Title	税率の比例的変化の経済分析
Sub Title	On the economic effects of uniform reductions of tax rates
Author	川又, 邦雄
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1990
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.82, No.特別号-I (1990. 3) ,p.40- 47
Abstract	
Notes	福岡正夫教授退任記念論文集
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19900301-0040

「三田学会雑誌」82巻特別号—I（1990年3月）

税率の比例的変化の経済分析*

川 又 邦 雄

1 はじめに

本稿では，簡単な一般均衡モデルにおいて，税率の比例的変化が，消費量および経済厚生に及ぼす効果について分析する。すべての財が代替財であって上級財であるならば，税率の比例的減少によって課税されていた財の消費量が増大すること，そして代表的消費者の効用が増大することが示される。このような結論を導出している文献は，2財モデルによる分析を試みたもの以外にも存在する。最近の分析例には Hatta-Haltiwanger〔1986〕, Keen〔1987〕などがある。ここでの分析の特色は，公共財を含まない点を除けば，生産技術の線型性等を仮定していないためにその枠組が一般的であること，そして Antonelli 行列の使用によって分析が簡潔となり，導かれた結論が明解であることである。また税率の変化を分析するための基礎を明確にする目的にもかなっていると考える。

2 モデルと仮定

財の種類が n 個であるとして，$x=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ を経済全体の純生産量を示すベクトル，$\omega=(\omega_1, \omega_2, \cdots\cdots, \omega_n)$ の初期賦存量を示すベクトルとする。この場合，経済全体の消費ベクトルは $x+\omega$ で示されることになる。

以下では説明の便宜上，代表的生産者と代表的消費者の存在を仮定し，消費者の効用関数が

$$u=f(x+\omega) \tag{1}$$

生産者の生産関数が

$$g(x)=0 \tag{2}$$

によって表現されるものとする。

f および g は定義域の内点で3次までの連続な偏微分を持ち，$f_i=\partial f/\partial x_i$, $f_{ij}=\partial^2 f/\partial x_j \partial x_i$ 等と記すとき

---

* 本研究に対しては，日本経済研究センターから資金援助を受けた。深く感謝したい。

$$f_i \geqq 0 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1),\ f_n>0$$
$$g_i \leqq 0 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1),\ g_n<0$$

を満たすものとする。またfは強い擬凹関数，gは強い擬凸関数であることを仮定する。以下ではこれらの条件を強めて，fの縁つきヘッセ行列を

$$H(f)=\begin{bmatrix} f_{11}, & f_{12}, & \cdots\cdots & f_{1n}, & f_1 \\ \vdots & & & & \\ f_{n1}, & f_{n2} & & f_{nn}, & f_n \\ f_1, & f_2 & & f_n, & 0 \end{bmatrix}$$

とおき，$|H_r(f)|$ $(r=1,\ 2,\cdots\cdots,n)$ をそのr次の主座小行列式とするとき，

$$|H_r(f)|>0 \qquad (r=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n) \tag{3}$$

となること，そして財の番号を置換した場合にも(3)式に対応する条件が成立することを仮定する。またgについても上の条件でfの代りに$-g$とおいた

$$(-1)^r|H_r(g)|>0 \qquad (r=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n), \tag{4}$$

および財の番号の置換に関する同様の条件が成り立つものとする。

さて消費者にとっての財iの財n（以下ではそれを価値尺度財とする）に対する限界代替率を$P^i(x)$とおけば

$$P^i(x)=f_i(x)/f_n(x) \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1) \tag{5}$$

となる。この関数のことを需要価格関数とよぶこともある。また生産者にとっての財iの財n（価値尺度財）に対する限界代替率を

$$Q^i(x)=g_i(x)/g_n(x) \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1) \tag{6}$$

と定義することにしよう。この関数を供給価格関数とよぶことがある。

つぎにi，jを2つの異なる財（の添字）とし，nをそれらと異なる財（価値尺度財）とする。Hicks-Allen（1934）の定義によれば，財jが増加し，それにともなって価値尺度財nが消費者の効用を一定に保つように調整されるとき需要価格$P^i(x)$が低下するなら，財iと財jとは（nを価値尺度財として）代替財であるといい，$P^i(x)$を高まる場合には補完財であるという。また$P^i(x)$が変化しない場合に独立財であるという。上の定義にしたがって計算すれば，財iと財jが代替財であるのは，$P^i_j(x)$を$P^i(x)$のx_jによる偏微分として

$$a_{ij}(x) \equiv P^i_j(x)-P^j(x)P^i_n(x) \tag{7}$$

が負である場合であり，補完財であるのはそれが正の場合であることが知られる。以下では a_{ij} をその i, j 要素とする行列 $A=(a_{ij})$ が負の定符号を持つことが仮定される。一般にAは，Slutzky-Hicks の最初の $n-1$ 財の代替項を要素に持つ行列の逆行列であることが知られている。これらについては詳しくは Samuelson (1950) あるいは Katzner (1970 第3章) を参照されたい。上の $n-1$ 財の Slutzky 行列が対称で負の定符号を持つ場合には，A についての性質はそれから直ちに導かれる。

生産者についても同様に

$$b_{ij}(x)=Q^i_j(x)-Q^j(x)\,Q^i_n(x) \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1) \tag{8}$$

と定義するとき，財 i と財 j は（nを価値尺度財として）b_{ij} が正であれば Hicks-Allen の意味で代替財，b_{ij} が負であれば補完財であるということにする。以下では Antonelli 行列 $B=(b_{ij})$ が正の定符号を持つと仮定する。なおすべての財が Slutzky=Hicks の意味での代替財であれば，Hicks=Allen の意味でも代替財であることが知られている。

3　基礎的分析

いま(2)の生産技術の制約に加えて

$$P^i(x+\omega)-Q^i(x)=kt_iQ^i(x) \qquad (i=1,\ 2\ \cdots\cdots,\ n-1) \tag{9}$$

が成り立っているとしよう。ここで k と t_i ($i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$) は所与のパラメターで，$kt_i$ が財 i に課された従価税率であると解釈される。k は正のパラメターで $t=(t_1,\ t_2,\ \cdots\cdots,\ t_{n-1})$ を比例的に動かしたときの効果を分析するために導入されたものである。kt が与えられれば，適当な条件の下で(2), (9)より生産ベクトル $x(k)$ が決定される。(1) 以下の目的は t を所与として k を動かすとき，$x(k)$ がどう変化するか，そしてそれにともなって(1)で与えられる消費者の効用がどう変化するかを分析することにある。

(1), (2), (9)を k で偏微分すると，

$$\textstyle\sum_r P^r\,\partial x_r/\partial k-(1/f_n)\dfrac{\partial u}{\partial k}=0 \tag{10}$$

$$\textstyle\sum_r Q^r\,\partial x_r/\partial k=0 \tag{11}$$

$$\textstyle\sum_r\,[P^i_r-(kt_i+1)Q^i_r]\,\partial x_r/\partial k=t_i\,Q^i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1) \tag{12}$$

が導かれる。この関係は行列を用いて

注（1） この問題については本稿の第6節で論じてある。

$$\begin{bmatrix} P_1^1-(kt_1+1)\,Q_1^1, & \cdots\cdots & P_n^1-(kt_1+1)\,Q_n^1, & 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ P_1^{n-1}-(kt_{n-1}+1)\,Q_1^{n-1}, & \cdots & P_n^{n-1}-(kt_{n-1}+1)\,Q_n^{n-1}, & 0 \\ Q^1 & \cdots\cdots & Q^n & 0 \\ P^1 & \cdots\cdots & P^n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial x_1/\partial k \\ \vdots \\ \\ \partial x_n/\partial k \\ -(1/f)\,\partial u/\partial k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 Q^1 \\ \\ t_n Q^{n-1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

のように表示することができる。

さて $\varDelta$ を(13)の $(n+1)\times(n+1)$ 行列の行列式の値とすれば,

$$\varDelta=\begin{vmatrix} a_{11}-(kt_1+1)\,b_{11}, & \cdots\cdots & a_{1n-1}-(kt_1+1)\,b_{1n-1}, & P_n^1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{n-1\,1}-(kt_{n-1}+1)\,b_{n-1\,1} & \cdots\cdots & a_{n-1\,n-1}-(kt_{n-1}+1)\,b_{n-1\,n-1}, & P_n^{n-1} \\ -t_1Q^1 & \cdots\cdots & -t_{n-1}Q^{n-1}, & 1 \end{vmatrix} \tag{14}$$

$$=\begin{vmatrix} A-(I+kT)\,B & P_n \\ -Q'T & 1 \end{vmatrix}$$

のように書ける。ここで I は単位行列, A および B は Antonelli 行列, $Q=(Q^1, \cdots\cdots, Q^{n-1})$ と $P_n=(P_n^1, \cdots\cdots, P_n^{n-1})$ は $n-1$ 次のベクトル, T は t_i を第 i 対角要素にもつ対角行列である。したがって

$$\varDelta=|A-(I+kT)\,B|(1+Q'T(A-(I+kT)B)^{-1}P_n) \tag{15}$$

となる。

つぎの結果は $\varDelta$ が確定した符号をもつための条件を与えるものである。なおここでは, 上に注意したように Antonelli 行列 A が負の定符号, B が正の定符号をもつこと, そしてすべての t_i, $i=1, 2, \cdots\cdots, n-1$ について t_i がプラスであることを仮定している。また財 i が財 n に対して上級財であるとは, 他の財の消費量を任意に固定して所得を2つの財に支出する場合に, その増加が x_i を増加させることをいう。この条件は $P_n^i>0$ と書ける。

補助定理 1

(i) すべての財 i が財 n に対して上級財であるか, 少なくとも下級財でない (すべての $i\neq j$ について $P_n^i\geqq 0$ である) とし, しかもすべての財が生産および消費において Hicks=Allen の意味で代替財か独立財である (すべての $i\neq j$ $(i, j=1, 2, \cdots\cdots, n-1)$ について $a_{ij}\geqq 0$, $b_{ij}\leqq 0$ である) とするならば, $\varDelta$ は $(-1)^n$ と同じ符号をもつ。なお(i)の仮定の代りに(ii)効用関数が価値尺度財に関して線型であるとしても同じ結論が導かれる。また(i) Hicks=Allen の意味での代替性についての条件を(iii) Slutzky=Hicks の意味での代替性についての条件に置き換えてもよい。

証明）

仮定によって $A-(I+kT)B$ は負の定符号をもつから，その行列式の符号は $(-1)^n$ に等しい。またすべての財が代替財あるいは独立財であれば，対角要素は負で，非対角要素は非正である。このことはその行列の 逆行列がすべての正の要素からなることを意味する。したがって⒂より Δ の符号は $(-1)^n$ に等しい。仮定(ii)が成立する場合には P_n がゼロベクトルに等しいから，$\Delta=|A-(I+kT)B|$ となって結論が導かれる。Slutzky-Hicks の代替・補完性を用いての主張に関しては 2節の最後を参照のこと。

4　税率の比例的変化と消費量

本節では税率の比例的変化が財 i $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$ の消費量および生産量に及ぼす効果について分析する。両者の間には定ベクトル ω だけの差しかないから，どちらか一方について述べれば十分である。

いま各 $i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$ について，⒁式の Δ の行列の第 i 列を TQ で置きかえた行列を

$$\begin{bmatrix} (A-(I+kT)B)(i) & P_n \\ -(Q'T)(i) & 1 \end{bmatrix} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$$

と記せば，その行列式は

$$\Delta(i)=|(A-(I+kT)B)(i)|(1+(Q'T)(i)(A-(I+kT)B)(i)^{-1}P_n) \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1) \tag{16}$$

と計算される。ここで $(A-(I+kT)B)(i)$ は $A-(I+kT)B$ から i 行 i 列を除いた行列を示すものとする。

補助定理1の仮定の下では Δ はゼロでないから，⒀にクラーメルの公式を適用すれば

$$\frac{\partial x_i}{\partial k}=\frac{\Delta(i)}{\Delta} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1) \tag{17}$$

となる。この右辺は，分子・分母に⒂，⒃を代入すれば，より扱いやすい形に表現できる。それによってつぎの結果を示すことができる。

命題 1

補助定理の条件(i)(ii)，あるいは条件(iii)のいずれかが成り立つとすれば，すべての $i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1$ について $\partial x_i/\partial k<0$ となる。つまり税率の比例的減少は，課税された財の消費量と生産量を増加させる。

証明）

$\Delta(i)$ について Δ の場合と同じ議論を適用すれば，$\Delta(i)$ は $(-1)^{n-1}$ と同じ符号を持つことが知られる。

5　税率の比例的変化と経済厚生

本節では税率の比例的変化が経済厚生に及ぼす効果について分析する。ここでは経済厚生は消費者の効用の大小によって表現されるものと想定する。そのためには⒀式を用いて $\partial u/\partial k$ の符号を確定すればよい。

いま⒀式の左辺の行列の第 $n+1$ 列を右辺のベクトルで置き換えた行列の行列式を $\Delta(n+1)$ とおけば

$$\Delta(n+1)=\begin{vmatrix} A-(I+kT)B & TQ \\ Q'T & 0 \end{vmatrix} \tag{18}$$
$$=-|A-(I+kT)B|(Q'T(A-(I+kT)B)^{-1}TQ)$$

と計算される。補助定理１の仮定の下では Δ はゼロでないから，⒀にクラーメルの公式を適用すれば

$$\frac{\partial u}{\partial k}=-\frac{\Delta(n+1)}{\Delta}f_n \tag{19}$$
$$=\frac{Q'T(A-(I+kT)B)^{-1}\,TQ\cdot f_n}{1+Q'T(A-(1+kT)B)^{-1}P_n}$$

と計算される。この公式を用いれば，つぎの命題を導くことは容易である。

命題 2

補助定理の条件(i)(ii)，あるいは条件(iii)のいずれかが成り立つとすれば，$\partial u/\partial k<0$ となる。つまり税率の比例的減少は代表的消費者の効用を高める。

証明）

証明の方法は補助定理のそれとまったく同様である。

6　補論：方程式体系の可解性について

以上の分析においては方程式体系(2)，(9)が $t=(t_1, t_2, \cdots\cdots, t_{n-1})$ を与えたとき x について解けることを仮定していた。本節ではそのような解 $x(t_0)$ がある t_0 について定まったとして，t_0 を変

更したとき，その近傍で $x(t)$ が求まるための条件を検討してみよう。

その目的のために，方程式体系(9)，(2)の x に関するヤコービ行列を書くと，

$$J=\begin{bmatrix} P_1^1 -(1+kt_1)Q_1^1, \cdots\cdots, & P_n^1-(1+kt_1)Q_n^1 \\ \vdots & \\ P_1^{n-1}-(1+kt_{n-1})Q_1^{n-1}\cdots\cdots, & P_n^{n-1}-(1+kt_{n-1})Q_n^{n-1} \\ Q^1 \qquad\qquad \cdots\cdots, & Q^n \end{bmatrix} \tag{20}$$

となる。

これより

$$|J|=|A-(I+kT)B|(1+(P-Q)'(A-(I-kT)B)^{-1}P_n) \tag{21}$$

と計算される。したがってすべての t_i $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-1)$ が非負で，Aが負の定符号，Bが正の定符号をもつ場合には，補助定理 1 の仮定の下で $|J|\neq 0$ となる。その場合には，陰関数定理によって，t_0 の近傍の各 t について方程式体系(2)(9)を満たす連続微分可能な $x(t)$ が存在することが結論できる。

7 結　　語

本稿の分析は，従価税率の一様な変化の効果を分析したものであるが，同じ手法によって，従量税率の一様な変化の効果を分析することも可能である。また一つの税率が変化した場合の経済厚生に及ぼす効果についての分析として Kawamata (1977) を参照されたい。

参考文献

Antonelli, G. B., (1886) Sulla teoria matematica della Economia politica. Pisa; nella Yipografia del Folchetto, (privately published). An English translation appeared as "On the Mathematical Theory of Political Economy," in J. S. Chipman, L. Hurwicz, M. K. Richter, and H. Sonnenschein ed. *Preference, Utility, and Demand, 1971.*

Diewert, W. E., (1981) "The Measurement of Deadweight Loss Revisited." *Econometrica,* vol. 49, No. 5.

Dixit, A. K., (1975) "Welfare Effects of Tax and Price Changes," *Journal of Public Economics,* 4, pp. 103–123.

Hatta, T. and John Haltiwanger (1986) Tax Reform and Strong Substitutes, *International Economic Review,* 27 pp. 303–315.

Hicks, J. R., and Allen, R. G. D., (1934) "A Reconsideration of the Theory of Value," *Econometrica,* NS 1, pp. 52–75, 196–219.

Kawamata, K., (1977) "Price Distortion and the Second Best Optimum, *The Riview of Economic*

Studies, vol. 44, No. 1, pp. 23-29.

Keen, M., (1987) "Welfare Effects of Commodity Tax Harmonization," *Journal of Public Economics,* pp. 107-114.

Lloyd, P. J., (1974) "A More General Theory of Price Distortion in Open Economies, *Journal of International Economics,* 4, pp. 365-386.

Samuelson, P. A., (1950) "The Problem of Integrability in Utility Theory," NS 17, pp. 355-385.

（経済学部教授）