でかつ需給一致的な経済構機を使ってワルラス均衡が実行できることを示した。最近，Postlewaite and Wettstein（1989）は，ワルラス均衡を実行し，かつ連続で，常に総消費量が総供給量を上回らない弱い意味で需給一致的で，各消費者の消費量が常に消費可能集合の中にあるという意味で個人実現可能的（individually feasible）な経済機構を設計した。

経済の構成人員が2人の場合にはかえって問題が難しくなる。Hurwicz（1979c）は，連続性を犠牲にして需給一致的でワルラス均衡を実行するような経済機構を考えた。また，Rechelstein（1984）は，連続微分可能で需給一致的な経済機構を用いては，2人経済においてワルラス均衡を実現できないことを証明した。さらに，Hurwicz and Weinberger（1984）は凸で微分可能な経済機構を使ってはパレート最適点を実行できないことを証明した。また，Kwan and Nakamura（1987）は，微分可能で弱い意味で需給一致的な経済機構，あるいは連続で需給一致的な経済機構を用いては，ワルラス均衡を実行できないことを証明した。

本稿では，二人経済における残された唯一の可能性である，連続でかつ弱い意味で需給一致的で，ワルラス均衡を実行するような経済機構が提案される。さらに，この経済機構は付加的に個人実現

---

* 本稿は Nakamura（1989）の第3章による。

** 筆者は本誌匿名のレフリーの詳細なコメントに感謝いたします。

可能性をも満たすことになる。参考の為に Kwan and Nakamura (1987) の結果を証明抜きで紹介する。

以上の議論は次の表によって表現される。

	需給一致的	弱需給一致的	非弱需給一致的
連続微分可能	非存在 $\Leftarrow$ Reichelstein (1984) Hurwicz & Weinberger (1984) $\Uparrow$	非存在 定理 3	存在 定理 4 $\Downarrow$
連続	非存在 定理 2	存在 $\Rightarrow$ 定理 1	存在 $\Downarrow$
不連続	存在 $\Rightarrow$ Hurwicz (1979c)	存在 $\Rightarrow$	存在

2 人経済の場合

上記表から読み取れるように連続性や微分可能性と需給一致性との間にはトレード・オフが存在している。このことはすべてのコラムが Hurwicz (1979a) によって「存在」となる 3 人以上の場合と決定的に異なっている。この，連続性や微分可能性，及び需給一致性は，経済機構の実行の過程にある種の誤差が生じ正確な均衡の実現が期待できない場合，あるいは，時間がかかりすぎる等の理由により正確な均衡の実現の為の費用が大きすぎる場合にも，十分に均衡に近くしかも物理的に分配可能な配分を達成できるという意味で重要であろう。

本稿では，第 2 節において考察する経済の定義を，第 3 節において連続，弱い意味で需給一致的な経済機構の提案およびそれがワルラス均衡を実行することの証明が与えられる。第 4 節では Kwan and Nakamura (1987) の結果を紹介する。

2　モデル

$l+1$ 種類の財からなる 2 者純粋交換経済を考えよう。それぞれの財ヴェクターは $(x, y)\in\Re_+\times\Re^l_+$ で表すことにし，x 財をニュメレールと呼ぶことにする。各消費者 i は彼の選好関係 $\succeq_i$ と初期賦存量 $(\omega^x_i, \omega^y_i)\in\Re^{l+1}_+$ 及び簡単化の為に i に依存しないと仮定される消費可能集合 $\Re^{l+1}_+$ とによって特徴付けられる。本稿では，各消費者の初期賦存量と消費可能集合は所与とし不変のものとする。

今，社会全体で許容できる選好関係のプロフィール全体の集合を $\mathscr{E}$ で書くことにしよう。$\mathscr{E}$ の代表的な元を $(\succeq_1, \succeq_2)$ で表し，各 $\succeq_i$ は第 i 消費者の弱い選好関係であると解釈することにする。

任意の元 $\succeq\in\mathscr{E}$ に対して，$W(\succeq)$ でワルラス均衡配分全体の集合を書くことにしよう。この時，多価関数 $W:\mathscr{E}\to\to(\Re_+^{l+1})^2$ をワルラス対応と呼ぶことにする。

本稿における経済機構とは順序対（$M_1\times M_2, h$）のことである。但し，ここで各 M_i は任意の非空な集合で，メッセージ集合と呼ばれ，h は $M_1\times M_2$ から（$\Re^{l+1})^2$ への関数で，結果関数と呼ばれている。更に，この h を座標表示して

$$h(m)\equiv(X_1(m),\ Y_1(m);\ X_2(m),\ Y_2(m)) \qquad \forall m\in M\equiv M_1\times M_2$$

と書く。

上記の経済機構に対応するナッシュ均衡の集合を $\nu(\succeq)$ で書こう。ナッシュ均衡に対応する配分 $h(\nu(\succeq))$ を $N(\succeq)$ で表し，$N:\mathscr{E}\to\to(\Re^{l+1})^2$ をナッシュ対応と呼ぶことにする。

一般に，経済機構に関して次のような条件を考えよう。

定義 1：経済機構（M, h）は

$$W(\succeq)=N(\succeq) \qquad \forall\succeq\in\mathscr{E}$$

の時，ワルラス対応を実行するという。

定義 2：経済機構（M, h）は

$$X_1(m)+X_2(m)\leq\omega_1^x+\omega_2^x$$

$$Y_1(m)+Y_2(m)\leq\omega_1^y+\omega_2^y$$

が任意の $m\in M$ について成り立つ時，弱い意味で需給一致的であるという。更に，上式の不等号を等号で置き換えた時，需給一致的であるという。

定義 3：経済機構（M, h）は任意の i について

$$(X_i(m),\ Y_i(m))\in\Re_+^{l+1} \qquad \forall m\in M$$

の時，個人実現可能であるという。

3　可能性定理

本節では次の定理を証明する。

定理 1：今，$\mathscr{E}$ に属する全ての（$\succeq_1$, $\succeq_2$）と全ての i に対して次の 4 条件が成り立っているものとしよう。

（i） $\succeq_i$ は完全な擬順序である。

（ii） $\succeq_i$ は単調性を満たす。

（iii） $\succeq_i$ は凸である。

(iv) 任意の $(x, y)\in\Re_{++}^{l+1}$ と任意の $(x', y')\in\partial\Re_{+}^{l+1}$(1) に対して，$(x, y)\succ_i(x', y')$。

この時，連続で，弱い意味で需給一致的，かつ個人実現可能であるような経済機構で，ワルラス対応を実行するものが存在する。

特に，次の経済機構は全ての条件を満足している。

$$M_i\equiv\Re_{++}^{l}\times\Re^{l} \quad \text{and} \quad M\equiv M_1\times M_2$$

任意の $m\equiv(m_1, m_2)\equiv(p_1, y_1 ; p_2, y_2)\in M$ に対して，

$$Y_{ih}(m)\equiv\max\{0, \min\{y_{ih}-y_{-i,h}+\omega_{ih}^{y}, \omega_{1h}^{y}+\omega_{2h}^{y}\}\} \qquad h=1, \cdots\cdots, l$$

及び，

$$X_i(m)\equiv\max\left\{0, \min\left\{\sum_{h=1}^{l}\left[-p_{-i,h}(Y_{ih}(m)-\omega_{ih}^{y})\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{1}{2}|p_{ih}-p_{-i,h}|(1+|Y_{ih}(m)-\omega_{ih}^{y}|)\right]+\omega_i^{x}, \omega_1^{x}+\omega_2^{x}\right\}\right\}。$$

但し，ここで $-i$ は i でない個人を表す。

証明：下記の補助定理 1 及び 2 より明らか。 //

補助定理 1：定理 1 において定義された経済機構は連続，弱い意味で需給一致的，かつ個人実現可能である。

証明：連続性，及び，個人実現可能性は明らかであるから弱い意味での需給一致性を証明しよう。そのために，任意にメッセージ・プロフィール $m=(p_i, y_i)_i$ を選んで固定する。

Step 1：$Y_{1h}(m)+Y_{2h}(m)\leq\omega_{1h}^{y}+\omega_{2h}^{y} \qquad h=1, \ldots, l$。

Step 1 を証明するために任意に $h\in\{1, \ldots, l\}$ を選んで固定する。

Case 1：$Y_{1h}(m)>0$ かつ $Y_{2h}(m)>0$。

$$\begin{aligned}Y_{1h}(m)+Y_{2h}(m)&=\sum_{i=1}^{2}\min\{y_{ih}-y_{-i,h}+\omega_{ih}^{y}, \omega_{1h}^{y}+\omega_{2h}^{y}\}\\&\leq\sum_{i=1}^{2}(y_{ih}-y_{-i,h}+\omega_{ih}^{y})\\&=\omega_{1h}^{y}+\omega_{2h}^{y}。\end{aligned}$$

Case 2：$Y_{1h}(m)>0$ かつ $Y_{2h}(m)=0$。

$$\begin{aligned}Y_{1h}(m)+Y_{2h}(m)&=Y_{1h}(m)\\&=\min\{y_{1h}-y_{2,h}+\omega_{1h}^{y}, \omega_{1h}^{y}+\omega_{2h}^{y}\}\\&\leq\omega_{1h}^{y}+\omega_{2h}^{y}。\end{aligned}$$

注（1） ここで $\partial\Re_{+}^{l+1}$ は $\Re_{+}^{l+1}$ の境界集合を表す。

Case 3: $Y_{1h}(m)=0$ かつ $Y_{2h}(m)>0$。

Case 2 と同様。

Case 4: $Y_{1h}(m)=0$ かつ $Y_{2h}(m)=0$。

$$Y_{1h}(m)+Y_{2h}(m)=0\leq\omega^{y}_{1h}+\omega^{y}_{2h}。$$

Step 2: $X_1(m)+X_2(m)\leq\omega^{x}_1+\omega^{x}_2$。

Step 2 を証明するため，次のような 4 つの場合を考えよう。

Case 1: $X_1(m)>0$ かつ $X_2(m)>0$。

$$\begin{aligned}
&X_1(m)+X_2(m)\\
&=\sum_{i=1}^{2}\min\left\{\sum_{h=1}^{l}\left[-p_{-i,h}(Y_{ih}(m)-\omega^{y}_{ih})-\frac{1}{2}|p_{ih}-p_{-i,h}|(1+|Y_{ih}(m)-\omega^{y}_{ih}|)\right]+\omega^{x}_{i},\ \omega^{x}_1+\omega^{x}_2\right\}\\
&\leq\sum_{i=1}^{2}\left[\sum_{h=1}^{l}\left[-p_{-i,h}(Y_{ih}(m)-\omega^{y}_{ih})-\frac{1}{2}|p_{ih}-p_{-i,h}|(1+|Y_{ih}(m)-\omega^{y}_{ih}|)\right]+\omega^{x}_{i}\right]\\
&\leq\sum_{i=1}^{2}\left[\sum_{h=1}^{l}\left[-p_{-i,h}(Y_{ih}(m)-\omega^{y}_{ih})-\frac{1}{2}|p_{ih}-p_{-i,h}||Y_{ih}(m)-\omega^{y}_{ih}|\right]+\omega^{x}_{i}\right]\\
&=\sum_{h=1}^{l}\left[\sum_{i=1}^{2}\left[-p_{-i,h}(Y_{ih}(m)-\omega^{y}_{ih})-\frac{1}{2}|p_{ih}-p_{-i,h}||Y_{ih}(m)-\omega^{y}_{ih}|\right]\right]+\omega^{x}_1+\omega^{x}_2。
\end{aligned}$$

従って，任意の h に対して，

$$\sum_{i=1}^{2}\left[-p_{-i,h}(Y_{ih}(m)-\omega^{y}_{ih})-\frac{1}{2}|p_{ih}-p_{-i,h}||Y_{ih}(m)-\omega^{y}_{ih}|\right]\leq0 \tag{1}$$

が示されれば十分である。

Case 1.1: $Y_{1h}(m)>0$ かつ $Y_{2h}(m)>0$。

Step 1 より，

$$Y_{1h}(m)+Y_{2h}(m)\leq\omega^{y}_{1h}+\omega^{y}_{2h}。$$

従って

$$0<Y_{ih}(m)<\omega^{y}_{1h}+\omega^{y}_{2h}\qquad i=1,\ 2。$$

よって，経済機構の定義から

$$Y_{ih}(m)=y_{ih}-y_{-i,h}+\omega^{y}_{ih}\qquad i=1,\ 2。$$

従って(1)式の左辺は

$$(p_{1h}-p_{2h})(Y_{1h}(m)-\omega^{y}_{1h})-|p_{1h}-p_{2h}||Y_{1h}(m)-\omega^{y}_{1h}|\leq0。$$

Case 1.2: $Y_{1h}(m)=0$。

経済機構の定義からこの場合には

$$y_{1h}-y_{2h}+\omega^{y}_{1h}\leq0$$

である。従って

$$y_{2h}-y_{1h}+\omega^{y}_{2h}\geq\omega^{y}_{1h}+\omega^{y}_{2h}。$$

$Y_{2h}(\cdot)$ の定義より

$$Y_{2h}(m)=\omega^{y}_{1h}+\omega^{y}_{2h}。$$

従って(1)式の左辺は

$$p_{2h}\omega_{1h}^{y}-\frac{1}{2}|p_{1h}-p_{2h}|\omega_{1h}^{y}-p_{1h}\omega_{1h}^{y}-\frac{1}{2}|p_{1h}-p_{2h}|\omega_{1h}^{y}$$

$$=(p_{2h}-p_{1h})\omega_{1h}^{y}-|p_{1h}-p_{2h}|\omega_{1h}^{y}\leq 0。$$

Case 1.3: $Y_{2h}(m)=0$。

Case 1.3 と同様。

Case 2: $X_1(m)>0$ かつ $X_2(m)=0$。

$$X_1(m)+X_2(m)=X_1(m)\leq\omega_1^x+\omega_2^x。$$

Case 3: $X_1(m)=0$ かつ $X_2(m)>0$。

Case 2 と同様。

Case 4: $X_1(m)=0$ かつ $X_2(m)=0$。

$$X_1(m)+X_2(m)=0\leq\omega_1^x+\omega_2^x。$$

//

補助定理 2: ナッシュ均衡配分の集合とワルラス均衡配分の集合は一致する。

証明: 今，(p^*, x^*, y^*) を任意のワルラス均衡としよう。すると定理 1 の条件 (ii) と (iv) を用いて $(p^*, x^*, y^*)\in\Re_{++}^{l}\times\Re_{++}^{2}\times\Re_{++}^{2l}$ であることが分かる。

そこでメッセージ m^* を

$$m^*=(m_1^*, m_2^*)=(p^*, y_1^*-\omega_1^y, p^*, 0)$$

と定義しよう。すると (x^*, y^*) が内点であることと，市場の均衡条件から，$h(m^*)=(x^*, y^*)$ であることは明らかであろう。この m^* がナッシュ均衡であることを証明するために，任意の消費者 i と彼のメッセージ $m_i=(p_i, y_i)$ を選んで固定する。

Case 1: $X_i(m_i, m_{-i}^*)=0$。

境界条件(iv)から

$$(X_i(m^*), Y_i(m^*))\succ_i(X_i(m_i, m_{-i}^*), Y_i(m_i, m_{-i}^*))。$$

Case 2: $X_i(m_i, m_{-i}^*)>0$。

$$X_i(m_i, m_{-i}^*)+p^*Y_i(m_i, m_{-i}^*)\leq -p^*(Y_i(m_i, m_{-i}^*)-\omega_i^y)+p^*Y_i(m_i, m_{-i}^*)+\omega_i^x$$
$$=\omega_i^x+p^*\omega_i^y$$

であるから，$(X_i(m_i, m_{-i}^*), Y_i(m_i, m_{-i}^*))$ は予算制約式を満たす。よって，

$$(X_i(m^*), Y_i(m^*))\succsim_i(X_i(m_i, m_{-i}^*), Y_i(m_i, m_{-i}^*))$$

である。

逆に，$m^*=(p_i^*, y_i^*)_i$ を任意のナッシュ均衡としよう。この時，境界条件(iv)から

$$0\ll(X_i(m^*), Y_i(m^*))\ll\omega_1+\omega_2$$

である。更に，$p_1^*=p_2^*\equiv p^*$ であることは明らかであろう。

定理 1 の経済機構の値域は実現可能集合に含まれるから，ワルラス均衡配分であることを証明するためには，各消費者の予算制約の下での選好の最大化を証明すればよい。まず，$(X_i(m^*), Y_i(m^*))$ が予算制約を満たすことに注意する。更に，背理法の仮定として，予算制約を満たしながら

$$(x, y) \succ_i (X_i(m^*), Y_i(m^*))$$

となるような (x, y) が存在したとしよう。選好の凸性と単調性から，一般性を失う事無く

$$x+p^*y=\omega_i^x+p^*\omega_i^y$$

で，かつ

$$0 \ll (x, y) \ll \omega_1+\omega_2$$

であるとしてかまわない。

従って，消費者 i は

$$y_i=y+y_{-i}^*-\omega_i^y \quad \text{and} \quad p_i=p^*$$

と置くことにより，(x, y) を達成できる。これは m^* がナッシュ均衡であることに矛盾する。

//

4　不可能性定理

本節では Kwan and Nakamura (1987) の結果を証明抜きで紹介し，前節定理 1 の結果を強められないことをみる（第 1 節の表を参照のこと）。

定理 2： $l=1$ でかつ任意の $\alpha\in(0,1)$ に対して

$$u_i(x, y)=x+\alpha y \qquad \forall(x, y)\in\Re_+^2$$

となる効用関数 u_i で表現されるような選好プロフィール $\succeq^\alpha=(\succeq_1^\alpha, \succeq_2^\alpha)\in\mathscr{E}$ が存在するとしよう。

この時，次の 3 条件を満たす経済機構 (M, h) は存在しない。

(1)　(M, h) はワルラス対応を実行する。

(2)　全ての i に対して M_i は第二加算公理を満たし，h は連続である。

(3)　(M, h) は需給一致的である。

定理 3： $l=1$ でかつ全ての $(\alpha_1, \alpha_2)\in(0,1)^2$ に対して

$$u_i(x, y)=x^{\alpha_i}y^{1-\alpha_i} \qquad \forall(x, y)\in\Re_+^2$$

となる効用関数 u_i で表現されるような選好プロフィール $\succeq^\alpha=(\succeq_1^\alpha, \succeq_2^\alpha)\in\mathscr{E}$ が存在するとしよう。

この時，次の 3 条件を満たす経済機構 (M, h) は存在しない。

(1)　(M, h) はワルラス対応を実行する。

(2) 全ての i に対して M_i は有限次元の微分多様体であり h は $(\dim M_1 + \dim M_2)$ 回微分可能である。

(3) (M, h) は弱い意味で需給一致的である。

Hurwicz (1979b) はもし，ある経済機構が十分に多くの経済においてパレート最適で個人合理的な配分をナッシュ解を通じて実現するなら，実は，常にワルラス均衡と同じ配分を実現せざるをえないことを証明した。したがって上記定理2及び3はパレート最適で個人合理的な配分をもたらすような経済機構で「性質のよい」(well-behaved) ものが存在しないことを主張している。以下の定理4と5によって，定理2および3がこれ以上改善できないことが分かる。

定理4： 任意の $\succeq \in \mathscr{E}$ と任意の i に対して，$\succeq_i$ は次の2条件を満たすものとする。

(1) $\succeq_i$ は完全な擬順序である。

(2) $\succeq_i$ は単調性を満たす。

この時，弱い意味でさえ需給一致的ではないが連続微分可能でワルラス均衡を実行するような経済機構が存在する。

定理5： [Hurwicz (1979c)]：任意の $\succeq \in \mathscr{E}$ と任意の i に対して，$\succeq_i$ は次の2条件を満たすものとする。

(1) $\succeq_i$ は完全な擬順序である。

(2) $\succeq_i$ は単調性を満たす。

この時，不連続ではあるが，需給一致的でかつワルラス均衡を実行するような経済機構が存在する。

参考文献

Hurwicz, L. (1972) "On informationally decentralized systems," in R. Radner and C. McGuire eds., Decision and Organization, Amsterdam, North Holland.

Hurwicz, L.(1979a) "Outcome functions yielding Walrasian and Lindahl allocations at Nash equilibrium points," *Review of Economic Studies* 46, 217–225.

Hurwicz, L.(1979b) "On allocations attainable through Nash equilibria," *Journal of Economic Theory* 21, 140–165.

Hurwicz, L.(1979c) "Balanced outcome functions yielding Walrasian and Lindahl allocations at Nash equilibrium points for two or more agents," in J. Green and J. Scheinkman, eds., General Equilibrium, Growth, and Trade, New York, Academic Press.

Hurwicz, L. and H. Weinberger (1984) "On smooth balanced Nash mechanisms which implement Pareto-optimal performance correspondence in pure exchanged economies with two agents," mimo.

Kwan, Y. and S. Nakamura (1987) "On Nash implementation of the Walrasian or Lindahl correspondence in the two-agent economy," Discussion Paper No. 243, Center for Economic Research, University of Minnesota.

Nakamura, S. (1989) "Efficient feasible Nash mechanisms with production and externalities," Ph. D. Dissertation, University of Minnesota.

Postlewaite, A. and D. Wettstein (1989) "Feasible and continuous implementation," *Review of Economic Studies* 56, 603-611.

Reichelstein, S.(1984) "Smooth versus discontinuous mechanisms," *Economics Letters* 16, 239-242.

Schmeidler, D. (1980) "Walrasian analysis via strategic oucome functions," *Econometrica* 48, 1585-1594.

(経済学部助教授)