

Title	流動性制約と異時点資産選択モデル
Sub Title	A liquidity constraint and intertemporal portfolio selection model
Author	伊藤, 幹夫 大平, 哲
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1990
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.82, No.特別号-I (1990. 3) ,p.215- 223
JaLC DOI	10.14991/001.19900301-0215
Abstract	
Notes	福岡正夫教授退任記念論文集
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19900301-0215

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

流動性制約と異時点資産選択モデル

伊 藤 幹 夫
大 平 哲

1 序

インフレーションと資本蓄積との間にはどのような理論的連関があるのだろうか。この問題は、Tobin [11], Brock [1], Calvo [2], Dornbusch-Frenkel [4], Sidrauski [10]をはじめとする多くの論文を生み出した。Sidrauski は無限の計画期間をもつ集団が効用最大化をするモデルを用いて、インフレーションが資本蓄積に及ぼす影響を分析した。そして、貨幣が中立的であるという結論を導いた。すなわち、定常状態においては、実質利子率が人口の成長率と時間選好率との和に等しくなるように資本ストックが決定されるということを示し、インフレーション率、ないし貨幣供給の成長率が実質残高のみに影響をあたえるだけで、資本蓄積水準や消費水準のような実質変数には影響をあたえないことをモデルを用いてあきらかにした。

Fischer [7] も Sidrauski モデルを踏襲するが、定常状態の研究ではなく、定常状態への最適経路上で中立性命題が成立しないことを示した。また、この集団が危険回避度一定の効用関数をもつ場合には、安定経路上においては、貨幣供給の成長率が大きいほど資本蓄積率が高くなると論じた。このことは、すくなくとも定常状態の近傍においては貨幣は中立的ではないことを意味する。

本稿の目的は Sidrauski モデルを用いて、最適経路が一般に貨幣供給の成長率に影響されることを示すことにある。Fischer は定常解の近傍に議論の焦点を絞ったが、われわれは Cass [3], Oniki [9], Nagatani [8] 等によって開発された比較動学の手法を使い、大域的な場合に議論を拡張する。

資本蓄積率に影響をあたえる貨幣的要因として、われわれは Fischer にならって貨幣供給の成長率の変化に着目する。Fischer と同様、われわれも貨幣供給の成長率は一定と仮定するから、その大きさが変わることは、マネタリストの k パーセント・ルールにおいて k の値が変更されることとも理解できる。裁量的な政策ルールの変更が資本蓄積に及ぼす影響を調べるのが本稿の課題であるとも言ってよい。Sidrauski は定常解の資本ストック水準が貨幣的要因には依存しないことを示した。しかし、われわれのモデルでは、貨幣供給の成長率が大きければ大きいほど定常解における資本ストック水準は大きくなる。

Sidrauski が設定し、Fischer が踏襲した効用関数 $U(c, m)$ の代わりに、本稿では $U(c)$ という形の効用関数を想定する。消費だけが効用を生むのであり、貨幣ストックは効用を生まない。貨幣が効用を生むと考える代わりに、われわれは貨幣が制度的な理由から保有されると仮定する。すなわち、貯蓄を資本と貨幣に分割する比率が一定であると考え、主体は資産の一定割合をかならず貨幣で保有しなければならないという制約式の下で最適化問題を解くとする。

2 節ではモデルを設定して、主体の最適化の一階条件を求め、動学体系を表す式を導出する。そして、その結果を使って 3 節では、その動学体系の定常解の性質を調べる。4 節では比較動学分析によって定常解の近傍以外の全経路上で、資本蓄積率がやはり貨幣的要因に影響されることを示す。とくに貨幣が初期点の近傍で資本蓄積率にどのような効果をもつかがはっきりになることは政策の短期的な効果を明確にする。超長期を経た後の資本蓄積の状況に比べて、政策が実行された直後の短期的な状況が明確になることの方が経済学的に有意義であると考えられる。本稿の意義は比較動学的手法を採用することによって以上の点を明らかにした点に求められる。

2 モデル

構成員の数が n という率で成長する集団のインターテンポラルな効用最大化問題を考える。ある一定時点の実質消費量を c_t とし、この集団の効用関数が $U(c_t)$ の形で与えられているとする。この効用関数は凹関数で、一階の微係数は正、二階の微係数は負である。また、この効用関数は加法的で、任意の時間経路から得られる総効用は次の形であたえられる。

$$W = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} U(c_t) dt \quad (1)$$

ここで、 δ は時間選好率である。以下では必要のないかぎり、各変数の添字の t は省略する。

この集団は各時点で 3 本の制約式に服している。ストック制約、フロー制約、そして流動性制約である。

いま経済には貨幣と資本の 2 種類の財しかないと考えると、ストック制約は次の形であたえられる。

$$a = m + k \quad (2)$$

ここで、 a は総資産保有量、 m は貨幣保有量、 k は資本保有量である。これらの変数は消費量と同じく 1 人当たりで測られている。

フロー制約は各時点で所得が消費と貯蓄との和に等しくなることを要求する。この集団の粗可処分所得は、資本が各期に $f(k)$ という技術下で生み出す生産物と政府からの 1 人あたり実質貨幣移転 (x) との和である。この経済では貨幣供給の成長率が一定であるとする。さらに、政府からの貨幣移転は家計のその時点での貨幣保有量の θ 倍であると仮定する。すなわち、貨幣に対する

利子支払いとして政府から家計へ貨幣が移転されると考える。

$$\theta = \frac{\dot{M}}{M} \quad (3)$$

$$x = \theta m \quad (4)$$

このことは、家計にとってみれば、政府からの貨幣移転を貨幣の利子とみなせることを意味する。一方、 $\dot{k}$ は(5)が成立することから、(6)のように書くことができる。

$$\dot{K} = I \quad (5)$$

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{N} - \frac{K}{N} \frac{\dot{N}}{N} = \frac{I}{N} - nk \quad (6)$$

そこで資本蓄積は次の形で表現できる。

$$\frac{I}{N} = \dot{k} + nk \quad (7)$$

ここで $\dot{k}$ は資本ストックへの純付加であり、 nk は新たな構成員も古くからの構成員と同水準の資本量を保有することができるために必要な資本蓄積である。

1人当りの実質貨幣残高 m を t について微分することによって、貨幣保有の粗増加の実質価値は次のように書ける。ここで π はインフレーション率である。

$$\frac{\dot{M}}{Np} = \dot{m} + \pi m + nm \quad (8)$$

以上のことからフローの制約式は次の形にまとめられる。

$$f(k) + \theta m = \dot{k} + nk + \dot{m} + (\pi + n)m + c \quad (9)$$

あるいは、ストック制約を考慮するとこの式は次の形に変形できる。

$$\dot{a} = f(k) + (\theta - \pi - n)m - nk - c \quad (9)'$$

流動性制約は主体が制度的、慣習的にある決まった法則にのっとって貨幣保有を決めることを表現する。ここでは、主体が総資産の一定割合 α を必ず貨幣で保有すると仮定し、流動性制約式が次のように書けるとする。

$$m = \alpha a \quad (10)$$

(10)を(2)(9)'に代入し、整理することによって、Sidrauskiモデルの最適化問題は次のように要約できる。

$$\text{Max } W = \int e^{-\delta t} U(c_t) dt$$

$$\text{subject to } \dot{k} = (1-\alpha) \left[f(k) + \frac{(\theta-\pi-n)\alpha k}{(1-\alpha)} - nk - c \right]$$

この問題を解くためにまずハミルトニアンを定義する。

$$H = e^{-\delta t} \left\{ U(c) + \lambda (1-\alpha) \left[f(k) + \frac{(\theta-\pi-n)\alpha k}{(1-\alpha)} - nk - c \right] \right\}$$

最適化条件は最大値原理⁽¹⁾(11)と補助方程式(12)(13)であたえられる。

$$H_c = e^{-\delta t} [U'(c) - \lambda (1-\alpha)] = 0 \quad (11)$$

$$\dot{\lambda} = \delta \lambda - \lambda (1-\alpha) \left[f'(k) + \frac{(\theta-\pi-n)\alpha}{(1-\alpha)} - n \right] \quad (12)$$

$$\dot{k} = (1-\alpha) \left[f(k) + \frac{(\theta-\pi-n)\alpha k}{(1-\alpha)} - nk - c \right] \quad (13)$$

すると(11)(12)から、

$$\dot{c} = \frac{U'}{U''} \{ \delta + n - f' + (\pi + f' - \theta) \alpha \} \equiv \phi_c \quad (14)$$

また、最大化問題の制約式が資本ストックに関する動学方程式をあたえる。

$$\dot{k} = (1-\alpha) [f(k) - nk - c] + (\theta - \pi - n) \alpha k \equiv \phi_k \quad (15)$$

(14)(15)の2本がわれわれの動学体系を表現する式となっている。以下の叙述の便宜上、この2本の式を ϕ_c , ϕ_k と書くことにする。

3 定常状態

この動学体系の定常状態では次の関係が成立する。

$$\delta + n - f' + (\pi + f' - \theta) \alpha = 0 \quad (16)$$

$$(1-\alpha) [f(k) - nk - c] + (\theta - \pi - n) \alpha k = 0 \quad (17)$$

(16)(17)を全微分すると、

$$\begin{bmatrix} 0 & -(1-\alpha) f'' \\ -(1-\alpha) & (1-\alpha)(f' - n) + (\theta - \pi - n) \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dc \\ dk \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha d\theta \\ -\alpha k d\theta \end{bmatrix} \quad (18)$$

となり、次の定常均衡に関しての比較静学の命題を得ることができる。

$$\frac{\partial c}{\partial \theta} = \frac{\alpha [(1-\alpha)(f' - n) + (\theta - \pi - n) \alpha - k(1-\alpha) f'']}{(1-\alpha)^2 f''} \quad (19)$$

$$\frac{\partial k}{\partial \theta} = \frac{-\alpha}{(1-\alpha)f''} > 0 \quad (20)$$

これらの式は、貨幣供給の成長率が上昇したときに、定常解における消費水準は増加するか減少するかあきらかではないが、資本ストックの水準は増加するということを含意している。

さて、 $c-k$ 平面に位相図を描き、解経路が満たす条件を考えてみよう。(16)から $\dot{c}=0$ を満たす点の軌跡が水平になることはわかるが、(17)から $\dot{k}=0$ となる点の軌跡がどのような形状になるかを判断することはできない。そこで、 $c-k$ 平面での分析だけからは、(14)(15)の最適経路の性質はわからない。そのため、貨幣供給の成長率 θ の変化に対して、消費、資本ストックがどのように反応するかを調べる比較動学分析が必要となるのである。

4 大域分析

本節では最適経路の全域での、貨幣と資本ストックとの関係を考察する。この比較動学問題を調べるために、動学体系の変分方程式を求める。変分方程式は体系を表現する式を全微分することによって求まる。⁽²⁾すなわち、

$$\begin{bmatrix} \dot{c}_\theta^* \\ \dot{k}_\theta^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{cc} & \phi_{ck} \\ \phi_{kc} & \phi_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta^* \\ k_\theta^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{c\theta} \\ \phi_{k\theta} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\phi_{cc} = \frac{\partial(U'/U'')}{\partial c} \{\delta + n - f' + (\pi + f')\alpha\} \quad (22)$$

$$\phi_{ck} = -\frac{U'}{U''}(1-\alpha)f' < 0 \quad (23)$$

$$\phi_{kc} = -(1-\alpha) < 0 \quad (24)$$

$$\phi_{kk} = (f' - n)(1-\alpha) + (\theta - \pi - n)\alpha \quad (25)$$

$$\phi_{c\theta} = -(U'/U'')\alpha > 0 \quad (26)$$

$$\phi_{k\theta} = \alpha k > 0 \quad (27)$$

われわれの興味は上の変分方程式の符号パターンだけである。それは以下のようにまとめられる。

$$\begin{bmatrix} \dot{c}_\theta^* \\ \dot{k}_\theta^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & - \\ - & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\theta^* \\ k_\theta^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} + \\ + \end{bmatrix} \quad (28)$$

右辺の行列の1行1列(ϕ_{cc})と2行2列(ϕ_{kk})の符号は確定しない。ただし、 ϕ_{cc} はこの経済の危険回避度($-U''/U'$)に依存し、 ϕ_{kk} は m が正、すなわち貨幣残高が増加しているときには正

図 1

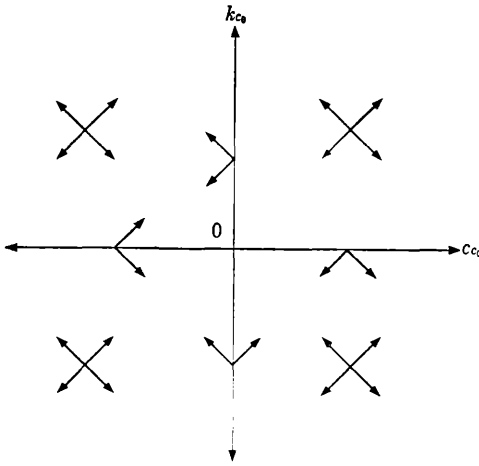


図 2 ($\phi_{cc} > 0, \phi_{kk} > 0$)

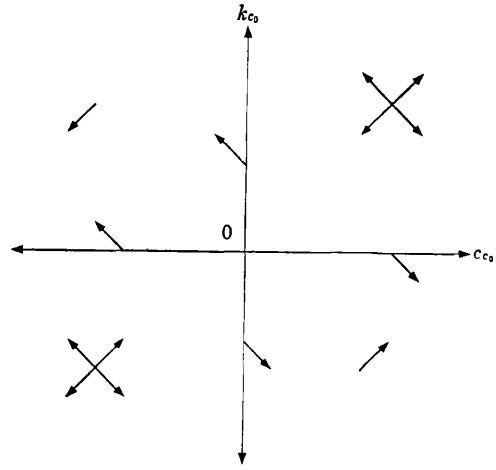


図 3 ($\phi_{cc} > 0, \phi_{kk} < 0$)

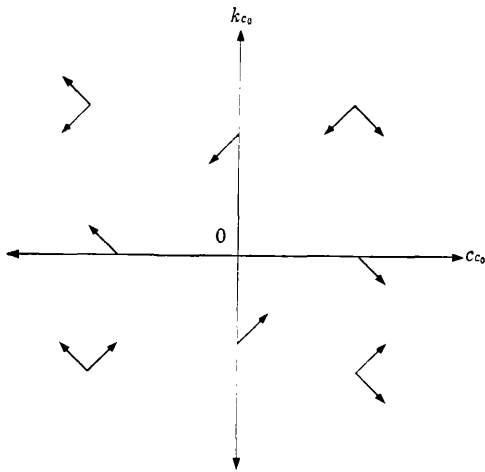
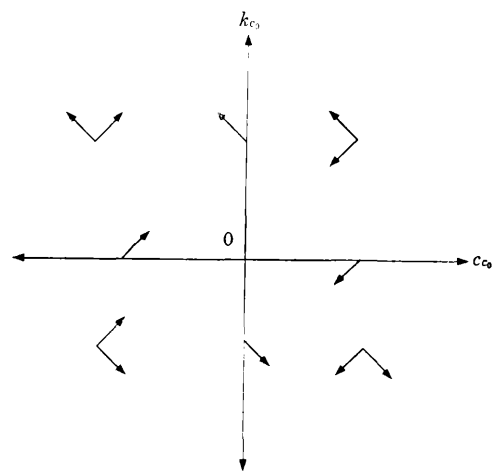


図 4 ($\phi_{cc} < 0, \phi_{kk} > 0$)



となることに注意しなければならない。

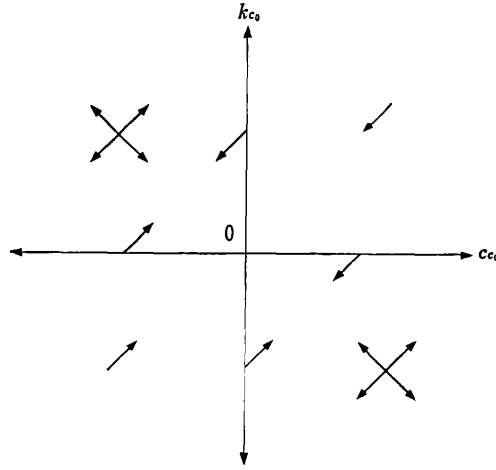
さて、比較動学の問題を解決するためには、初期点における消費水準と資本ストック水準が貨幣供給の成長率の変化にどのように依存するかが最初にあきらかにされなければならない。初期点における資本ストック水準は貨幣的要因には依存しないと考えるのが妥当である。そこで、われわれがあきらかにすべきことは、初期点における消費水準と貨幣供給の成長率との関係ということになる。

(14)(15)で表現される動学体系の最適資本ストック水準を解曲線の形で表現する。

$$k^* = k^*[t, (c^0(\theta), k^0); \theta]$$

(29)

図 5 ($\phi_{cc} < 0, \phi_{kk} < 0$)



この解曲線を $t = T$ の点で全微分し、極限を取ることで次の式を得る。

$$\left. \frac{\partial k}{\partial c^0} \right|_{t=\infty} \cdot \frac{\partial c^0}{\partial \theta} + \left. \frac{\partial k}{\partial k^0} \right|_{t=\infty} \cdot \frac{\partial k^0}{\partial \theta} + \left. \frac{\partial k}{\partial \theta} \right|_{t=\infty} > 0 \quad (30)$$

この式と資本ストックの初期値に関する仮定から次の式を得る。

$$\left. \frac{\partial k}{\partial c^0} \right|_{t=\infty} \cdot \frac{\partial c^0}{\partial \theta} + \left. \frac{\partial k}{\partial \theta} \right|_{t=\infty} > 0 \quad (31)$$

われわれが求めたいのは $\partial c^0 / \partial \theta$ の符号である、そのために (31) の他の要素の符号を求める、以下のシミュレーションを行う。まず $\partial k(\infty) / \partial c_0$ を求める。

$$\begin{bmatrix} \partial \dot{c} / \partial c^0(t) \\ \partial \dot{k} / \partial c^0(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{cc} & \phi_{ck} \\ \phi_{kc} & \phi_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial c / \partial c^0(t) \\ \partial k / \partial c^0(t) \end{bmatrix} \quad (32)$$

ここで、() 中の t は時点を表す。さて、Oniki [9] にならって、 $\partial c / \partial c^0$, $\partial k / \partial c^0$ の初期値をそれぞれ 1, 0 として (32) の解の動きを調べる。(32) の右辺の係数行列の符号パターンのうち、対角要素は一般に不定であり、位相図に描くと図 1 のようになる。図から明らかなように、解経路の動きは明確にはわからない。そこで、対角要素が大域的に一定の符号をとると考える。すると、図 2 一図 5 までの 4 つの位相図が描ける。これらから、符号が不定な対角要素が、経路上で符号の変化を起こさない限り、 $\partial c / \partial c^0$, $\partial k / \partial c^0$ は第 4 象限に留まり続けることがわかる。そこで、(33)(34)を得る。

$$\partial c / \partial c^0(t) > 0 \text{ for all } t \quad (33)$$

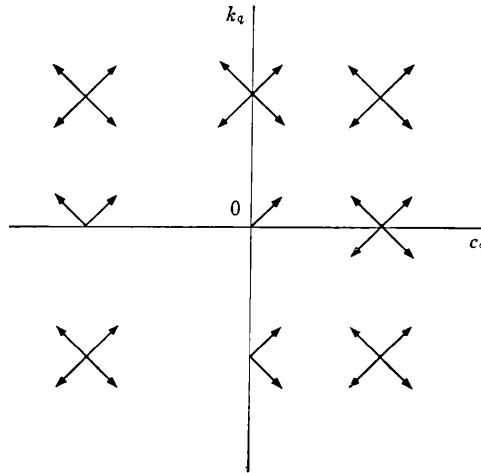
$$\partial k / \partial c^0(t) < 0 \text{ for all } t \quad (34)$$

次に $\partial c / \partial \theta$, $\partial k / \partial \theta$ の動きを調べる。

$$\begin{bmatrix} \partial \dot{c} / \partial \theta \\ \partial \dot{k} / \partial \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{cc} & \phi_{ck} \\ \phi_{kc} & \phi_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial c / \partial \theta \\ \partial k / \partial \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_{c\theta} \\ \phi_{k\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & - \\ - & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial c / \partial \theta \\ \partial k / \partial \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} + \\ + \end{bmatrix} \quad (35)$$

この式は(21)の変分方程式に c_θ , k_θ を代入することによって得られる。この式を基に位相図(図6)を描くと、 $\partial c / \partial \theta$, $\partial k / \partial \theta$ の経路が第3象限に入らないことがわかる。 $\partial k / \partial c^0$ の符号の導出の際に行ったように大域的に対角要素の符号が一定としても結論はわからない。そこで、 $\partial c(T) / \partial \theta$, $\partial k(T) / \partial \theta$ の符号はともに不定となる。

図 6



(31)にいままでの結論を代入すると、 $\partial c^* / \partial \theta(0)$ の符号が一般には不確定となることがわかる。

これで比較動学の準備は整った。(21)の変分方程式に $k_\theta(0)=0$ を代入して解の動きを調べると、定常解の近傍では k_θ^* が必ず正になることは確かであるにしても、大域的には解経路が $k_\theta^* < 0$ になる部分を通過する可能性があることがわかる。Fischer が定常解の近傍に視点を限定して得た結論は、大域的な分析からは保証されないのである。

ちなみに定常解の近傍での $\partial c / \partial \theta$ の符号は $\partial c^0 / \partial \theta$ の符号と同一である。また、最適消費水準、最適資本ストック水準が同時に貨幣供給の成長率に対して負の反応を示すことはないこともわかる。⁽³⁾

5 結 論

貨幣供給の成長率の変化は資本蓄積率の変化を生む。しかも、貨幣供給の成長率が資本蓄積率に負の影響を支える可能性も否定できない。このことを、大域的に示したことがこの論文の貢献である。貨幣供給方式を調節することの政策効果を議論するときには、長期均衡点や、その近傍でどのような変化が起きるかではなく、むしろ政策を実行した直後の資本蓄積率の動きをみることができの方が有意義であろう。Sidrauski は定常解の性質を解明し、Fischer は最適経路の定常解の近傍部分に注意を限定した。それに対して、本稿は初期点の近傍における政策の効果を変分方程式による比較動学によってあきらかにすることに力点を置いた。

注 釈

- (1) 正確には最適条件にはこの他に次の横断条件が加わる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\delta t} \lambda k = 0$$

- (2) 以下では(4)(5)で表現される最適経路上の点を(*)をつけて表す。
(3) (4)の変分方程式の解経路が第3象限に入らない。

参 考 文 献

- [1] Brock William A. "Money and Growth: The Case of Long Run Perfect Foresight," International Economic Review, 15 (1974).
- [2] Calvo, Guillermo: "On Models of Money and Perfect Foresight," International Economic Review, 20 (1979).
- [3] Case, D.: "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation: A Turnpike Theorem," Econometrica 34 (1966).
- [4] Dornbusch, Rudiger and Jacob a. Frenkel: "Inflation and Growth: Alternative Approaches," Journal of Money, Credit and Banking (1973).
- [5] Drazen, Allan: "Inflation and Capital Accumulation under Finite Horizon," Journal of Monetary Economics 8 (1981).
- [6] Fischer, Stanley: "Anticipations and the Non-Neutrality of Money," Journal of Political Economy, 87 (1975).
- [7] ———: "Capital Accumulation on the Transition Path in a Monetary Optimizing Model," Econometrica 45 (1979).
- [8] Nagatani "Macroeconomic Dynamics" Cambridge University Press 1981.
- [9] Oniki, Hajime: "Comparative Dynamics (Sensitivity Analysis) in Optimal Control Theory," Journal of Economic Theory 1973.
- [10] Sidrauski, Miguel: "Rational Choice and Patterns of Growth in a Monetary Economy", American Economic Review, Paper and Proceedings, 57 (1967).
- [11] Tobin, James: "Money and Economic Growth", Econometrica, 33 (1965).

伊 藤 幹 夫 (経済学部助手)

大 平 哲 (大学院経済学研究科博士課程)