

Title	社会的無差別曲線の基礎
Sub Title	Foundations of social indifference curves
Author	長名, 寛明
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1990
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.82, No.特別号-I (1990. 3) ,p.48- 70
JaLC DOI	10.14991/001.19900301-0048
Abstract	
Notes	福岡正夫教授退任記念論文集
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19900301-0048

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

社会的無差別曲線の基礎

長 名 寛 明*

社会的無差別曲線の名で呼ばれるものとしては、シトフスキー社会的無差別曲線とバーグソン社会的無差別曲線の2種類がある。前者は、個別消費者の無差別曲線のような意味で完全擬順序の対称的部分から定義される同値類としては必ずしも存在しないこと、後者は前者が存在しない場合でも存在することが知られている。いずれも存在する場合は厚生経済学における便利な分析用具となり得る。

しかし、これらの概念が応用される機会が多いという事実と対照的に、その概念自体の基礎についての形式的分析はあまり多くない（Samuelson（1956）、Gorman（1959）、Negishi（1963）、Inada（1971）を参照）。その意味で、社会的無差別曲線はまだ十分に確立された分析用具とはなっていないように思われる。本稿では、まず、シトフスキー社会的無差別曲線が定義されるための十分条件を求め、次に、バーグソン社会的無差別曲線が定義されるための十分条件を求める。本稿の結果がすべて新しいものであることを主張する意図はない。むしろ、一般に知られている事柄に厳密な基礎を与えることが目的である。

1 基礎概念

財の種類集合を有限集合 H で、個人の集合を有限集合 I で表す。いずれも2個以上の元を持つと仮定する。 H 上で定義された実数値関数全体の集合を R^H で表し、 $\#H$ 次元 Euclid 空間 $R^{\#H}$ と同一視する。ここで $\#H$ は集合 H の元の個数を表す。 I に属する各個人 i に R^H の部分集合としての消費集合 $X(i)$ を割り当てる対応 X を考える。以下では、 $X_i = X(i)$ と書く。消費配分全体の集合を ΠX 、総消費全体の集合を ΣX で表す。すなわち、

$$\Pi X = \{x \in (R^H)^I : \text{各 } i \in I \text{ に対して } x_i \in X_i\},$$

$$\Sigma X = \{a \in R^H : a = \sum_{i \in I} x_i \text{ となる } \Pi X \text{ の元 } x \text{ が存在する}\}$$

と定める。社会的無差別曲線は集合 ΣX 上の社会的選好関係から導かれるべきものであり、その社

* シトフスキー社会的無差別曲線の存在問題については、山田道広教授との会話で示唆されたところが多い。本論文の草稿に対して与えられた中村慎助君のコメントは命題7の主張を現在の形まで一般化するために有益であった。ここに記して謝意を表す。しかし、言うまでもなく、本稿に含まれる一切の誤謬の責任は筆者にある。

会的選好関係の定め方にシトフスキー流のものとバークソン流のものがある。]

集合 $\sum X$ に属する各資源 a に対して

$$F(a) = \{x \in \prod X : \sum_{i \in I} x_i = a\}$$

と定義する。これは資源 a の実現可能配分全体を集めた集合である。以下の議論のためには、集合 $F(a)$ がコンパクトになることが重要である。

命題 1: 各個人 i に対して X_i が閉かつ下方有界ならば、 $\sum X$ に属する各資源 a に対して $F(a)$ は非空コンパクトである。

証明: 非空かつ閉であることは明らかであるから、有界であることを示せば十分である。 $F(a)$ が有界でないと仮定しよう。 $\|x^q\|$ が無限大に発散するような $F(a)$ の中の点列 $\{x^q\}$ が存在する。各個人 i に対して X_i は下方有界だから $(R^H)^I$ の点 b で各自然数 q に対して $b \leq x^q$ となるものが存在する。各自然数 q に対して $c^q = b/\|x^q\|$ また $y^q = x^q/\|x^q\|$ と定義する。 $\{y^q\}$ は有界な点列だから収束する部分列を持つ。したがって、一般性を失わずに $\{y^q\}$ 自体が $(R^H)^I \setminus \{0\}$ のある点 y に収束すると仮定してよい。各自然数 q に対して $c^q \leq y^q$ が成立し、点列 $\{c^q\}$ は R^H の原点に収束するから、 $0 \leq y$ 、ゆえに、 $0 \leq y$ 、したがって $\sum_{i \in I} y_i \geq 0$ となる。各自然数 q に対して、 $\sum_{i \in I} y_i^q = a/\|x^q\|$ だから、 $0 \leq \sum_{i \in I} y_i = \lim_{q \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} y_i^q = \lim_{q \rightarrow \infty} a/\|x^q\| = 0$ となって不合理である。これで $F(a)$ が有界であることが証明された。

以下では、個人や社会の選好関係を R^H の部分集合上の2項関係で表現することが多い。選好関係 θ が与えられた時、 $(a, b) \in \theta$ が成立する時、 θ の下で a は少なくとも b と同程度に選好されると解釈し、 $(a, b) \in \theta$ かつ $(b, a) \in \theta$ が成立する時、 θ の下で a は b と無差別であると解釈し、 $(a, b) \in \theta$ かつ $(b, a) \notin \theta$ が成立する時、 θ の下で a は b より選好されると解釈する。 R^H の部分集合 Y 上の2項関係 θ は

- (1) Y の各点 a に対して集合 $\{b \in Y : (b, a) \in \theta\}$ が Y の閉部分集合である時、上半連続である、
- (2) Y の各点 a に対して集合 $\{b \in Y : (a, b) \in \theta\}$ が Y の閉部分集合である時、下半連続である、
- (3) 上半連続かつ下半連続である時、連続である、
- (4) $(c, a) \in \theta$ かつ $b \geq c$ となる c が存在するような任意の $(a, b) \in R^H \times R^H$ に対して $(b, a) \in \theta$ かつ $(a, b) \notin \theta$ となる時、単調である、
- (5) $\theta \times [0, 1]$ の各点 (a, b, t) に対して $((1-t)a + tb, b) \in \theta$ となる時、弱凸である。
- (6) $a \neq b$ となる $\theta \times]0, 1[$ の各点 (a, b, t) に対して $((1-t)a + tb, b) \in \theta$ かつ $(b, (1-t)a + tb) \notin \theta$ となる時、強凸である、

とそれぞれ言われる。

2 シトフスキー社会的無差別曲線

I から $R^H \times R^H$ への対応 Q で、各個人 i に対して Q_i が X_i 上の完全擬順序、すなわち、連結⁽¹⁾律、推移律を満足する X_i 上の 2 項関係となるようなものを考える。各個人 i に対して Q_i は彼の選好関係を表すと解釈する。集合 $\sum X$ に属する各資源 a に対して、そのパレート最適配分全体の集合は

$$P(a) = \{x \in F(a) : F(a) \text{ の点 } y \text{ で、各個人 } i \text{ に対して } (y_i, x_i) \in Q_i \text{ 少なくとも 1 人の個人 } k \text{ に対して } (x_k, y_k) \in Q_k \text{ となるようなものは存在しない}\}$$

で定義される。 $\sum X \times \Pi X$ の各点 (a, x) に対して

$$F(a, x) = \{y \in F(a) : \text{各個人 } i \text{ に対して } (y_i, x_i) \in Q_i\}$$

と定義する。これは、 a の実現可能配分で x よりパレート弱優越なものを全部集めた集合である。 ΠX の各点 x に対して

$$G_1(x) = \{a \in \sum X : F(a, x) \neq \emptyset\},$$

$$G_2(x) = \{a \in \sum X : P(a) \cap F(a, x) \neq \emptyset\}$$

と定義する。 $G_1(x)$ は a の配分で x よりパレート弱優越なものが存在するような資源 a 全体の集合である。 $G_2(x)$ は a のパレート最適配分で x よりパレート弱優越なものが存在するような資源 a 全体の集合である。シトフスキー社会的無差別曲線を定義する基礎として用いられるべき社会的選好関係として次の 4 つを考える。

$$S_1 = \{(a, b) \in \sum X \times \sum X : a \in G_1(x) \text{ となる } P(b) \text{ の点 } x \text{ が存在する}\},$$

$$S_2 = \{(a, b) \in \sum X \times \sum X : a \in G_2(x) \text{ となる } P(b) \text{ の点 } x \text{ が存在する}\},$$

$$S_3 = \{(a, b) \in \sum X \times \sum X : P(b) \text{ の各点 } x \text{ に対して } a \in G_1(x)\},$$

$$S_4 = \{(a, b) \in \sum X \times \sum X : P(b) \text{ の各点 } x \text{ に対して } a \in G_2(x)\}.$$

明らかに、 $S_4 \subseteq S_2 \cap S_3 \subseteq S_2 \cup S_3 \subseteq S_1$ が成立する。これらの関係はどれも反射律を満足するが、一般には完全擬順序にならない。したがって、それが完全擬順序になるための条件を求めることが重要になる。次に示すように、 S_4 は無条件に擬順序になる、すなわち、推移律を満足する。

定理 1: S_4 は擬順序である。

証明: ある $c \in \sum X$ に対して $(a, c) \in S_4$ かつ $(c, b) \in S_4$ となるような $\sum X \times \sum X$ の任意の点 (a, b) と $P(b)$ の任意の点 y を選ぶ。 $(c, b) \in S_4$ だから $c \in G_2(y)$ 、したがって $P(c) \cap F(c, y)$ の点 z が存在する。 $(a, c) \in S_4$ かつ $z \in P(c)$ だから、 $a \in G_2(z)$ 、すなわち、 $P(a) \cap F(a, z)$ の

注 (1) 本稿では、 X_i の任意の点 a, b に対して $(a, b) \in Q_i$ または $(b, a) \in Q_i$ が成立する時、 X_i 上の 2 項関係 Q_i は連結律を満足すると言う。したがって、連結律が成立すれば、反射律は成立する。

点 x が存在する。 $x \in F(a, z)$ かつ $z \in F(c, y)$ だから、 $x \in F(a, y)$ 、 したがって $x \in P(a) \cap F(a, y)$ 、 すなわち、 $a \in G_2(y)$ となる。 ゆえに、 $(a, b) \in S_4$ となり、 S_4 が推移律を満足することが示された。

各個人 i に対して Q_i が弱凸である場合には、 S_1, S_2, S_3, S_4 もそれぞれ弱凸になることを示しておく。 そのために、 以下で有用となる命題を証明する。

命題 2: 各個人 i に対して X_i が閉かつ下方有界であり、 Q_i が上半連続であれば、 $F(a, x)$ が非空であるような $\sum X \times \prod X$ の各点 (a, x) に対して $a \in G_2(x)$ となる。

証明: 命題 1 と Q_i の上半連続性により $F(a, x)$ は非空コンパクトであるから、 再び Q_i の上半連続性により、 $F(a, x)$ の点 y で、 y よりパレート優越な $F(a, x)$ の点が 1 つもないようなものが存在する。 この y が $P(a)$ に属することが示されれば十分である。 そこで、 y が $P(a)$ に属しないと仮定しよう。 この時、 $F(a)$ の点 z で y よりパレート優越なものが存在する。 y は x よりパレート弱優越だから、 z は x よりパレート優越であり、 $F(a, x)$ に属する。 これは不合理だから、 y は $P(a)$ に属する。 ゆえに、 y は $P(a) \cap F(a, x)$ に属し、 a は $G_2(x)$ に属する。

定理 2: 各個人 i に対して、 X_i が凸閉かつ下方有界であり、 Q_i が上半連続かつ弱凸であれば、 S_1, S_2, S_3, S_4 はそれぞれ弱凸である。

証明: $S_4 \times] 0, 1 [$ の任意の点 (a, b, t) を選ぶ。 $c = (1-t)a + tb$ と書こう。 b のパレート最適配分 y を任意に選ぶ。 仮定により、 $(a, b) \in S_4$ だから $a \in G_2(y)$ となる。 したがって、 $P(a) \cap F(a, y)$ の点 x が存在する。 $z = (1-t)x + ty$ と書こう。 弱凸性により、 各個人 i に対して $(z_i, y_i) \in Q_i$ となるから、 z は $F(c, y)$ に属する。 命題 2 により、 c は $G_2(y)$ に属するから、 $(c, b) \in S_4$ となって、 S_4 は弱凸である。 S_3 の弱凸性も同様に示される。

$S_2 \times] 0, 1 [$ の任意の点 (a, b, t) を選ぶ。 $c = (1-t)a + tb$ と書こう。 $(a, b) \in S_2$ だから、 $a \in G_2(y)$ となる $P(b)$ の点 y が存在する。 したがって、 $P(a) \cap F(a, y)$ の点 x が存在する。 $z = (1-t)x + ty$ と書こう。 弱凸性により、 各個人 i に対して $(z_i, y_i) \in Q_i$ となるから、 z は $F(c, y)$ に属する。 命題 2 により、 c は $G_2(y)$ に属し、 $y \in P(b)$ より、 $(c, b) \in S_2$ となって、 S_2 は弱凸である。 S_1 の弱凸性も同様に示される。

2.1. 同一の相似拡大的選好

シフトスケー社会的不差別曲線が存在するための十分条件としてよく知られているものは、 すべての個人の選好関係が互いに同じでありしかも相似拡大的であるという条件である。 R^H の部分集

合 Y 上の2項関係 θ は $\theta \times R_{++}$ の各点 (a, b, t) に対して $(ta, tb) \in \theta$ が成立する時、相似拡大的であると言われる。

仮定 1: 各個人 i に対して $Q_i = \theta$ となる $R^{\#}$ 上の完全擬順序 θ で連続、単調、強凸、相似拡大的なものが存在する。

仮定1の下では、各個人 i の消費集合 X_i は $R^{\#}$ に等しく、したがって $\sum X = R^{\#}$ と $\Pi X = (R^{\#})^I$ も成立する。 $R^{\#}$ の各点 a に対して

$$D(a) = \{x \in (R^{\#})^I : \sum_{j \in I} t_j = 1 \text{ を満足し、各個人 } i \text{ に対して } x_i = t_i a \text{ となるような } R^{\#}_+ \text{ の点 } t \text{ が存在する}\}$$

と定めよう。 $D(a)$ は資源 a を各個人に比例的に分配することによって得られる配分全体の集合を表す。仮定1の著しい帰結は、以下で証明されるように、 $\sum X$ に属する任意の a に対して、 a のパレート最適配分全体の集合 $P(a)$ が $D(a)$ に一致するということである。これは、2財2個人の場合には、エッジワースの箱型図で $P(a)$ が対角線に一致することに他ならない。

命題 3: 仮定1の下で、 $\sum X$ の各点 a に対して $P(a) = D(a)$ となる。

証明: $P(a) \subseteq D(a)$ を示すために、 $P(a)$ の任意の点 x を選ぶ。まず次の主張を示す。

主張: 各個人 i に対して $x_i = ta$ となる非負の実数 t が存在する。

主張の証明: いかなる非負の実数 t に対しても $x_i \neq ta$ となるような個人 i がいたとしよう。この時、 $x_i \neq 0$ となる。 i 以外の各個人 j に対して $x_j = t_j x_i$ となるような非負の実数 t_j が存在すると仮定しよう。この時、 $a = x_i + \sum_{j \in I \setminus \{i\}} t_j x_i = (1 + \sum_{j \in I \setminus \{i\}} t_j) x_i$ となる。 $t = 1 / (1 + \sum_{j \in I \setminus \{i\}} t_j)$ と定めれば、 $x_i = ta$ となり、仮定に反する。故に、 i 以外の個人 j が存在し、いかなる非負の実数 t に対しても $x_j \neq tx_i$ となる。したがって、 $x_j \neq 0$ である。

$$K_- = \{t \in R_+ : (x_i, tx_j) \in \theta\},$$

$$K_+ = \{t \in R_+ : (tx_j, x_i) \in \theta\}$$

と定めると、 θ の連続性により、 K_- と K_+ は R の閉部分集合である。 θ の単調性により、 $K_- = [0, t_-]$ かつ $K_+ = [t_+, \infty[$ となるような非負の実数 t_- と t_+ が存在する。 θ は連結だから $K_- \cup K_+ = R_+$ であり、 R_+ は連結集合だから、 K_- と K_+ は交わり、したがって、双方に属する s が存在する。故に、 $(x_i, sx_j) \in \theta$ かつ $(sx_j, x_i) \in \theta$ となる。 θ の単調性より、 $s=0$ なら $x_i=0$ となって不合理だから、 $s>0$ となる。 $t=1/s$ と書こう。 θ は相似拡大的だから、 $(x_j, tx_i) \in \theta$ かつ $(tx_i, x_j) \in \theta$ となる。ここで

$$\alpha_i = 1/(1+s) \ \& \ \beta_i = s/(1+s) \ \& \ y_i = \beta_i (x_i + x_j),$$

$$\alpha_j = 1/(1+t) \ \& \ \beta_j = t/(1+t) \ \& \ y_j = \beta_j (x_i + x_j)$$

と定めれば,

$$y_i = [s/(1+s)] x_i + [1/(1+s)] s x_j,$$

$$y_j = [1/(1+t)] t x_i + [t/(1+t)] x_j$$

だから、 θ の強凸性より、 $(x_i, y_i) \in \theta$ かつ $(x_j, y_j) \in \theta$ となる。 $\beta_i + \beta_j = s/(1+s) + t/(1+t) = s/(1+s) + 1/(1+s) = 1$ だから、 $y_i + y_j = x_i + x_j$ となる。 i, j 以外の各個人 k に対して $y_k = x_k$ と定めると、 $y \in F(a)$ と $(x_i, y_i) \in \theta$ が成立し、各個人 k に対して $(y_k, x_k) \in \theta$ となるから、 $x \in P(a)$ となり、 x の選び方に矛盾する。これで主張の証明が完了する。

上の主張により、各個人 i に対して $x_i = t_i a$ となる非負の実数 t_i が存在する。 $a = \sum_{j \in I} x_j = \sum_{j \in I} t_j a = a \sum_{j \in I} t_j$ だから $\sum_{j \in I} t_j = 1$ となり、 x は $D(a)$ に属する。故に、 $P(a) \subseteq D(a)$ であることが示された。

$D(a)$ の任意の点 x を選ぶ。 $\sum_{j \in I} t_j = 1$ また各個人 i に対して $x_i = t_i a$ となるような R_+^I の点 t が存在する。明らかに、 x は $F(a, x)$ に属するから、 $F(a, x)$ は非空である。命題 2 により、 $P(a) \cap F(a, x)$ に属する y が存在する。上で $P(a) \subseteq D(a)$ が示されたから、 $y \in D(a)$ となり、 $\sum_{j \in I} s_j = 1$ また各個人 i に対して $y_i = s_i a$ となるような R_+^I の点 s が存在する。 θ の単調性により、 $s \geq t$ となるから、 $\sum_{j \in I} s_j = \sum_{j \in I} t_j$ より、 $s = t$ 、したがって、 $x = y \in P(a)$ となる。故に、 $D(a) \subseteq P(a)$ が示され、命題 3 の証明が完了する。

ここで、シトフスキー社会的無差別曲線が存在するためには各個人が同一で相似拡大的な選好関係を持つことが十分であるという主張を厳密に述べて証明することができる。

定理 3 : 仮定 1 の下で、 $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \theta$ となる。

証明 : $(a, b) \in \theta$ とする。 $P(b)$ の任意の点 y を選ぶと、命題 3 により、 $\sum_{j \in I} t_j = 1$ を満足し、各個人 i に対して $y_i = t_i b$ となる R_+^I の点 t が存在する。各個人 i に対して $x_i = t_i a$ と定めれば、命題 3 により、 $x \in P(a)$ となる。 θ は相似拡大的だから、各個人 i に対して $(x_i, y_i) = (t_i a, t_i b) \in \theta$ 、故に、 $a \in G_2(y)$ 、したがって、 $(a, b) \in S_4$ となる。これで $\theta \subseteq S_4$ であることが示された。

$(a, b) \in S_1$ とすると、 $a \in G_1(y)$ となるような $P(b)$ の点 y が存在する。命題 3 により、 $\sum_{j \in I} t_j = 1$ また各個人 i に対して $y_i = t_i b$ となるような R_+^I の点 t が存在する。他方、 $a \in G_1(y)$ だから、命題 2 により、 $P(a) \cap F(a, y)$ の点 x が存在する。命題 3 により、 $\sum_{j \in I} s_j = 1$ また各個人 i に対して $x_i = s_i a$ となるような R_+^I の点 s が存在する。したがって、各個人 i に対して、 $(s_i a, t_i b) \in \theta$ となる。2 つの場合に分けて考える。まず、各個人 i に対して $s_i \geq t_i$ となる場合を考える。 $\sum_{i \in I} s_i$

$=1=\sum_{i \in I} t_i$ より $i=t$ となるから、各個人 i に対して $(s_i a, s_i b) \in \theta$ である。少なくとも 1 人の個人 k に対しては $s_k > 0$ であり、 θ が相似拡大的であることから $(a, b) \in \theta$ となる。次に、 $s_i < t_i$ となる個人 i が存在する場合を考える。この時、 $(s_i a, t_i b) \in \theta$ だから、 θ の単調性より、 $(t_i a, t_i b) \in \theta$ となる。 θ は相似拡大的だから、 $(a, b) \in \theta$ となり、結局、いずれの場合も、 $(a, b) \in \theta$ となるから、 $S_1 \subseteq \theta$ となることが示された。ゆえに、 $\theta \subseteq S_1 \subseteq S_1 \subseteq \theta$ 、すなわち、 $\theta = S_1 = S_1$ となり、定理 3 の証明が完了する。

定理 3 は、仮定 1 の下で、シトフスキー社会的選好関係が個人の選好関係と完全に一致することを示している。したがって、その場合には、シトフスキー社会的無差別曲線は個人の無差別曲線と一致し、個人の無差別曲線が持つすべての性質を持つ。ここで、仮定 1 には相似拡大性以外の性質が含まれており、定理 3 の証明にそれらの性質をかなり本質的な意味で用いたことに注意しよう。特に、命題 3 の証明には単調性や強凸性が用いられた。これらの条件なしに、定理 3 の主張にどの程度近い主張を確立できるかは残された問題である。

2.2. 準線形選好関係

シトフスキー社会的無差別曲線が存在するための十分条件としてあまり言及されないものに、各個人が準線形選好関係を持つというものがある。⁽²⁾ H の元 h と R の非空部分集合 Y に対して

$$C_h(Y) = \{a \in R_+^n : a_h \in Y\}$$

と書こう。 H の元 h と R の非空部分集合 Y が与えられた時、

$$\theta = \{(a, b) \in [C_h(Y)]^2 : u(a | H \setminus \{h\}) + a_h \geq u(b | H \setminus \{h\}) + b_h\}$$

となる $R_+^{H(h)}$ の部分集合上の連続な実数値関数 u が存在するような $C_h(Y)$ 上の 2 項関係 θ は (h, Y) -準線形形であると言われる。

仮定 2: H の元 h と $\{R, R_{++}\}$ の元 Y が存在し、各個人 i に対して、 $X_i = C_h(Y)$ が成立し、 Q_i は単調、強凸、 (h, Y) -準線形形である。

仮定 2 の下では、 $Y = R_{++}$ の場合、各個人 i に対して、消費集合 X_i は閉集合でなく、また $Y = R$ の場合、各個人 i に対して X_i は下方有界でないから、命題 1 や 2 はそのままの形では成立しない (命題 6 を参照)。

命題 4: 仮定 2 の下で、各個人 i に対して

$$(7) \quad Q_i = \{(a, b) \in [C_h(Y)]^2 : u^i(a | H \setminus \{h\}) + a_h \geq u^i(b | H \setminus \{h\}) + b_h\}$$

注 (2) この条件は大山道広教授から示唆された。筆者はこの条件がシトフスキー社会的無差別曲線の存在のための十分条件であることを述べている文献をまだ見ていない。

を満足する $R_+^{H \setminus \{h\}}$ 上の連続, 単調増加, 狭義凹な実数値関数 u^t が存在する。

証明：仮定により, (7)を満足する $R_+^{H \setminus \{h\}}$ 上の連続な実数値関数 u^t が存在する。 u^t が単調増加であることは Q_t の単調性から明らかである。したがって, 狭義凹性のみを示せば十分である。 $a \neq b$ となるような $R_+^{H \setminus \{h\}} \times R_+^{H \setminus \{h\}} \times]0, 1[$ の任意の点 (a, b, t) を選ぶ。一般性を失わずに $u^t(a) \leq u^t(b)$ と仮定してよい。

$$u^t(a) + c = u^t(b) + 1$$

となるような正の実数 c が存在する。

$$x \mid H \setminus \{h\} = a \ \& \ x_h = c \ \& \ y \mid H \setminus \{h\} = b \ \& \ y_h = 1$$

と定めれば, $(x, y) \in Q_t$ かつ $x \neq y$ となる。 Q_t は狭義凸だから, $(y, (1-t)x + ty) \in Q_t$ となる。したがって,

$$u^t((1-t)a + tb) + (1-t)c + t > u^t(b) + 1,$$

すなわち,

$$\begin{aligned} & u^t((1-t)a + tb) \\ & > u^t(b) - (1-t)c + 1 - t \\ & = (1-t)u^t(b) + tu^t(b) - (1-t)c + 1 - t \\ & = (1-t)[u^t(a) + c - 1] + tu^t(b) - (1-t)c + 1 - t \\ & = (1-t)u^t(a) + tu^t(b) \end{aligned}$$

となり, u^t が狭義凹であることが示された。

以下では, 仮定2あるいはそれを含意する仮定の下では, 命題4がその存在を保証している関数 u^t を断りなく用いる。

ΣX の各点 a に対して

$$F^h(a) = \{v \in (R_+^{H \setminus \{h\}})^I : \sum_{i \in I} v_i = a \mid H \setminus \{h\}\}$$

と書き, ΣX の各点 a と $F^h(a)$ の各点 v に対して

$$V(a, v) = \{x \in F(a) : \text{各個人 } i \text{ に対して } x_i \mid H \setminus \{h\} = v_i\}$$

と定める。この集合の意味を理解するために, 準線形選好関係の多くの応用での解釈に従って, 選ばれた財 h を価値基準財と呼ぶことにしよう。この時, 集合 $V(a, v)$ は資源 a の実現可能配分の中で, 価値基準財以外の財の各個人 i による消費量 x_i がそれぞれに指定されたベクトル v_i に等しくなっているものだけを全部集めたものである。2財2個人の場合について, 価値基準財を横軸に沿って測ったエッジワースの箱型図の中の垂直線にこの集合は対応する。仮定2の下では, 以下で証明されるように, ΣX に属する任意の a に対して, a のパレート最適配分全体の集合 $P(a)$ が, a に依存して定まる v によって定義される $V(a, v)$ に一致する。これは, 2財2個人の場合には, エッジワース箱型図で $P(a)$ が垂直の開区間になることに他ならず, 仮定1の下で対角線

になったことと対照的である。

命題 5: 仮定 2 の下で, $R_{++}^H \cap \sum X$ の各点 a に対して $P(a) = V(a, v)$ となるような $F^h(a)$ の点 v が存在する。

証明: $(R_{++}^{H \setminus \{h\}})^I$ の各点 v に対して $U(v) = \sum_{i \in I} u^i(v_i)$ と定めれば, U は連続かつ狭義凹である。命題 1 におけるように, $F^h(a)$ は非空コンパクトである。したがって,

$$(8) \quad F^h(a) \setminus \{v^*\} \text{ の各点 } v \text{ に対して } U(v^*) > U(v)$$

となるような $F^h(a)$ の点 v^* が存在する。

ステップ 1: $V(a, v^*) \subseteq P(a)$.

ステップ 1 の証明: $V(a, v^*)$ のある点 w に対して $w \in P(a)$ となるものとする。この時, 各個人 i に対して $(y_i, w_i) \in Q_i$, 少なくとも 1 人の個人 k に対して $(w_k, y_k) \in Q_k$ となるような $F(a)$ の点 y が存在する。したがって

$$\sum_{i \in I} u^i(y_i | H \setminus \{h\}) + \sum_{i \in I} y_{ih} > \sum_{i \in I} u^i(w_i | H \setminus \{h\}) + \sum_{i \in I} w_{ih}$$

となり, (8)により,

$$0 \geq \sum_{i \in I} u^i(y_i | H \setminus \{h\}) - \sum_{i \in I} u^i(w_i | H \setminus \{h\}) > \sum_{i \in I} w_{ih} - \sum_{i \in I} y_{ih},$$

すなわち, $a_h = \sum_{i \in I} y_{ih} > \sum_{i \in I} w_{ih} = a_h$ となって, 不合理である。故に, $V(a, v^*) \subseteq P(a)$ であることが示された。

ここで実現可能配分とパレート最適の定義を拡張して考える。

$$F^*(a) = \{x \in [C_h(R)]^I : \sum_{i \in I} x_i = a\},$$

$$\begin{aligned} P^*(a) = \{x \in F^*(a) : & F^*(a) \text{ の点 } y \text{ で, 各個人 } i \text{ に対して } y_{ih} + u^i(y_i | H \setminus \{h\}) \\ & \geq x_{ih} + u^i(x_i | H \setminus \{h\}), \text{ 少なくとも 1 人の個人 } k \text{ に対して } y_{kh} + u^k(y_k | \\ & H \setminus \{h\}) > x_{kh} + u^k(x_k | H \setminus \{h\}) \text{ となるようなものは存在しない} \} \end{aligned}$$

と定める。明らかに, $F(a)$ は $F^*(a)$ の部分集合である。

ステップ 2: $P(a) = P^*(a) \cap F(a)$.

ステップ 2 の証明: $Y = R$ の場合は自明だから, $Y = R_{++}$ の場合を考える。明らかに, $P^*(a) \cap F(a) \subseteq P(a)$ は成立する。 $P(a)$ の任意の点 x を選ぶ。仮に x が $P^*(a)$ に属しないとしよう。この時, $F^*(a)$ の点 y で, 各個人 i に対して

$$y_{ih} + u^i(y_i | H \setminus \{h\}) \geq x_{ih} + u^i(x_i | H \setminus \{h\})$$

となり、少なくとも1人の個人 k に対して

$$y_{kh} + u^k(y_k | H \setminus \{h\}) > x_{kh} + u^k(x_k | H \setminus \{h\})$$

となるようなものが存在する。开区間 $[0, 1]$ に属する各 t に対して

$$z(t) = (1-t)x + ty$$

と定めれば、 $F^*(a)$ の凸性により、明らかに、 $z(t)$ は $F^*(a)$ に属する。各個人 i に対して $x_{ih} > 0$ だから、十分小さい t^* に対して各個人 i に対して $z_{ih}(t^*) > 0$ となり、したがって、 $z(t^*) \in F(a)$ となる。選好関係の強凸性により、各個人 i に対して

$$z_{ih}(t^*) + u_i(z_i(t^*) | H \setminus \{h\}) \geq x_{ih} + u^i(x_i | H \setminus \{h\})$$

となり、少なくとも1人の個人 k に対して

$$z_{kh}(t^*) + u^k(z_k(t^*) | H \setminus \{h\}) > x_{kh} + u^k(x_k | H \setminus \{h\})$$

となるが、これは x が $P(a)$ に属するという事実と矛盾する。ゆえに、 x は $P^*(a)$ に属する。したがって、 $P(a) \subseteq P^*(a) \cap F(a)$ が示された。

ステップ 3: $V(a, v^*)$ の任意の点 x に対して R_{++}^n の点 p が存在して、各個人 i と

$$z_h + u^i(z | H \setminus \{h\}) \geq x_{ih} + u^i(x_i | H \setminus \{h\})$$

を満足する $C_h(R)/\{x_i\}$ の各点 z に対して、 $p \cdot z > p \cdot x_i$ となる。

ステップ 3 の証明: ステップ 1 により、 x は $P(a)$ に属し、ステップ 2 により、 x は $P^*(a)$ にも属する。 $\#I \geq 2$ だから、少なくとも1人の消費者 k が存在する。

$$G_k^0 = \{z \in C_h(R) : x_{kh} + u^k(x_k | H \setminus \{h\}) < z_h + u^k(z | H \setminus \{h\})\}$$

また、各個人 i に対して

$$G_i = \{z \in C_h(R) : x_{ih} + u^i(x_i | H \setminus \{h\}) \leq z_h + u^i(z | H \setminus \{h\})\}$$

と定める。各個人 i に対して、 u^i は凹かつ連続だから、 G_i は凸である。同様に G_k^0 も凸である。

$$G^0 = G_k^0 + \sum_{i \in I \setminus \{k\}} G_i$$

$$G = \sum_{i \in I} G_i$$

と定めよう。 $x \in P^*(a)$ だから、 $a \notin G^0$ となる。 G^0 は凸だから、凸集合の支持超平面定理により、 $cl G^0$ の各点 z に対して $p \cdot a \leq p \cdot z$ となるような $R^n \setminus \{0\}$ の点 p が存在する。 u^k の単調増加性により、 $G_k \subseteq cl G_k^0$ だから $G \subseteq cl G^0$ となる。故に、 G の各点 z に対して $p \cdot a \leq p \cdot z$ となる。したがって、

(9) 各個人 i と G_i の各点 z に対して $p \cdot x_i \leq p \cdot z$ となる。

u^k は単調増加だから、(9)より、 p は非負である。 $p \neq 0$ かつ $a \in R_{++}^n$ だから、 $p \cdot a > 0$ である。

$Y = R$ の場合は任意の個人 i 、 $Y = R_{++}$ の時は $p \cdot x_i > 0$ となるような個人 i を考える。 $X_i = C_h(Y)$ だから、 $p \cdot x_i > p \cdot b$ となるような X_i の点 b が存在する。

$$x_{ih} + u^i(x_i | H \setminus \{h\}) < z_h + u^i(z | H \setminus \{h\}),$$

$$p \cdot z \leq p \cdot x_i$$

となる $C_h(R)$ の点 z が存在したと仮定しよう。(9)により, $p \cdot z = p \cdot x_i > p \cdot b$ となる。開区間 $]0, 1[$ に属する各 t に対して $c(t) = (1-t)b + tz$ と定める。 u^i の下半連続性により,

$$x_{ih} + u^i(x_i | H \setminus \{h\}) < c_h(t) + u^i(c(t) | H \setminus \{h\})$$

となる $t \in]0, 1[$ が存在するが, $p \cdot c(t) < p \cdot x_i$ だから, (9) と矛盾する。故に,

(10) $Y = R$ の時は任意の個人 i , $Y = R_{++}$ の時は $p \cdot x_i > 0$ となる任意の個人 i と $p \cdot z \leq p \cdot x_i$ となる $C_h(R)$ の各点 z に対して

$$x_{ih} + u^i(x_i | H \setminus \{h\}) \geq z_h + u^i(z | H \setminus \{h\})$$

となる。

$p \cdot a > 0$ かつ $a = \sum_{i \in I} x_i$ だから, $p \cdot x_k > 0$ となる消費者 k が存在する。 u^k は単調増加だから, (10)より, $p \in R_{++}^n$ となる。

任意の個人 i を考える。 $x_i \in C_h(Y)$ だから $Y = R_{++}$ の時 $p \cdot x_i > 0$ となる。ゆえにこの個人に対しては(10)が成立する。 $p \cdot x_i = p \cdot z$ となる $G_i \setminus \{x_i\}$ の点 z が存在すれば, $b = (z + x_i)/2$ と定めると, $p \cdot b = p \cdot x_i$ となり, u^i の狭義凹性により,

$$x_{ih} + u^i(x_i | H \setminus \{h\}) < b_h + u^i(b | H \setminus \{h\})$$

となるが, これは(10)と矛盾する。これで, ステップ3が証明された。

ステップ4: $\sum_{i \in I} x_{ih} = a_h$ を満足し各個人 i に対して $x_i | H \setminus \{h\} = v_i^*$ となるような $(R^H)^I$ の任意の点 x を考える。この時, 各個人 i と

$$z_h + u^i(z | H \setminus \{h\}) \geq x_{ih} + u^i(x_i | H \setminus \{h\})$$

となるような $C_h(R) \setminus \{x_i\}$ の各点 z に対して $p \cdot x_i < p \cdot z$ が成立する。

ステップ4の証明: 各個人 j に対して

$$x_{jh}^* = a_h / \# I \text{ \& } x_j^* | H \setminus \{h\} = v_j^*$$

と定めると,

$$z_h - x_{jh} + a_h / \# I + u^j(z | H \setminus \{h\}) \geq x_{jh}^* + u^j(x_j^* | H \setminus \{h\})$$

となる。 $q = p | H \setminus \{h\}$ と書けば, ステップ3より,

$$p \cdot z + p_h(a_h / \# I - x_{jh}) > p_h a_h / \# I + q \cdot v_j^*$$

すなわち,

$$p \cdot z > p_h x_{jh} + q \cdot v_j^* = p \cdot x_j$$

となり, ステップ4が証明された。

ステップ5: $P(a) \subseteq V(a, v^*)$.

ステップ5の証明：ステップ5が偽であると仮定しよう。その場合、 $P(a) \setminus V(a, v^*)$ の点 y が存在する。ステップ2により、 y は $P^*(a)$ に属する。

$$J = \{i \in I : y_i | H \setminus \{h\} \neq v_i^*\}$$

と定める。 $\sum_{i \in I} y_i | H \setminus \{h\} = a | H \setminus \{h\} = \sum_{i \in I} v_i^*$ だから、 $\#J \geq 2$ となる。各 $i \in J$ に対して

$$\begin{aligned} x_{ih} &= u^i(y_i | H \setminus \{h\}) + y_{ih} - u^i(v_i^*), \\ x_i | H \setminus \{h\} &= v_i^*, \end{aligned}$$

各 $i \in I \setminus J$ に対して

$$x_i = y_i$$

と定める。各個人 $i \in I \setminus J$ に対して

$$p \cdot x_i = p \cdot y_i$$

が明らかに成立し、ステップ4により、各個人 $i \in J$ に対して

$$p \cdot y_i > p \cdot x_i$$

となり、したがって

$$\begin{aligned} p_h \cdot (\sum_{i \in I} y_{ih} - \sum_{i \in I} x_{ih}) &> q \cdot (\sum_{i \in I} x_i | H \setminus \{h\} - \sum_{i \in I} y_i | H \setminus \{h\}) \\ &= q \cdot (a | H \setminus \{h\} - a | H \setminus \{h\}) = 0, \end{aligned}$$

すなわち、

$$(II) \quad a_h = \sum_{i \in I} y_{ih} > \sum_{i \in I} x_{ih}$$

となる。

$\#J \geq 2$ だから J に属する k が存在する。

$$z_{kh} = x_{kh} + (a_h - \sum_{j \in I} x_{jh}) \quad \& \quad z_k | H \setminus \{h\} = x_k | H \setminus \{h\},$$

k 以外の各個人 i に対して

$$z_i = x_i$$

と定めれば、 $\sum_{i \in I} z_{ih} = a_h$ となるから、 z は $F^*(a)$ に属する。 k 以外の各 $i \in I$ に対して

$$z_{ih} + u^i(z_i | H \setminus \{h\}) = x_{ih} + u^i(v_i^*) = y_{ih} + u^i(y_i | H \setminus \{h\}),$$

また、(II)により

$$z_{kh} + u^k(z_k | H \setminus \{h\}) > x_{kh} + u^k(v_k^*) = y_{kh} + u^k(y_k | H \setminus \{h\})$$

だから、 y が $P^*(a)$ に属することと矛盾する。これでステップ5が証明された。

ステップ1と5より、命題5の証明が完了した。

シトフスキー社会的無差別曲線が存在するためには各個人がある共通の財 h に対して h -準線形選好関係を持つことが十分であるという主張を厳密に述べて証明するために、仮定2を強化したものを述べる必要がある。

仮定 3: H の元 h が存在し, 各個人 i に対して, $X_i = C_h(R)$ が成立し, Q_i は単調, 強凸, (h, R) -準線形である。

ここで, 命題 2 の代わりとなるべきものを述べて証明する。

命題 6: 仮定 3 の下で, $F(a, x) \neq \emptyset$ となるような $(R_{++}^n \cap \sum X) \times \prod X$ の任意の点 (a, x) に対して, $a \in G_2(x)$ となる。

証明: 命題 5 の証明におけるように, (8) を満足する $F^h(a)$ の点 v^* が存在する。他方, 仮定により, $F(a, x)$ の点 y が存在する。各個人 i に対して $w_i = y_i | H \setminus \{h\}$ と定めると, $w \in F^h(a)$ となるから,

$$\sum_{i \in I} u^i(v_i^*) \geq \sum_{i \in I} u^i(w_i)$$

が成立する。 I は非空だから, 少なくとも 1 人の個人 k がいる。ここで

$$\begin{aligned} z_k | H \setminus \{h\} &= v_k^*, \\ z_{kh} &= u^k(y_k | H \setminus \{h\}) + y_{kh} - u^k(z_k | H \setminus \{h\}) \\ &\quad + [\sum_{i \in I} u^i(v_i^*) - \sum_{i \in I} u^i(w_i)], \end{aligned}$$

k 以外の各個人 i に対して

$$\begin{aligned} z_i | H \setminus \{h\} &= v_i^*, \\ z_{ih} &= u^i(y_i | H \setminus \{h\}) + y_{ih} - u^i(z_i | H \setminus \{h\}) \end{aligned}$$

と定めると,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} z_{ih} &= \sum_{i \in I} u^i(y_i | H \setminus \{h\}) + \sum_{i \in I} y_{ih} - \sum_{i \in I} u^i(z_i | H \setminus \{h\}) \\ &\quad + [\sum_{i \in I} u^i(v_i^*) - \sum_{i \in I} u^i(w_i)] \\ &= \sum_{i \in I} u^i(w_i) + a_h - \sum_{i \in I} u^i(v_i^*) \\ &\quad + [\sum_{i \in I} u^i(v_i^*) - \sum_{i \in I} u^i(w_i)] \\ &= a_h, \end{aligned}$$

したがって, $z \in F(a)$ となる。ゆえに, 命題 5 により, $z \in P(a)$ となる。各個人 i に対して, $(z_i, x_i) \in Q_i$ だから, $z \in P(a) \cap F(a, x)$ となり, $a \in G_2(x)$ であることが示された。

定理 4: 仮定 3 の下で, S_4 の R_{++}^n への制限は完全擬順序である。

証明: 定理 1 により, S_4 は擬順序だから, R_{++}^n への制限が連結律を満足することだけを示せばよい。

$[R_{++}^n \cap \sum X]^2$ の任意の点 (a, b) を考える。 $F^h(a)$ と $F^h(b)$ は非空コンパクトだから, $F^h(a) \times F^h(b)$ の点 (v^*, v^{**}) が存在して,

$$F^h(a) \setminus \{v^*\} \text{ の各点 } v \text{ に対して } \sum_{i \in I} u^i(v_i^*) > \sum_{i \in I} u^i(v_i),$$

$F^h(a) \setminus \{v^{**}\}$ の各点 v に対して $\sum_{i \in I} u^i(v_i^{**}) > \sum_{i \in I} u^i(v_i)$ が成立する。 $P(a) \times P(b)$ の任意の点 (x, y) を考える。命題 5 により、各個人 i に対して、

$$x_i | H \setminus \{h\} = v_i^* \text{ \& \ } y_i | H \setminus \{h\} = v_i^{**}$$

となる。

ケース 1: $\sum_{i \in I} u^i(v_i^*) + a_h \geq \sum_{i \in I} u^i(v_i^{**}) + b_h$. 任意の個人 k を選び、

$$z_k | H \setminus \{h\} = v_k^*,$$

$$z_{kh} = u^k(v_k^{**}) + y_{kh} - u^k(v_k^*) + [\sum_{i \in I} u^i(v_i^*) + a_h - \sum_{i \in I} u^i(v_i^{**}) - b_h]$$

と定め、 k 以外の各個人 i に対して

$$z_i | H \setminus \{h\} = v_i^*,$$

$$z_{ih} = u^i(v_i^{**}) + y_{ih} - u^i(v_i^*)$$

と定める。この時、各個人 i に対して、 $(z_i, y_i) \in Q_i$ となり、

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} z_{ih} &= \sum_{i \in I} u^i(v_i^{**}) + \sum_{i \in I} y_{ih} - \sum_{i \in I} u^i(v_i^*) \\ &\quad + [\sum_{i \in I} u^i(v_i^*) + a_h - \sum_{i \in I} u^i(v_i^{**}) - b_h] \\ &= a_h \end{aligned}$$

より、 $z \in F(a, y)$ となるから、命題 6 により、 $a \in G_2(y)$ となる。ゆえに定義により $(a, b) \in S_4$ である。

ケース 2: $\sum_{i \in I} u^i(v_i^*) + a_h < \sum_{i \in I} u^i(v_i^{**}) + b_h$. この場合、 $\sum_{i \in I} u^i(v_i^*) + a_h \leq \sum_{i \in I} u^i(v_i^{**}) + b_h$ だから、ケース 1 と対称的な推論により、 $(b, a) \in S_4$ であることが示される。

以上で、 S_4 の R_{++}^2 への制限が連結律を満足することが示された。これで定理 4 の証明が完了する。

定理 4 は、各個人の選好関係がある共通の財 h に関して h -準線形であれば、選好関係が一致しなくても、シトフスキー社会的無差別曲線が存在することを示している。この点は、定理 3 に示された相似拡大的な選好関係の場合と異なる。しかし、仮定 2 または仮定 3 には、準線形性以外の性質が含まれており、定理 4 の証明にそれらの性質をかなり本質的な意味で用いている。

特に、命題 5 の証明には、単調性や強凸性に加えて、(i)財 h の消費量が 0 になるような消費はどの個人にとっても不可能であるか、あるいは(ii)そのような消費が可能であれば負の任意の量の消費も可能であるという仮定が用いられた。どの財の消費量も負になり得ない場合、(i)の仮定は真に本質的である。実際、エッジワースの箱型図からわかるように、その上下の水平の辺が実現可能ならば、契約曲線は垂直の開区間のみならず、下側の辺でその垂直線の左側と上側の辺でその垂直線の右側を含み、その結果として各点を通るシトフスキー社会的無差別曲線は一意ではなくなる。この条件(i)が定理 4 にとって本質的であることは確かであるが、非現実的であるわけではない。財 h は特に分析上注意が払われている $H \setminus \{h\}$ に属する財を除く財を 1 まとめた合成財と解釈できる

場合が多く、その場合にはその合成財の消費量が0となることはどの個人にとっても不可能であると仮定することは自然であろう。

仮定2に加えて、財 h の量が正の範囲だけでなく、実数全体を変動できることを許容しなければならないという仮定3の要求が連結律の成立にとって本質的に重要であることは次の例からわかる。

例1 : $H = \{1, 2, 3\}$,

$I = \{1, 2\}$,

$a = (e^2, 1, 1)$,

$b = (1, e^2, 1)$

とする。ここで e は自然対数の底である。 R_+^2 の各点 v に対して、

$$u^1(v) = \log(v_1 + c) + 2 \log(v_2 + c),$$

$$u^2(v) = 2 \log(v_1 + c) + \log(v_2 + c)$$

と書く。ここで c は正の実数である。

$$Q_1 = \{(x, y) \in [C_3(R_{++})]^2 : u^1(x_1, x_2) + x_3 \geq u^1(y_1, y_2) + y_3\},$$

$$Q_2 = \{(x, y) \in [C_3(R_{++})]^2 : u^2(x_1, x_2) + x_3 \geq u^2(y_1, y_2) + y_3\}$$

とする。以下で、 c が十分小さい時、 $(a, b) \in S_1$ かつ $(b, a) \in S_1$ となること、すなわち、 S_1 が連結律を満足しないことを示す。

$$\begin{aligned} v^*(a) &= (v_1^*(a), v_2^*(a)) \\ &= [(e^2 - c)/3, (2 + c)/3, (2e^2 + c)/3, (1 - c)/3], \\ v^*(b) &= (v_1^*(b), v_2^*(b)) \\ &= [(1 - c)/3, (2e^2 + c)/3, (2 + c)/3, (e^2 - c)/3] \end{aligned}$$

と書けば、 $(R_+^2)^2 \setminus \{v^*(a), v^*(b)\}$ の各点 v に対して、

$$\begin{aligned} &3 \log(e^2 + 2c) + 3 \log(1 + 2c) + 4 \log 2 - 6 \log 3 \\ &= u^1(v_1^*(a)) + u^2(v_2^*(a)) = u^1(v_1^*(b)) + u^2(v_2^*(b)) \\ &> u^1(v_1) + u^2(v_2) \end{aligned}$$

となる。

$(b, a) \in S_1$ と仮定すると、 $b \in G_1(x)$ となる $P(a)$ の点 x が存在する。したがって、 $F(b, x)$ の点 y が存在する。命題5により $(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = v^*(a)$ となる。仮に $(y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}) = v^*(b)$ ならば、

$$\begin{aligned} &2 \log(1 + 2c) + \log(4/27) + \log(e^2 + 2c) + y_{23} \\ &= 2 \log[(2 + 4c)/3] + \log[(e^2 + 2c)/3] + y_{23} \\ &= u^2(y_{21}, y_{22}) + y_{23} \\ &\geq u^2(x_{21}, x_{22}) + x_{23} \\ &= u^2(v_2^*(a)) + x_{23} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \log [(2e^2 + 4c)/3] + \log [(1 + 2c)/3] + x_{23} \\
&= 2 \log (e^2 + 2c) + \log (1 + 2c) + \log (4/27) + x_{23},
\end{aligned}$$

すなわち,

$$\log (1 + 2c) + y_{23} \geq \log (e^2 + 2c) + x_{23}$$

したがって

$$1 = b_3 \geq y_{23} \geq \log [(e^2 + 2c)/(1 + 2c)] + x_{23}$$

となるが、これは c が十分小さい時は不可能である。したがって、 $(y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}) \neq v^*(b)$,
ゆえに,

$$\begin{aligned}
&u^1(v_1^*(b)) + u^2(v_2^*(b)) + 1 \\
&> u^1(y_{11}, y_{12}) + u^2(y_{21}, y_{22}) + y_{13} + y_{23} \\
&\geq u^1(x_{11}, x_{12}) + u^2(x_{21}, x_{22}) + x_{13} + x_{23} \\
&= u^1(v_1^*(a)) + u^2(v_2^*(a)) + 1 \\
&= u^1(v_1^*(b)) + u^2(v_2^*(b)) + 1
\end{aligned}$$

となって、不合理である。したがって、 $(b, a) \in S_1$ とはなり得ない。まったく対称的に、 $(a, b) \in S_1$ も成立しないことがわかる。 $S_4 \subseteq S_2 \cap S_3 \subseteq S_2 \cup S_3 \subseteq S_1$ だから、これは S_2, S_3, S_4 のいずれも仮定 2 の下で連結律を満足しないことを示している。

この例では、2 人の個人が異なる選好関係を持っているが、たとえ、2 人の個人が同一の選好関係を持っていたとしても、次の例が示すように、 S_3 と S_4 は連結律を満足しない。

例 2 : $H = \{1, 2\}$ & $I = \{1, 2\}$,

$$\begin{aligned}
Q_1 = Q_2 &= \{(x, y) \in [C_2(R_{++})]^2 : x_2 + \log(x_1 + c) \geq y_2 + \log(y_1 + c)\}, \\
a &= (2e^4, 2) \text{ \& } b = (2e, 7)
\end{aligned}$$

とする。ここで、 c は正の実数である。 c が十分小さい時、 $(a, b) \in S_3$ かつ $(b, a) \in S_3$ となることを示そう。

$x = (e^4, 1, e^4, 1)$ と定めれば、命題 5 の証明より、 $x \in P(a)$ となる。ここで $(b, a) \in S_3$ であると仮定してみよう。その場合、 $b \in G_1(x)$ となるはずである。したがって、 $F(b, x)$ の点 y が存在する。ゆえに

$$\begin{aligned}
7 + 2 \log(e + c) &\geq y_{12} + y_{22} + \log(y_{11} + c) + \log(y_{21} + c) \\
&\geq x_{12} + x_{22} + \log(x_{11} + c) + \log(x_{21} + c) \\
&= 2 + 2 \log(e^4 + c),
\end{aligned}$$

したがって、 $5/2 \geq \log[(e^4 + c)/(e + c)]$, すなわち,

$$e^{5/2} \geq (e^4 + c)/(e + c)$$

となるが、 c が十分小さい場合、これは不可能である。したがって、 $(b, a) \in S_3$ ではあり得ない。

$y = (e, 6, e, 1)$ と定めれば、命題 5 の証明より、 $y \in P(b)$ となる。ここで $(a, b) \in S_3$ である

と仮定してみよう。その場合、 $a \in G_1(y)$ となるはずである。したがって、 $F(a, y)$ の点 x が存在する。ゆえに

$$\begin{aligned} x_{12} + \log(x_{11} + c) &\geq y_{12} + \log(y_{11} + c) \\ &= 6 + \log(e + c), \end{aligned}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \log(x_{11} + c) &\geq 6 + \log(e + c) - x_{12} \\ &\geq 4 + \log(e + c), \end{aligned}$$

すなわち、

$$\log[(x_{11} + c)/(e + c)] \geq 4,$$

したがって、

$$2e^4 + c \geq x_{11} + c \geq e^4(e + c),$$

すなわち、

$$(2 - c)e^4 + c \geq e^5 > 2e^4$$

となるが、 c が十分小さい時、これは不可能である。これで $(a, b) \in S_3$ も成立し得ないことが示された。

仮定 2 に加えて、各個人が同一の選好関係を持つ時には、財 h の消費量が正の範囲に限定されても、 S_1 と S_2 の R_{++}^H への制限は連結律を満足することが次に示される。

仮定 4: H の元 h と単調、強凸、 (h, R_{++}) —準線形な選好関係 θ が存在して、各個人 i に対して、 $X_i = C_h(R_{++})$ かつ $Q_i = \theta$ が成立する。

定理 5: 仮定 4 の下で、 S_1 の R_{++}^H への制限は連結律を満足し、 S_2 の R_{++}^H への制限は完全擬順序である。

証明: 命題 4 により、

$$\theta = \{(a, b) \in [C_h R_{++}]^2 : u(a | H \setminus \{h\}) + a_h \geq u(b | H \setminus \{h\}) + b_h\}$$

を満足する $R_{++}^{H \setminus \{h\}}$ 上の連続、単調増加、狭義凹の実数値関数 u が存在する。

S_2 の R_{++}^H への制限が連結律を満たすことを示すために、 $[R_{++}^H \cap \sum X]^2$ の任意の点 (a, b) を考える。 $F^h(a)$ と $F^h(b)$ は非空コンパクトだから、 $F^h(a) \times F^h(b)$ の点 (v^*, v^{**}) が存在して、

$$F^h(a) \setminus \{v^*\} \text{ の各点 } v \text{ に対して } \sum_{i \in I} u(v_i^*) > \sum_{i \in I} u(v_i),$$

$$F^h(b) \setminus \{v^{**}\} \text{ の各点 } v \text{ に対して } \sum_{i \in I} u(v_i^{**}) > \sum_{i \in I} u(v_i)$$

が成立する。 u の狭義凹性により、 $R_{++}^{H \setminus \{h\}}$ の点 p, q で、各個人 i に対して

$$p=v_i^* \ \& \ q=v_i^{**}$$

となるものが存在する。

ケース 1: $u(p)+a_h/\#I \geq u(q)+b_h/\#I$. 各個人 i に対して

$$x_i|H\setminus\{h\}=p \ \& \ y_i|H\setminus\{h\}=q,$$

$$x_{ih}=a_h/\#I \ \& \ y_{ih}=b_h/\#I$$

と定めれば, $x \in F(a, y)$ であり, 命題 5 により, $x \in P(a)$ かつ $y \in P(b)$ となる。

ゆえに, $a \in G_2(y)$ かつ $y \in P(b)$ となって, $(a, b) \in S_2$ が成立する。

ケース 2: $u(p)+a_h/\#I < u(q)+b_h/\#I$. ケース 1 と対称的な推論により, $(b, a) \in S_2$ であることがわかる。 $S_2 \subseteq S_1$ だから, S_1 の R_+^H への制限も連結律を満足する。

S_2 の R_+^H への制限が推移律を満足することを示すために, ある $c \in R_+^H \cap \sum X$ に対して $(a, c) \in S_2$ かつ $(c, b) \in S_2$ となるような $[R_+^H \cap \sum X]^2$ の任意の点 (a, b) を選ぶ。この時, $a \in G_2(x)$ かつ $c \in G_2(y)$ となるような $P(c) \times P(b)$ の点 (x, y) が存在する。 $a \in G_2(x)$ だから $P(a) \cap F(a, x)$ の点 w が存在し, $c \in G_2(y)$ だから $P(c) \cap F(c, y)$ の点 z が存在する。 w は $P(a)$ に, x と z は $P(c)$ に, y は $P(b)$ に属するから, 命題 5 により, $(R_+^{H\setminus\{h\}})^I$ の点 v^a, v^b, v^c が存在して, 各個人 i に対して

$$w_i|H\setminus\{h\}=v_i^a \ \& \ x_i|H\setminus\{h\}=z_i|H\setminus\{h\}=v_i^c \ \& \ y_i|H\setminus\{h\}=v_i^b$$

となる。各個人が同一の選好関係をもち, しかも u は狭義凹だから, $R_+^{H\setminus\{h\}}$ の点 p, q, r が存在して, 各個人 i に対して

$$p=v_i^a \ \& \ q=v_i^b \ \& \ r=v_i^c$$

が成立する。 w は $F(a, x)$ に属するから, 各個人 i に対して

$$\begin{aligned} u(p)+w_{ih} &= u(w_i|H\setminus\{h\})+w_{ih} \\ &\geq u(x_i|H\setminus\{h\})+x_{ih} \\ &= u(r)+x_{ih} \end{aligned}$$

となる。これをすべての個人について合計すると

$$\#Iu(p)+a_h \geq \#Iu(r)+c_h$$

となる。他方, z は $F(c, y)$ に属するから, 各個人 i に対して

$$\begin{aligned} u(r)+z_{ih} &= u(z_i|H\setminus\{h\})+z_{ih} \\ &\geq u(y_i|H\setminus\{h\})+y_{ih} \\ &= u(q)+y_{ih} \end{aligned}$$

となる。これをすべての個人について合計すると

$$\#Iu(r)+c_h \geq \#Iu(q)+b_h,$$

したがって,

$$\#Iu(p)+a_h \geq \#Iu(q)+b_h$$

となる。各個人 i に対して

$$w_i^* | H \setminus \{h\} = p \ \& \ w_{i_h}^* = a_h / \# I,$$

$$y_i^* | H \setminus \{h\} = q \ \& \ y_{i_h}^* = b_h / \# I$$

と定めれば、命題 5 により、 $w^* \in P(a) \cap F(a, y^*)$ 、すなわち、 $a \in G_2(y^*)$ が成立し、再び、命題 5 により、 $y^* \in P(b)$ だから $(a, b) \in S_2$ となって、 S_2 の R_+^n への制限が推移律を満足することが示された。

定理 4 と 5 は準線形選好関係がシトフスキー社会的無差別曲線が存在を保証し得ることを示している。定理 4 は、財 h の消費量が実数のどの値をもとり得る場合には、関係 S_4 がシトフスキー社会的無差別曲線の基礎となる社会的選好関係の候補であること、定理 5 は、財 h の消費量が正の値のみをとり得る場合には、各個人が同一の選好関係を持つ限り、関係 S_2 がその候補であることを示す。この意味で、定理 5 は定理 3 に対応する主張である。仮定 3 あるいは 4 に表現された条件で、既に吟味されたもの以外のものをどの程度緩め得るかは、定理 3 の場合と同様に、残された問題である。

3 バーグソン社会的無差別曲線

シトフスキー社会的無差別曲線が一般に存在するとは限らないのと対照的に、バーグソン社会的無差別曲線は、連続なバーグソン社会的厚生関数が定義されている限り、通常は存在する。バーグソン社会的厚生関数は ΠX 上で定義された実数値関数 W である。すなわち、 W は消費配分全体の集合で定義されている。それに対して、バーグソン社会的無差別曲線は総消費全体の集合 ΣX の各点 a に対して

$$B(a) = \max \{ W(x) : x \in F(a) \}$$

によって定義されるバーグソン社会的効用関数 B の等高線である。バーグソン社会的効用関数の値 $B(a)$ はバーグソン社会的厚生関数 W を最大化するように資源 a を個人間に配分した時に達成される厚生水準である。したがって、バーグソン社会的無差別曲線が存在はバーグソン社会的効用関数 B の存在に依存する。

定理 6: 各個人 i に対して、 X_i が閉かつ下方有界であり、 W が上半連続ならば、 B は ΣX 上の実数値関数である。

証明: 命題 1 により、 ΣX の各点 a に対して、 $F(a)$ は非空かつコンパクトだから、上半連続な実数値関数 W は $F(a)$ 上で最大値をとる。この最大値が関数 B の値である。

バーグソン社会的効用関数 B の連続性を保証するためには若干の条件が必要であろう。以下で、1 つの十分条件を与えておく。そのために、まず、対応 F の連続性を保証する条件を述べる。⁽³⁾

命題 7: 各個人 i に対して $X_i = R^q$ が成立するならば, ΣX の各非空コンパクト部分集合 Y に対して F の Y への制限 $F|Y$ は Y から ΠX への連続対応である。

証明: まず, F の Y への制限が上半連続であることを示す。

ステップ 1: $F(Y)$ は有界である。

ステップ 1 の証明: $F(Y)$ が有界でないと仮定しよう。この時, $\|x^q\|$ が無限大に発散するような $F(Y)$ の点列 $\{x^q\}$ が存在する。各自然数 q に対して $x^q \in F(a^q)$ となる Y の点 a^q が存在する。明らかに, 各自然数 q に対して, $a^q = \sum_{i \in I} x_i^q$ となる。各自然数 q に対して, $y^q = x^q / \|x^q\|$ と定める。一般性を失わずに, 点列 $\{y^q\}$ は $(R^H)^I \setminus \{0\}$ のある点 y に収束すると仮定してよい。命題 1 の証明におけるのと同様に $y \geq 0$, したがって, $\sum_{i \in I} y_i \geq 0$ となる。 $\|x^q\| \sum_{i \in I} y_i^q = \sum_{i \in I} x_i^q = a^q \in Y$ であり, Y は有界だから, $\sum_{i \in I} y_i^q$ は 0 に収束する。したがって, $\sum_{i \in I} y_i = 0$ となって, 不合理である。故に, $F(Y)$ は有界である。

ステップ 2: $F(Y)$ は $(R^H)^I$ の閉集合である。

ステップ 2 の証明: ΠX の各点 x に対して $f(x) = \sum_{i \in I} x_i$ と定めると, f は ΠX から ΣX への連続関数である。 $F(Y) = f^{-1}(Y)$ だから, $F(Y)$ は ΠX の閉集合である。 ΠX は $(R^H)^I$ の閉集合だから, $F(Y)$ は $(R^H)^I$ の閉集合である。

$F|Y$ を Y から $F(Y)$ への対応とみなした場合のグラフは

$$\text{graph } F|Y = \{(a, x) \in Y \times F(Y) : f(x) = a\}$$

で定義される。 f の連続性により, $\text{graph } F|Y$ は $Y \times F(Y)$ の閉部分集合であり, ステップ 1 と 2 により, $F(Y)$ はコンパクトだから, $F|Y$ は Y から $F(Y)$ への上半連続対応である (Berge (1963) 第 6 章の定理 1.7 への系を参照)。したがって, $F|Y$ は明らかに Y から ΠX への上半連続対応である。

次に $F|Y$ の下半連続性を示すために, Y の任意の点 a と $F(a)$ の点 x を選ぶ。 a に収束する Y の任意の点列 $\{a^q\}$ を考える。 $K = \{h \in H : a_h > 0\}$ と書こう。 $H \setminus K$ に属する各財 h と各個人 i に対して $x_{ih} = 0$ となる。自然数 q を任意に選ぶ。 $H \setminus K$ に属する各財 h , 各個人 i に対して $x_{ih}^q = a_{ih}^q / \#I$ と定めれば, $\sum_{j \in I} x_{jh}^q = a_{jh}^q$ が成立し, 各個人 i に対して $x_{ih}^q \geq 0$ となる。 K に属する財 h と個人 k を任意に選ぶ。2 つの場合が考えられる。

注 (3) 位相空間 X から位相空間 Y への対応 F を考える。 X の点 a を考える。 $F(a)$ を含む Y の任意の開集合 G に対して a の X における近傍 U が存在して, U の各点 y に対して $F(y)$ が G に含まれる時, F は a において上半連続であるという。 $F(a)$ と交わる Y の任意の開集合 G に対して a の X における近傍 U が存在して, U の各点 y に対して $F(y)$ が G と交わる時, F は a において下半連続であるという。 F が a において上半連続かつ下半連続である時, F は a において連続であるという。 F が X の各点で上半連続 [下半連続, 連続] である時, F は上半連続 [下半連続, 連続] であるという。

ケース 1: $x_{kh} \geq a_h - a_h^q$. この場合, $x_{kh}^q = x_{kh} + a_h^q - a_h$, k 以外の各個人 i に対して $x_{ih}^q = x_{ih}$ と定める。

ケース 2: $x_{kh} < a_h - a_h^q$. この場合, $x_{kh}^q = a_h^q$, k 以外の各個人 i に対して $x_{ih}^q = 0$ と定める。

こうすれば, $\sum_{j \in I} x_{jh}^q = a_h^q$ が成立し, [各個人 i に対して $x_{ih}^q \geq 0$ となる。したがって, $x^q \in F(a^q)$ が成立する。 $\{a^q\}$ は a に収束するから, 十分大きい q に対しては, ケース 2 が成立することはない。したがって, $\{x^q\}$ は x に収束する。ゆえに, $F|Y$ は a において下半連続である。 a は Y の任意の点だから $F|Y$ は Y において下半連続である。これで, 命題 7 の証明は完了する。

定理 7: 各個人 i に対して $X_i = R_+^n$ であり, W が連続ならば, B は $\sum X$ の各点で連続である。

証明: $\sum X$ の任意の点 a を選ぶと, $\sum X$ における a のコンパクトな近傍 Y が存在する。命題 7 より, F の Y への制限 $F|Y$ は Y から ΠX への連続対応だから, W の連続性により, B は Y 上で連続であり (Berge (1963) 第 6 章の最大値定理を参照), したがって, a において連続である。

以上で, バークソン社会的効用関数 B が定義されるための十分条件と, それが連続になるための十分条件を求めた。後者については, 若干弱めることが可能であろう。バークソン社会的効用関数の凹性については, Negishi (1963) による分析がある。最後にそこでの結果をまとめておこう。

Euclid 空間のある凸集合 Y で定義された実数値関数 f は

- (12) $f(x) \leq f(y)$ となる任意の $(x, y) \in Y^2$ と任意の $t \in]0, 1[$ に対して $f(x) \leq f((1-t)x + ty)$ が成立する時, 準凹である,
 - (13) $f(x) < f(y)$ となる任意の $(x, y) \in Y^2$ と任意の $t \in]0, 1[$ に対して $f(x) < f((1-t)x + ty)$ が成立する時, 半狭義準凹である,
 - (14) $f(x) \leq f(y)$ かつ $x \neq y$ となる任意の $(x, y) \in Y^2$ と任意の $t \in]0, 1[$ に対して $f(x) < f((1-t)x + ty)$ が成立する時, 狭義準凹である,
 - (15) 任意の $(x, y) \in Y^2$ と任意の $t \in]0, 1[$ に対して $(1-t)f(x) + tf(y) \leq f((1-t)x + ty)$ が成立する時, 凹である,
 - (16) $x \neq y$ となる任意の $(x, y) \in Y^2$ と任意の $t \in]0, 1[$ に対して $(1-t)f(x) + tf(y) < f((1-t)x + ty)$ が成立する時, 狭義凹である,
- とそれぞれ言われる。

定理 8: 各個人 i に対して X_i が閉かつ下方有界であり, W は上半連続であるとする。

- (a) W が準凹ならば B も準凹であり,
- (b) W が半狭義準凹ならば B も半狭義準凹であり,
- (c) W が狭義準凹ならば B も狭義準凹であり,

- (d) W が凹ならば B も凹であり、
 (e) W が狭義凹ならば B も狭義凹である。

証明：(a) $B(a) \leq B(b)$ となる任意の $(a, b) \in \sum X \times \sum X$ および任意の $t \in]0, 1[$ を考える。この時、 $B(a) = W(x)$ かつ $B(b) = W(y)$ となる $F(a) \times F(b)$ の点 (x, y) が存在する。 $c = (1-t)a + tb$ また $z = (1-t)x + ty$ と書こう。 $z \in F(c)$ かつ $W(x) \leq W(y)$ だから、 $B(c) \geq W(z) \geq W(x) = B(a)$ となる。

(b) $B(a) < B(b)$ となる任意の $(a, b) \in \sum X \times \sum X$ および任意の $t \in]0, 1[$ を考える。この時、 $B(a) = W(x)$ かつ $B(b) = W(y)$ となる $F(a) \times F(b)$ の点 (x, y) が存在する。 $c = (1-t)a + tb$ また $z = (1-t)x + ty$ と書こう。 $z \in F(c)$ かつ $W(x) < W(y)$ だから、 $B(c) \geq W(z) > W(x) = B(a)$ となる。

(c) $B(a) \leq B(b)$ かつ $a \neq b$ となる任意の $(a, b) \in \sum X \times \sum X$ および任意の $t \in]0, 1[$ を考える。この時、 $B(a) = W(x)$ かつ $B(b) = W(y)$ となる $F(a) \times F(b)$ の点 (x, y) が存在する。 $c = (1-t)a + tb$ また $z = (1-t)x + ty$ と書こう。 $z \in F(c)$ かつ $W(x) \leq W(y)$ だから、 $B(c) \geq W(z) > W(x) = B(a)$ となる。

(d) 任意の $(a, b) \in \sum X \times \sum X$ および任意の $t \in]0, 1[$ を考える。この時、 $B(a) = W(x)$ かつ $B(b) = W(y)$ となる $F(a) \times F(b)$ の点 (x, y) が存在する。したがって、 $B((1-t)a + tb) \geq W((1-t)x + ty) \geq (1-t)W(x) + tW(y) = (1-t)B(a) + tB(b)$ となる。

(e) $a \neq b$ となる任意の $(a, b) \in \sum X \times \sum X$ および任意の $t \in]0, 1[$ を考える。この時、 $B(a) = W(x)$ かつ $B(b) = W(y)$ となる $F(a) \times F(b)$ の点 (x, y) が存在する。したがって、 $B((1-t)a + tb) \geq W((1-t)x + ty) > (1-t)W(x) + tW(y) = (1-t)B(a) + tB(b)$ となる。

Negishi (1963) においては、バーグソン社会的厚生関数 W が個人主義的である場合に、 W 自体が準凹あるいは凹になるための条件も求められているが、ここでは立ち入らない。

3 結 語

社会的無差別曲線の存在問題は、経済学に現れるいくつかの集計問題の1つとして位置付けることができよう。それらの中には、ヒックスの合成財定理に見られる価格を媒介とした集計、マクロ生産関数を構成するための異質的資本財の集計が含まれるが、ここでの問題に特に関係が深いものは、異なる個人の選好を集計して社会的厚生関数を構成する問題であろう。

上に言及された他の集計と対照的に、社会的無差別曲線に関わる集計には特別の複雑さが伴うように思われる。というのは、社会的無差別曲線は複数個人にわたる選好と数量の2重の集計の結果だからである。

引用文献

- Berge, C. (1963): *Topological Spaces*, (Macmillan).
- Bergson, A. (1938): "A Reformulation of Certain Aspects of Welfare Economics," *Quarterly Journal of Economics*, 52, 310-334.
- Gorman, W. M. (1959): "Are Social Indifference Curves Convex?" *Quarterly Journal of Economics*, 73, 485-496.
- Inada, K. (1971): "Social Welfare Functions and Social Indifference Curves," *Econometrica*, 39, 599-623.
- Negishi, T. (1963): "On Social Welfare Function," *Quarterly Journal of Economics*, 77, 156-158.
- Samuelson, P. A. (1956): "Social Indifference Curves," *Quarterly Journal of Economics*, 70, 1-22.
- Scitovsky, T. (1942): "A Re-Consideration of the Theory of Tariffs," *Review of Economic Studies*, 9, 89-110.

(経済学部教授)