Title	無限次元空間における絶対連続函数の収束
Sub Title	Convergence of absolutely continuous vector-valued functions
Author	丸山, 徹
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1990
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.82, No.特別号-I (1990. 3) ,p.89- 104
Abstract	
Notes	福岡正夫教授退任記念論文集
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19900301-0089

「三田学会雑誌」82巻特別号—I（1990年3月）

無限次元空間における絶対連続函数の収束

丸　山　　　徹*

序

筆者がかつて多価作用素によって定義される微分方程式（所謂 Filippov 型発展方程式）や，そのような方程式を制約に含む変分問題の解の存在条件を究明した折，問題解決への重要なひとつの鍵となったのが，Sobolev 空間における弱収束定理であった。(1)

つまり，$\{x_n\}$ を Sobolev 空間 $\mathfrak{W}^{1,2}([0, T], \mathbb{R}^l)$ の弱収束列とするとき，次のような条件を満たす部分列 $\{x_{n'}\}$ と $x^* \in \mathfrak{W}^{1,2}([0, T], \mathbb{R}^l)$ とが存在するという定理がそれである。

(i) $x_{n'}(t) \longrightarrow x^*(t)$ （一様収束）.

(ii) $w\text{-}\lim_{n'} \dot{x}_{n'} = \dot{x}^*$ in $\mathfrak{L}^2([0, T], \mathbb{R}^l)$.

しかしこの事実は x_n や x^* の値域の次元が有限であることに決定的に依存しており，無限次元空間 $\mathfrak{X}$ に値をとる函数が作る Sobolev 空間 $\mathfrak{W}^{1,2}([0, T], \mathfrak{X})$（より一般には $\mathfrak{W}^{1,p}$; $p \geqq 1$）では，一般には成り立たないことが知られている（後述）。

そこで上記の収束定理と同種の役割を果たしうる法則を，$\mathfrak{W}^{1,2}([0, T], \mathfrak{X})$ 上にはたして見出すことが可能であろうか？——当然このような問いが浮上してくるのである。無限次元空間で定義されるある種の発展方程式や，$\mathfrak{W}^{1,2}([0, T], \mathfrak{X})$ 上で定義される非線形積分作用素の連続性を吟味するうえで，この問題は避けて通ることのできないハードルといえよう。

筆者も，厳しい条件の下においてではあるが，この問題にひとつの解答を得たので，本稿では最も単純な形で，その考え方の骨子を述べる。より一般的な取り扱いや，発展方程式・変分学などへの応用については，ここでは論じられないので，Maruyama〔14〕をご覧いただければ有難い。

また，推論の過程では，Banach 空間に値をとる函数の積分（Bochner 積分）に関する細かな性質や，超函数論の基本的概念が援用される。これらの諸理論について十分な予備知識をもたない読者をも念頭において，その要点をあらかじめ簡潔に整理しておくことにしたい。そしてそれが，本稿のもうひとつの目的になっているのである。

---

*) 福岡正夫教授のご退任にあたり，教授が慶應義塾における学問の発展に残された決定的な影響力について，あらためて思いを深くしている。長い歳月の間に賜った，はかり知れない学恩に心から感謝して，いま三田の山をおりていかれる教授をお送りしたい。教授のますますのご壮健とご健筆を祈る。

注（1） Maruyama〔11〕，〔12〕。

1. Bochner 積分

まず Banach 空間に値をとる函数の積分について，必要な限りでの要点を述べよう。(2)

$(T, \mathscr{E}, \mu)$ を測度空間とし，$\mathfrak{X}$ を Banach 空間とする。

有限個の可測集合 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_p \in \mathscr{E}$ と，ベクトル $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_p \in \mathfrak{X}$ によって

$$\varphi(t)=\sum_{i=1}^{p} x_i \chi_{E_i}(t)\ ;\quad t\in T$$

と表現される函数 $\varphi: T \longrightarrow \mathfrak{X}$ を，$\mathfrak{X}$-値の**単函数**（simple function）と呼ぶ。ここで χ_{E_i} は，集合 E_i の特性函数である。

函数 $f: T \longrightarrow \mathfrak{X}$ に対して

$$\|\varphi_n(t)-f(t)\| \longrightarrow 0 \quad \text{as } n \longrightarrow \infty \text{ a.e.}$$

を満たす単函数の列 $\{\varphi_n\}$ が存在するとき，f は**強可測**（strongly measurable）であるという。また任意の $\Lambda \in \mathfrak{X}'$（$\mathfrak{X}$ の双対空間）に対して，函数

$$t \longmapsto \Lambda(f(t))$$

が（実数値または複素数値の）可測函数であるとき，f は**弱可測**（weakly measurable）であるということにしよう。

〔A〕（Pettis）函数 $f: T \longrightarrow \mathfrak{X}$ が強可測であるためには，次の二条件の成り立つことが必要十分である。

(i) f は殆ど可分値的（separably valued）である。——つまり，$f(T\backslash N)$ が可分であるような，測度 0 の可測集合 N が存在する。

(ii) f は弱可測である。

したがって，とくに $\mathfrak{X}$ 自身が可分である場合には，強・弱の可測性は区別が消滅する。

次に $\mathfrak{X}$ に値をとる函数の積分を定義する。通常の実数値函数の場合と同様，まず単函数の積分を定義しよう。$\varphi: T \longrightarrow \mathfrak{X}$ を

$$\varphi(t)=\sum_{i=1}^{p} x_i \chi_{E_i}(t), \tag{1}$$

注（2）本節の内容についてより詳しくは，Diestel-Uhl〔7〕Chap. II，Dunford-Schwartz〔8〕Chap. III，Yosida〔24〕pp. 132-136 などを見よ。

$$x_i \in \mathfrak{X},\ E_i \in \mathscr{E}\ (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ p)$$

なる形式の単函数とし，$t \longmapsto \|\varphi(t)\|$ は可積分とするとき，ベクトル

$$\sum_{i=1}^{p} x_i \mu(E_i)$$

をφの **Bochner 積分**（Bochner-Integral）といい，

$$\int_T \varphi\, d\mu$$

という記号で表わす。この値はφの表現の仕方(1)にはよらず，それから独立に定まるから，well-defined である。

次に函数 $f: T \longrightarrow \mathfrak{X}$ が強可測で，しかも

$$\lim_{n\to\infty} \int_T \|f(t)-\varphi_n(t)\|\, d\mu = 0 \tag{2}$$

を満たす単函数の列 $\{\varphi_n\}$ が存在するとき，fは **Bochner 可積分**（Bochner-integrable）であるといい，

$$\lim_{n\to\infty} \int_T \varphi_n\, d\mu \tag{3}$$

をfの Bochner 積分と呼んで，これを

$$\int_T f\, d\mu$$

と表記する。極限(3)は必ず存在し，その値は(2)を満たす単函数列の選び方には依存しないから，fの Bochner 積分はなんの曖昧さもなく定義されたことになる。

〔**B**〕 強可測函数 $f: T \longrightarrow \mathfrak{X}$ が Bochner 可積分であるためには，

$$\int_T \|f(t)\|\, d\mu < +\infty$$

であることが必要十分である。

Bochner 積分に対しては，通常の Lebesgue 積分と同様，次のような性質が容易に確認される。

1° $f: T \longrightarrow \mathfrak{X}$ が Bochner 可積分のとき，

$$\left\|\int_T f(t)\, d\mu\right\| \leqq \int_T \|f(t)\|\, d\mu.$$

2° $f_1, f_1 : T \longrightarrow \mathfrak{X}$ が Bochner 可積分のとき，任意の $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$（または$\mathbb{C}$）に対して

$$\int_T (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)\, d\mu = \alpha_1 \int_T f_1\, d\mu + \alpha_2 \int_T f_2\, d\mu.$$

また重要な Lebesgue の上限収束定理（Dominated Convergence Theorem）は，次の形に一般化される。

〔**C**〕（上限収束定理）$\mathfrak{X}$-値の Bochner 可積分函数の列 $\{f_n : T \longrightarrow \mathfrak{X}\}$ がある函数 $f : T \longrightarrow \mathfrak{X}$ に概収束し，また

$$\|f_n(t)\| \leqq \phi(t) \quad \text{a.e. for all } n$$

を満たす $\phi \in \mathfrak{L}^1(T, \mathbb{R})$ が存在するならば，f は Bochner 可積分で，かつ

$$\int_T f\, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_T f_n\, d\mu$$

が成り立つ。

本節の終わりに，もうひとつ有用な事実を掲げておこう。

〔**D**〕 $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ を Banach 空間，$A : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$ を有界な線形作用素とする。$f : T \longrightarrow \mathfrak{X}$，および $A \circ f : T \longrightarrow \mathfrak{Y}$ がともに Bochner 可積分ならば，

$$A\left(\int_E f\, d\mu\right) = \int_E A \circ f\, d\mu \quad \text{for all } E \in \mathscr{E}.$$

2. Radon-Nikodým の定理

前節で見たように，少なくとも初等的な範囲内においては，Bochner 積分の理論は通常の Lebesgue 積分の理論とほぼ同様の取り扱いが可能である。

しかし実は，両者の間には見逃すことのできない顕著な隔りが存在することも事実なのであって，それは主として，Banach 空間に値をとるベクトル測度[(3)]については，所謂 Radon-Nikodým の定理が必ずしも成り立たないことに起因するように思われる。

実函数論における Radon-Nikodým の定理の analogue として，次のような問題を考えてみよう。$(T, \mathscr{E}, \mu)$ を有限測度空間，$\mathfrak{X}$ を Banach 空間とし，$\mathfrak{X}$-値ベクトル測度[(4)] $G : \mathscr{E} \longrightarrow \mathfrak{X}$ は有界

注（3） ベクトル測度については Diestel-Uhl〔7〕，Kluvánek-Knowles〔9〕，丸山〔13〕第3章などを参照していただきたい。最も一般的形式での研究としては，Saint-Beuve〔20〕。

変動で，μ について絶対連続であるとしよう。このとき

$$G(E)=\int_E g\,d\mu \quad \text{for all } E\in\mathscr{E} \tag{4}$$

を満たす Bochner 可積分函数 $g: T\longrightarrow\mathfrak{X}$ がはたして存在するであろうか？——これが問題である。通常の実数値測度の場合と異なり，これに対する答えは必ずしも肯定的ではない。

反例[5] $(T, \mathscr{E}, \mu)$ を atom をもたない有限測度空間としよう。集合函数 $G: \mathscr{E}\longrightarrow\mathfrak{L}^1(T, \mathbb{R})$ を

$$G: E\longmapsto \chi_E\,;\ E\in\mathscr{E}$$

（χ_E は E の特性函数）と定義すれば，G は $\mathfrak{L}^1(T, \mathbb{R})$-値のベクトル測度で，それは有界変動かつ μ について絶対連続である。いま仮に

$$G(E)=\int_E g\,d\mu\,;\ E\in\mathscr{E}$$

を満たす $g\in\mathfrak{L}^1(T, \mathfrak{L}^1(T, \mathbb{R}))$ が存在すると想定してみよう。線形作用素 $A: \mathfrak{L}^\infty(T, \mathbb{R})\longrightarrow\mathfrak{L}^1(T, \mathbb{R})$ を

$$Af=\int_T f\cdot g\,d\mu\,;\ f\in\mathfrak{L}^\infty(T, \mathbb{R})$$

と定義すれば，A は完全連続である。[6] したがって $\{A(\chi_E)\mid E\in\mathscr{E}\}$ は $\mathfrak{L}^1(T, \mathbb{R})$ における相対コンパクト集合となる。他方 $\{A(\chi_E)\mid E\in\mathscr{E}\}$ には，

$$\mu(E_n)=\mu(T)/2,$$
$$\mu(E_n\triangle E_m)=\mu(T)/4 \quad \text{for } n\neq m$$

を満たす列 $\{\chi_{E_n}\}$ が存在する。すると

$$\|\chi_{E_n}-\chi_{E_m}\|_1=\mu(E_n\triangle E_m)=\mu(T)/4$$

となり，これは A が完全連続であることと矛盾する。これは(4)を満たすが如き g の存在を想定したことから生じた不合理である。

そこで μ を有限測度とするとき，μ について絶対連続な，任意の有界変動 $\mathfrak{X}$-値ベクトル測度 G:

注（4） 互いに素な可測集合列 $\{E_n\}$ に対して，G が σ-加法性：$G(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}G(E_n)$（強収束）を満たすとき，$G$ は $\mathfrak{X}$-値の**ベクトル測度** (vector measure) と呼ばれる。$\mathfrak{X}$-値ベクトル測度 G に対して，

$$|G|(E)=\sup_{\pi}\sum_{A\in\pi}\|G(A)\|$$

によって定義される集合函数 $|G|: \mathscr{E}\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ を G の**変動** (variation) という。ここで sup は，E を有限個の可測集合に分割する，すべての仕方 π についてとるのである。そして $|G|(T)<+\infty$ のとき，G は**有界変動** (bounded variation) であるという。$(T, \mathscr{E})$ 上の（実数値）有限測度 μ について，次の二条件は同値である。

1° $\lim_{\mu(E)\to\infty} G(E)=0.$

2° $\mu(E)=0 \Longrightarrow G(E)=0\ (\in\mathfrak{X}).$

このとき，G は μ について**絶対連続** (absolutely continuous) であるという。（丸山〔13〕第3章を見よ。）

（5） Diestel-Uhl〔7〕p. 61 による。

（6） Diestel-Uhl〔7〕p. 55, Theorem 8。

$\mathscr{E}\longrightarrow\mathfrak{X}$ に対して，(4)を満たす Bochner 可積分函数 $g: T\longrightarrow\mathfrak{X}$ が存在するとき，$\mathfrak{X}$ は $(T, \mathscr{E}, \mu)$ についての **Radon-Nikodým の性質** (Radon-Nikodým property ; RNP) を有するという。また $\mathfrak{X}$ が任意の有限測度空間について RNP を有するとき，$\mathfrak{X}$ は単に RNP を有するということにする。(7)

たとえば回帰的 (reflexive) な Banach 空間（とくに Hilbert 空間)，可分な双対空間などは，RNP を有する空間の代表例であるが，他方，$\mathfrak{C}([0, 1], \mathbb{R})$，$\mathfrak{L}^1([0, 1], \mathbb{R})$，$c_0$ などは RNP をもたない空間である。

以下 RNP との関連において，Bochner 可積分な函数が作る Banach 空間の双対空間の表現と，Banach 空間に値をとる絶対連続函数の微分可能性とについて述べる。

$\|f\|\in\mathfrak{L}^p(T, \mathbb{R})$ $(p\geqq1)$ であるような Bochner 可積分函数の全体を $\mathfrak{L}^p(T, \mathfrak{X})$ と書くことにすれば，この空間はノルム

$$\|f\|_p=\left(\int_T\|f(t)\|^p\,d\mu\right)^{1/p}$$

の下に Banach 空間となる。(もちろん殆どいたるところ同じ値をとる函数は同一視する。)

〔E〕 Tはコンパクト距離空間，μ はT上の正値 Radon 測度とし，$\mathfrak{X}$ は可分な Banach 空間とすれば，$\mathfrak{L}^p(T, \mathfrak{X})$ $(p\geqq1)$ は可分である。

この空間の双対空間については，次の事実が知られている。

〔F〕 $\mu(T)<+\infty$ とし，$1\leqq p<+\infty$とする。このとき，次の二命題は同値である。

(i) $\mathfrak{L}^p(T, \mathfrak{X})'\cong\mathfrak{L}^q(T, \mathfrak{X}')$; $1/p+1/q=1$. (8)

(ii) $\mathfrak{X}'$ は $(T, \mathscr{E}, \mu)$ について RNP を有する。

注 (7) 詳しくは Diestel-Uhl〔7〕Chap. III-IV。RNP は，Banach 空間の所謂 dentability や Krein-Milman の性質などとも深いかかわりを有し，最近の Banach 空間の幾何学に関する重要な研究テーマとなっている。Diestel〔6〕を参照。また Rieffel〔19〕はこの方向の研究における古典的論文である。

(8) (i)の意味するところは詳しくいえばこうである。任意の $g\in\mathfrak{L}^q(T, \mathfrak{X}')$ について，$\mathfrak{L}^p(T, \mathfrak{X})$ 上の作用素 Λ_g を

$$\langle\Lambda_g, f\rangle\equiv\Lambda_g(f)=\int_T\langle g(t), f(t)\rangle d\mu\,;\ f\in\mathfrak{L}^p(T, \mathfrak{X})$$

と定義すれば，$\Lambda_g\in\mathfrak{L}^p(T, \mathfrak{X})'$。逆に Λ を $\mathfrak{L}^p(T, \mathfrak{X})'$ の任意の元とすれば，$g_\Lambda\in\mathfrak{L}^q(T, \mathfrak{X}')$ が一意に定まり，

$$\langle\Lambda, f\rangle=\int_T\langle g_\Lambda(t), f(t)\rangle d\mu\,;\ f\in\mathfrak{L}^p(T, \mathfrak{X})$$

となる。このように $\mathfrak{L}^q(T, \mathfrak{X}')$ の各元と $\mathfrak{L}^p(T, \mathfrak{X})'$ の各元とは過不足なく一対一に対応し，その対応は等長同型である。(i)はこの意味において，$\mathfrak{L}^p(T, \mathfrak{X})'$ と $\mathfrak{L}^q(T, \mathfrak{X}')$ とが，線形ノルム空間として同一視しうることを述べている。

本節の最後に，$\mathfrak{X}$-値の絶対連続函数についての重要事項を指摘しておこう。

$\mathbb{R}$ の区間 $[a, b]$ 上で定義され，Banach 空間 $\mathfrak{X}$ に値をとる函数 $f: [a, b] \longrightarrow \mathfrak{X}$ を考える。任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\delta(\varepsilon)>0$ を十分に小さく選び，

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \leqq \delta(\varepsilon)$$

である互いに素な有限個の区間 $[a_i, b_i) \subset [a, b]$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ に対して，必ず

$$\sum_{i=1}^{n} \| f(b_i) - f(a_i) \| \leqq \varepsilon$$

を成り立たせることができるとき，f は**絶対連続**（absolutely continuous）であるという。

Komura〔10〕は，$\mathfrak{X}$ が回帰的な Banach 空間で，$f: [a, b] \longrightarrow \mathfrak{X}$ が絶対連続ならば，このような f に対して微積分学の基本定理が成り立つことを示した。それはいま少し一般化されて，次の命題を得る。(9)

〔G〕 $\mathfrak{X}$ を RNP を有する Banach 空間とすれば，絶対連続な函数 $f: [a, b] \longrightarrow \mathfrak{X}$ は (a, b) 上の殆どすべての点で Fréchet 微分可能で，

$$f(t) = f(a) + \int_a^t \frac{df}{ds}(s)\, ds \ ; \quad t \in [a, b]$$

が成り立つ。（ds は Lebesgue 測度。）

$\mathfrak{X}$ が RNP をもたないときは，この帰結は必ずしも成り立たない。

反例(10) $\mathfrak{X} = \mathfrak{L}^1([0, 1], \mathbb{R})$ とし，$f: [0, 1] \longrightarrow \mathfrak{L}^1([0, 1], \mathbb{R})$ を

$$f(t) = \chi_{[0,\, t]} ; \ 0 \leqq t \leqq 1$$

と定義すれば，f は絶対連続である。だがこの f は $[0, 1]$ 上のいかなる点においても微分可能ではない。

実際，仮に $t=t_0$ で f が微分可能であるとすれば，任意の $g \in \mathfrak{L}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ について

$$\phi(t) = \langle g, f(t) \rangle = \int_0^1 g(s) \chi_{[0,\, t]}(s)\, ds$$

も $t=t_0$ において微分可能である。とくに $g \in \mathfrak{L}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ を

$$g(s) = \begin{cases} 1 & \text{for } s \leqq t_0 \\ -1 & \text{for } s > t_0 \end{cases}$$

と特定化すれば，

$$\phi(t) = \int_0^t g(s)\, ds = \begin{cases} t & \text{for } t \leqq t_0 \\ 2t_0 - t & \text{for } t > t_0 \end{cases}$$

注（9） Maruyama〔16〕。

（10） Barbu〔3〕pp. 15-16による。

である。この f は明らかに $t=t_0$ においては微分可能ではない。矛盾。

3. ベクトル値超函数と Sobolev 空間

本節では，Banach 空間に値をとる（L. Schwartz の意味での）超函数と Sobolev 空間について述べる。

通常の慣例により，0 以上の整数 $p_i\,(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ l)$ に対して，$p=(p_1,\ p_2,\ \cdots\cdots,\ p_l)$ とするとき，$|p|=p_1+p_2+\cdots\cdots+p_l$ を p の階数（order）という。またこの p に対して，微分作用素 D^p を

$$D^p=\frac{\partial^{p_1+p_2+\cdots\cdots+p_l}}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}\cdots\cdots\partial x_l^{p_l}}$$

と書くことにしよう。

Ω を $\mathbb{R}^l$ の開集合とし，K を Ω のコンパクト部分集合とする。K の中に台を有する無限回微分可能な実数値または複素数値函数の全体を $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ と書けば，これは明らかに線形空間である。

$\mathfrak{D}_K(\Omega)$ の位相をセミ・ノルムの族

$$p_{K,m}(\varphi)=\sup_{\substack{x\in K\\ |p|\leq m}}|D^p\varphi(x)|\ ;\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$$

によって定めると，$\mathfrak{D}_K(\Omega)$ は局所凸 Hausdorff 線形位相空間（locally convex Hausdorff topological vector space; LCHTVS）となる。[11]

さらに

$$\mathfrak{D}(\Omega)=\cup\{\mathfrak{D}_K(\Omega)|\,K\subset\Omega\text{はコンパクト}\}$$

とすれば，$\mathfrak{D}(\Omega)$ も線形空間である。そして $\mathfrak{D}(\Omega)$ には $\{\mathfrak{D}_K(\Omega)|\,K\subset\Omega\text{はコンパクト}\}$ から定まる，強い意味での帰納的極限位相（strict inductive limit topology）[12] を与えると，$\mathfrak{D}(\Omega)$ も LCHTVS となる。

〔**H**〕 $\mathfrak{D}(\Omega)$ の有向点族 $\{\varphi_\alpha\}$ がある $\varphi^*\in\mathfrak{D}(\Omega)$ に収束するためには，ある（α に無関係な）コンパクト集合 $K\subset\Omega$ に対して，

注（11） $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ は LCHTVS であるばかりでなく，次のような性質を満たす空間の例ともなっている。
(i) $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ は **Fréchet 空間**である。つまり $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ は完備に距離づけ可能な LCHTVS である。
(ii) $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ は **Montel 空間**である，つまり任意の有界集合が相対コンパクトな**樽型空間**（barreled space）である。ここで樽型空間とは，すべての閉・凸・円形かつ吸収的な集合（これを**樽** barrel という）が原点の近傍であるような LCHTVS のことを指す。

（12） Schwartz〔22〕Chap. IV を見よ。$\mathfrak{D}(\Omega)$ もやはり Montel 空間であるが，距離づけは不可能である。

$$\mathrm{supp}\ \varphi_\alpha \subset K \quad \text{for all } \alpha$$

で，しかもすべての階数の微分作用素 D^p について，

$$D^p\varphi_\alpha \longrightarrow D^p\varphi^* \ (\text{一様収束})$$

の成り立つことが必要十分である。

$\mathfrak{X}$ を Banach 空間とし，$\mathfrak{D}(\Omega)$ で定義され，$\mathfrak{X}$ に値をとる連続な線形作用素 $S:\mathfrak{D}(\Omega)\longrightarrow\mathfrak{X}$ を **$\mathfrak{X}$-値の超函数** ($\mathfrak{X}$-valued distribution) と呼び，その全体を $\mathfrak{D}'(\Omega|\mathfrak{X})$ と書くことにしよう。

$f:\Omega\longrightarrow\mathfrak{X}$ を，Ω の任意のコンパクト集合上で Bochner 可積分（つまり **Bochner 局所可積分** locally integrable）な函数とすれば，

$$S_f:\varphi\longmapsto\int_\Omega f(t)\cdot\varphi(t)\,dt \ ; \quad \varphi\in\mathfrak{D}(\Omega)$$

と定義される作用素 $S_f:\mathfrak{D}(\Omega)\longrightarrow\mathfrak{X}$ は $\mathfrak{X}$-値の超函数である。f とそれが定める $\mathfrak{X}$-値の超函数 S_f とを同一視すれば，**Bochner 局所可積分な函数は $\mathfrak{X}$-値の超函数である**ということが許されるであろう。

$S\in\mathfrak{D}'(\Omega|\mathfrak{X})$ の $\varphi\in\mathfrak{D}(\Omega)$ における値を表わすには，$S(\varphi)$ と書くかわりに $\langle S,\varphi\rangle$ とすることも多い。

S を $\mathfrak{X}$-値の超函数，D^p を任意の微分作用素とするとき，各 $\varphi\in\mathfrak{D}(\Omega)$ に対して

$$(-1)^{|p|}\langle S,\ D^p\varphi\rangle\in\mathfrak{X}$$

を対応させる作用素を D^pS と書くことにすれば，D^pS も $\mathfrak{X}$-値の超函数である。これを S の**超函数の意味での導函数**あるいは**導超函数** (distributional derivative, generalized derivative) と呼ぶ。

$$\langle D^pS,\varphi\rangle=(-1)^{|p|}\langle S,\ D^p\varphi\rangle \ ; \quad \varphi\in\mathfrak{D}(\Omega)$$

である。こうすれば，$\mathfrak{X}$-値の超函数は，超函数の意味では何回でも微分可能となるのである。[(13)]

そこで，Ω 上で定義され $\mathfrak{X}$ に値をとる函数 $f:\Omega\longrightarrow\mathfrak{X}$ のうち，階数が k 以下の導超函数 D^sf ($|s|\leqq k$) がすべて $\mathfrak{L}^p(\Omega,\mathfrak{X})$ ($p\geqq1$) に属するものの全体を $\mathfrak{W}^{k,p}(\Omega,\mathfrak{X})$ と書き，このような型の空間を **$\mathfrak{X}$-値の Sobolev 空間** ($\mathfrak{X}$-valued Sobolev space) と呼ぶ。[(14)]

注 (13) 超函数論全般については，もちろん Schwartz〔21〕が最も重要な文献である。超函数の微分を本文のように定義する発想法についてもこれを見よ。超函数の函数解析的基礎づけを厳密に論じたものとして，筆者の講義録『超函数の理論』（慶應義塾図書館蔵）が役に立てば有難い。

(14) Sobolev 空間の一般論については Adams〔1〕，Maz'ja〔18〕，Yosida〔24〕など。ただし $\mathfrak{X}$-値の Sobolev 空間についてはまだ体系的な研究書は見あたらないようである。わずかな例外として Barbu〔3〕が有用である。

$\mathfrak{W}^{k,p}(\Omega, \mathfrak{X})$ は明らかに線形空間で，ノルム

$$\|f\|_{k,p}=\Big(\sum_{|s|\leq k}\int_\Omega \|D^s f(x)\|^p\, dx\Big)^{1/p};\quad dx=dx_1dx_2\cdots\cdots dx_l$$

の下に Banach 空間となる。

とくに $\mathfrak{X}$ が Hilbert 空間で，しかも $p=2$ の場合は，内積

$$\langle f, g\rangle_{k,2}=\sum_{|s|\leq k}\int_\Omega \langle D^s f(x),\ D^s g(x)\rangle dx$$

の下に，$\mathfrak{W}^{k,2}(\Omega, \mathfrak{X})$ は Hilbert 空間になる。これをとくに $\mathfrak{H}^k(\Omega, \mathfrak{X})$ と書くこともある。

〔**I**〕 $\mathfrak{X}$ が可分な Banach 空間ならば，$\mathfrak{W}^{k,p}(\Omega, \mathfrak{X})$ $(p\geqq 1)$ も可分である。

階数が k 以下の，0 以上の整数の組 $s=(s_1, s_2, \cdots\cdots, s_l)$ の個数を K と書くことにすると，次の形で Sobolev 空間の双対空間の表現が得られる。

〔**J**〕 $\mathfrak{X}$ を RNP を有する Banach 空間とし，$1\leqq p<+\infty$, $1/p+1/q=1$ とする。このとき，任意の $\Lambda\in\mathfrak{W}^{k,p}(\Omega, \mathfrak{X})'$ に対して

$$g\equiv(g_s)_{0\leqq|s|\leqq k}\in[\mathfrak{L}^q(T, \mathfrak{X}')]^K$$

が一意に定まって，

$$\Lambda(f)=\sum_{0\leqq|s|\leqq k}\int_\Omega\langle D^s f(x),\ g_s(x)\rangle dx;\quad f\in\mathfrak{W}^{k,p}(\Omega, \mathfrak{X})$$

が成り立つ。Λ とこれを表現する g との対応は，$\mathfrak{W}^{k,p}(\Omega, \mathfrak{X})'$ と $[\mathfrak{L}^q(T, \mathfrak{X}')]^K$ との間の等長同型写像である。すなわち，

$$\mathfrak{W}^{k,p}(\Omega, \mathfrak{X})'\cong[\mathfrak{L}^q(T, \mathfrak{X}')]^K.$$

次の命題は Sobolev の埋蔵定理（Sobolev's Imbedding Theorem）[15] と呼ばれる一連の事実のうち，最も簡略なもののひとつである。

〔**K**〕（Sobolev の埋蔵定理）Ω を $\mathbb{R}^l$ における C^1 級の有界領域とし，k は自然数，$1\leqq p<+\infty$, さらに j は

$$k>j+\frac{l}{p}$$

を満たす整数とする。このとき，

注（15） Adams〔1〕Chap. V-VI.

$$\mathfrak{W}^{k,p}(\Omega,\ \mathbb{C})\subset\mathfrak{C}^{j}(\bar{\Omega},\ \mathbb{C})$$

であり，埋蔵作用素は完全連続である。

最後に，Ωとして$\mathbb{R}$の区間（0, T）を考える。いま $\bar{\Omega}=[0,\ T]$ 上で定義され，$\mathfrak{X}$ に値をとる函数で，($k-1$) 階までの導函数が絶対連続であり，しかも $\mathfrak{L}^p([0,\ T],\ \mathfrak{X})$ ($p\geqq1$) に属するものの全体を $\mathfrak{A}^{k,p}([0,\ T],\ \mathfrak{X})$ と書くことにしよう。

〔**L**〕 $\mathfrak{X}$ を RNP を有する Banach 空間とするとき，$f\in\mathfrak{L}^p([0,\ T],\ \mathfrak{X})$ について次の二命題は同値である。

(i) $f\in\mathfrak{W}^{k,p}([0,\ T],\ \mathfrak{X})$.

(ii) （0, T）の殆どすべての t について $f(t)=f_1(t)$ を満たす $f_1\in\mathfrak{A}^{k,p}([0,\ T],\ \mathfrak{X})$ が存在する。

4. Sobolev 空間における収束

本節では，序において指摘した $\mathfrak{W}^{k,p}(\Omega,\ \mathfrak{X})$ における函数列の収束問題にひとつの解答を与えることにしよう。そして前節までに整理した各種の理論を前提として，推論の過程も厳密に示したいと思う。

まず，既に知られている，$\mathfrak{X}=\mathbb{R}^l$ の場合に関する事実を掲げておこう。

〔**M**〕 $\mathfrak{W}^{1,p}([0,\ T],\ \mathbb{R}^l)$ ($p\geqq1$) における点列 $\{x_n\}$ がある $x^*\in\mathfrak{W}^{1,p}([0,\ T],\ \mathbb{R}^l)$ に弱収束するならば，次の二条件を満たす部分列 $\{x_{n'}\}$ が存在する。

(i) $\displaystyle\lim_{n'\to\infty}\ \sup_{t\in[0,T]}\|x_{n'}(t)-x^*(t)\|=0$ as $n'\longrightarrow+\infty$ (一様収束).

(ii) $\displaystyle w\text{-}\lim_{n'\to\infty}\dot{x}_{n'}=\dot{x}^*$ in $\mathfrak{L}^p([0,\ T],\ \mathbb{R}^l)$.

証明[(16)] $l=1$ として証明すれば十分であろう。まず $\{x_n\}$ は $\mathfrak{W}^{1,p}([0,\ T],\ \mathbb{R})$ の弱収束列であるから，それは強有界である。Sobolev の埋蔵定理〔K〕により，$\mathfrak{W}^{1,p}\subset\mathfrak{C}([0,\ T],\ \mathbb{R})$ で，しかも埋蔵作用素は完全連続である。したがって，$\{x_n\}$ は $\mathfrak{C}([0,\ T],\ \mathbb{R})$ の相対コンパクト集合となるから，ある $x^{**}\in\mathfrak{C}([0,\ T],\ \mathbb{R})$ に一様収束する部分列 $\{x_{n'}\}$ を有する。

これからただちに

注 (16) $p=2$ の場合についての，増田〔17〕pp. 82-83 による証明に負うている。筆者が〔11〕,〔12〕において利用したのも，この型の定理であった。

$$\underset{n'\to\infty}{s\text{-}\lim}\, x_{n'}=x^{**} \quad \text{in } \mathfrak{L}^p([0,\ T],\ \mathbb{R})$$

を得る。したがって

$$\underset{n'\to\infty}{w\text{-}\lim}\, x_{n'}=x^{**} \quad \text{in } \mathfrak{L}^p([0,\ T],\ \mathbb{R})$$

は明らかである。他方 $\{x_{n'}\}$ は $\mathfrak{W}^{1,p}([0,\ T],\ \mathbb{R})$ において x^* に弱収束するのだから，

$$\underset{n'\to\infty}{w\text{-}\lim}\, x_{n'}=x^{*} \quad \text{in } \mathfrak{L}^p([0,\ T],\ \mathbb{R})$$

でなければならぬ。ゆえに $x^*=x^{**}$ となり，(i)が示された。(ii)は自明である。　　（証　了）

さていよいよ本稿の残りの部分では，$\mathfrak{W}^{1,p}([0,\ T],\ \mathfrak{X})$ $(\dim \mathfrak{X}=+\infty)$ の場合について，命題〔M〕の analogue を考えることにしよう。

一般に $\dim \mathfrak{X}=+\infty$ のときは，〔M〕はそのままの形では成り立たない。たとえば次の反例が知られている。

反例(17) $\mathfrak{H}$ を可分な Hilbert 空間，$\{\varphi_n;\ n=1,\ 2,\cdots\cdots\}$ をその完備な正規直交系(18)とする。いま $x_n:[0,\ 1]\longrightarrow\mathfrak{H}$ $(n=1,\ 2,\cdots\cdots)$ を

$$x_n(t)=t\,\varphi_n$$

と定義し，$x^*(t)\equiv 0$ とすれば，各 x_n および x^* は $\mathfrak{W}^{1,1}([0,\ 1],\ \mathfrak{H})$ の元である。この $\{x_n\}$ は $\mathfrak{W}^{1,1}([0,\ 1],\ \mathfrak{H})$ において x^* に弱収束する(19)けれども，$\{x_n\}$ のいかなる部分列をとっても，それを $\mathfrak{L}^1([0,\ 1],\ \mathfrak{H})$ において x^* に強収束させることはできない。したがって到底，$[0,\ 1]$ 上において一様収束させることも不可能である。

以下，議論を簡明に進めるために，$\mathfrak{H}$ を可分な実 Hilbert 空間とし，Sobolev 空間 $\mathfrak{W}^{1,p}([0,\ T],\ \mathfrak{H})$ における収束を研究しよう。

$\mathfrak{H}$ の位相として強位相を用いる場合は $\mathfrak{H}_s$，弱位相を用いる場合には $\mathfrak{H}_w$ と書いて区別する。

定理 (Maruyama〔14〕) $\mathfrak{H}$ を可分な実 Hilbert 空間とし，$\{x_n\}$ を次の条件を満たす $\mathfrak{W}^{1,p}([0,\ T],\ \mathfrak{H})$ $(p\geqq 1)$ の点列とする。

(i) 各 $t\in[0,\ T]$ に対して，集合 $\{x_n(t);\ n=1,\ 2,\cdots\cdots\}$ は $\mathfrak{H}_w$ の有界集合。

(ii) $\|\dot{x}_n(t)\|\leqq\phi(t)$ a.e.

を満たす $\phi\in\mathfrak{L}^p([0,\ T],\ [0,\ +\infty))$ が存在する。

注 (17) Cecconi〔5〕pp. 28–29.

(18) Yosida〔23〕p. 89 を見よ。

(19) Fourier 解析における Riemann-Lebesgue の補題を用いればただちに確認される。

このとき，次の(a)，(b)を満たす $\{x_n\}$ の部分列 $\{z_n\}$ と $x^*\in\mathfrak{W}^{1,p}([0,\ T],\ \mathfrak{H})$ とが存在する。

(a) $\{z_n\}$ は $\mathfrak{H}_w$ において x^* に一様収束する。

(b) $\{\dot{z}_n\}$ は $\mathfrak{L}^p([0,\ T],\ \mathfrak{H})$ において $\dot{x}^*$ に弱収束する。

証明 (a) まずはじめに，$\{x_n\}$ が同程度連続であることを示そう。ϕ は可積分函数であるから，任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ を十分に小さく選び，$|t-s|\leqq\delta$ $(t,\ s\in[0,\ T])$ ならば

$$\|x_n(t)-x_n(s)\|\leqq\int_s^t\|\dot{x}_n(\tau)\|d\tau\leqq\int_s^t\phi(\tau)d\tau\leqq\varepsilon \quad \text{for all } n$$

とすることができる。[20] これからただちに，$\{x_n\}$ は $\mathfrak{H}$ の強位相について同程度連続であることが知られるから，したがってもちろん，弱位相についても同程度連続である。

また仮定(i)により，すべての $t\in[0,\ T]$ について，集合 $\{x_n(t);\ n=1,\ 2,\cdots\cdots\}$ は $\mathfrak{H}_w$ における相対コンパクト集合である。ゆえに一般化された Ascoli-Arzelà の定理[21]により，$\{x_n\}$ は $\mathfrak{C}([0,\ T],\ \mathfrak{H}_w)$ の，一様収束位相に関する相対コンパクト集合である。[22]

再び仮定(i)により，

$$\sup_n\|x_n(0)\|\leqq C<+\infty$$

なる数 C が存在する。また仮定(ii)により，

$$\left\|\int_0^t\dot{x}_n(\tau)d\tau\right\|\leqq\|\phi\|_1 \qquad \text{for all } t\in[0,\ T]$$

である。したがって，〔G〕により，

$$\sup_n\|x_n(t)\|=\sup_n\left\|x_n(0)+\int_0^t\dot{x}_n(\tau)d\tau\right\|$$
$$\leqq C+\|\phi\|_1 \qquad \text{for all } t\in[0,\ T]$$

となり，各 x_n は $[0,\ T]$ から集合

$$M=\{w\in\mathfrak{H}\mid\|w\|\leqq C+\|\phi\|_1\}$$

の中への函数とみなすことができる。こうして，M は可分な Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ における有界集合であることがわかり，M に $\mathfrak{H}_w$ からの相対位相を導入した空間を M_w とすれば，$\mathfrak{C}([0,\ T],\ M_w)$ の一様収束位相は距離づけ可能である。

注 (20) はじめの不等式を得るために，Bochner 積分の初等的性質 1° (p. 91) を用いている。

(21) たとえば Schwartz 〔22〕 p. 78.

(22) ここですぐに $\{x_n\}$ が収束部分列をもつと結論してはならない。この場合 $\mathfrak{C}([0,\ T],\ \mathfrak{H}_w)$ が第一可算公理を満たしているかどうかが不明だからである。

$\{x_n\}$ は $\mathfrak{C}([0,\ T],\ M_w)$ の相対コンパクト集合とみなすことができるので，それはある $x^*\in \mathfrak{C}([0,\ T],\ \mathfrak{H}_w)$ に一様収束する部分列 $\{y_n\}$ を有するのである。

(b) $\|\dot{y}_n(t)\|\leqq\phi(t)$ a.e. であるから，

$$w_n(t)=\frac{\dot{y}_n(t)}{\phi(t)}\ ;\quad n=1,\ 2,\cdots\cdots$$

と定義される函数列 $\{w_n:[0,\ T]\longrightarrow\mathfrak{H}\}$ は $\mathfrak{L}^\infty([0,\ T],\ \mathfrak{H})$ の単位球に含まれる。ここで〔F〕により

$$\mathfrak{L}^1([0,\ T],\ \mathfrak{H})'\cong\mathfrak{L}^\infty([0,\ T],\ \mathfrak{H})$$

であることに注意すると，Alaoglu の定理により，$\{w_n\}$ は $\mathfrak{L}^\infty([0,\ T],\ \mathfrak{H})$ の＊弱相対コンパクト集合である。しかるに，$\mathfrak{L}^1([0,\ T],\ \mathfrak{H})$ は可分であるから，その双対空間 $\mathfrak{L}^\infty([0,\ T],\ \mathfrak{H})$ の単位球上の＊弱位相は距離づけ可能である。こうして $\{w_n\}$ はある $w^*\in\mathfrak{L}^\infty([0,\ T],\ \mathfrak{H})$ に＊弱収束する部分列 $\{w_{n'}\}$ を有することが知られる。そこで

$$\dot{z}_n=\dot{y}_{n'}=\phi\cdot w_{n'}$$

とおくことにしよう。

次に線形作用素 $A:\mathfrak{L}^\infty([0,\ T],\ \mathfrak{H})\longrightarrow\mathfrak{L}^p([0,\ T],\ \mathfrak{H})$ を

$$A:g\longmapsto\phi\cdot g\ ;\quad g\in\mathfrak{L}^\infty([0,\ T],\ \mathfrak{H})$$

と定義すれば，$\mathfrak{L}^\infty$ には＊弱位相，$\mathfrak{L}^p$ には弱位相を定めたとき，Aはこれらの位相について連続である。これは次のようにして示される。$\{g_\alpha\}$ を $\mathfrak{L}^\infty([0,\ T],\ \mathfrak{H})$ の有向点族で

$$w^*\text{-}\lim_{\alpha}\ g_\alpha=g^*\in\mathfrak{L}^\infty([0,\ T],\ \mathfrak{H})$$

としてみよう。すると任意の $\beta\in\mathfrak{L}^q([0,\ T],\ \mathfrak{H})$ $(1/p+1/q=1)$ について $\phi\cdot\beta\in\mathfrak{L}^1([0,\ T],\ \mathfrak{H})$ に注意すると，〔F〕により

$$\begin{aligned}&\int_0^T\langle\beta(t),\ \phi(t)\,g_\alpha(t)\rangle dt\\&\quad=\int_0^T\langle\phi(t)\,\beta(t),\ g_\alpha(t)\rangle dt\\&\quad\longrightarrow\int_0^T\langle\phi(t)\,\beta(t),\ g^*(t)\rangle dt\end{aligned}$$

である。これでAの連続性が示された。

ゆえに，$\{\dot{z}_n=\phi\cdot w_{n'}\}$ は $\mathfrak{L}^p([0,\ T],\ \mathfrak{X})$ において $\phi\cdot w^*$ に弱収束する。すなわち

$$w\text{-}\lim_{n\to\infty}\ \dot{z}_n=\phi\cdot w^*\quad\text{in}\ \mathfrak{L}^p([0,\ T],\ \mathfrak{H}).\tag{1}$$

これから〔D〕により，

$$\begin{aligned}\langle\theta,\ \int_s^t \dot{z}_n(\tau)\,d\tau\rangle&=\int_s^t\langle\theta,\ \dot{z}_n(\tau)\rangle d\tau\\&\longrightarrow\int_s^t\langle\theta,\ \phi(\tau)\cdot w^*(\tau)\rangle d\tau\qquad\text{for all }\theta\in\mathfrak{H}.\end{aligned}\tag{2}$$

他方，〔G〕により，

$$z_n(t)-z_n(s)=\int_s^t \dot{z}_n(\tau)\,d\tau\quad\text{for all } n.$$

しかも

$$z_n(t)-z_n(s)\longrightarrow x^*(t)-x^*(s)\quad\text{in } \mathfrak{H}_w$$

であるから，

$$\langle\theta,\ \int_s^t \dot{z}_n(\tau)\,d\tau\rangle=\langle\theta,\ z_n(t)-z_n(s)\rangle\longrightarrow\langle\theta,\ x^*(t)-x^*(s)\rangle\quad\text{for all }\theta\in\mathfrak{H}.\tag{3}$$

(2)と(3)から，

$$\langle\theta,\ x^*(t)-x(s)\rangle=\langle\theta,\ \int_s^t\phi(\tau)\cdot w^*(\tau)\,d\tau\rangle\qquad\text{for all } c\in\mathfrak{H}.$$

したがって

$$x^*(t)-x^*(s)=\int_s^t\phi(\tau)\cdot w^*(\tau)\,d\tau\tag{4}$$

とならねばならない。(1)と(4)から

$$w\text{-}\lim_{n\to\infty}\dot{z}_n=\dot{x}^*=\phi\cdot w^*\quad\text{in } \mathfrak{L}^p([0,\ T],\ \mathfrak{H})$$

であることがわかる。

これで定理が完全に証明された。[23]　（証　了）

注 (23)　Aubin-Cellina〔2〕(pp. 13-14) は，この定理よりもはるかに一般的な設定で同種の主張を示そうと試みているが，残念ながら成功していない。しかし筆者は彼らの研究からいくつかの有用な着想を学んだ。

また Tolstonogov〔23〕は次のような定理を得ている。

“$\mathfrak{X}$ を Banach 空間，多価作用素 $\Gamma:[0,\ T]\longrightarrow\mathfrak{X}$ は凸値で，しかも $\sup_{x\in\Gamma(t)}\|x\|\leqq\lambda(t)$ a. e. を満たす $\lambda\in\mathfrak{L}^1([0,\ T],\ \mathbb{R})$ が存在するものとする。さらに絶対連続函数の列 $\{x_n : T\longrightarrow\mathfrak{X}\}$ が次の二条件を満たすものとしよう。

(i)　$\{x_n\}$ はある $x^*:[0,\ T]\longrightarrow\mathfrak{X}$ に各点収束する。

(ii)　$\dot{x}_n(t)\in\Gamma(t)$ a. e. for all n.

このとき x^* は絶対連続で，しかも

$$\dot{x}^*(t)\in\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{\text{co}}\bigcup_{n=i}^{\infty}\dot{x}_n(t)\ \text{a. e.}$$

が成り立つ。”

〔参考文献〕

〔1〕 Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, (Academic Press, New York) 1975.

〔2〕 Aubin, J. P. and A. Cellina, *Differential Inclusions*, (Springer, Berlin) 1984.

〔3〕 Barbu, V., *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*, (Noordhoff, Leyden) 1976.

〔4〕 Bourbaki, N., *Elements of Mathematics: Topological Vector Spaces*, (Springer, Berlin) 1987.

〔5〕 Cecconi, J. P., "Problems of the Calculus of Variations in Banach Spaces and Classes BV", L. Cesari ed., *Contributions to Modern Calculus of Variations*, (Longman Scientific & Technical, Harlow) 1987.

〔6〕 Distel, J., *Geometry of Banach Spaces: Selected Topics*, (Springer, Belrin) 1975.

〔7〕 ——— and J. J. Uhl, Jr., *Vector Measures*, (Amer. Math. Soc.) 1977.

〔8〕 Dunford, N. and J. T. Schwartz, *Linear Operators*, Part 1, (Interscience, New York) 1958.

〔9〕 Kluvánek, I. and G. Knowles, *Vector Measures and Control Systems*, (North-Holland, Amsterdam) 1975.

〔10〕 Komura, Y., "Nonlinear Semi-groups in Hilbert Space", *J. Math. Soc. Japan*, **19**, 493–507, (1967).

〔11〕 Maruyama, T., "On a Multi-valued Differential Equation: An Existence Theorem", *Proc. Japan Acad.*, **60 A**, 161–164, (1984).

〔12〕 ———, "Variational Problems Governed by a Multi-valued Evolution Equation," V. Lakshmikantham ed., *Trends in the Theory and Practice of Non-linear Analysis*, (North-Holland, Amsterdam) 1985.

〔13〕 ———,『均衡分析の数理』(日本経済新聞社，東京) 1985.

〔14〕 ———, "A Weak Convergence Theorem in Sobolev Spaces and a Multi-valued Differential Equation in a Separable Hilbert Space", preprint (1989).

〔15〕 ———, "Lower Semi-continuity Theorems for Nonlinear Integral Functionals on Spaces of Bochner-integrable Functions", preprint (1989).

〔16〕 ———, "On the Fundamental Theorem of Calculus in Banach Spaces", preprint (1989).

〔17〕 増田久弥『非線型数学』(朝倉書店，東京) 1985.

〔18〕 Maz'ja, V. G., *Sobolev Spaces*, (Springer, Berlin) 1985.

〔19〕 Rieffel, M. A., "The Radon-Nikodým Theorem for the Bochner Intergral", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **131**, 466–487 (1968).

〔20〕 Saint-Beuve, M. F., "Some Topological Properties of Vector Measures with Bounded Variations and its Applications", *Ann. Mat. Pura Appl.*, **116**, 317–379 (1978).

〔21〕 Schwartz, L., *Théorie des distributions*, (Hermann, Paris) 1966.

〔22〕 ———, *Functional Analysis*, (Courant Institute of Mathematical Sciences, New York Univ., New York) 1964.

〔23〕 Tolstonogov, A. A., "On the Structure of the Solution Set for Differential Inclusions in a Banach Space", *Math. USSR Sbornik*, **46**, 1–15 (1983).

〔24〕 Yosida, K., *Functional Analysis*, 3 rd ed., (Springer Berlin) 1971.

(経済学部助教授)