慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	計量経済学における頑健推定(2)
Sub Title	Robust estimation in econometrics (2)
Author	蓑谷, 千凰彦
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1990
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.82, No.4 (1990. 1) ,p.741(73)- 791(123)
JaLC DOI	10.14991/001.19900101-0073
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19900101-0073

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

「三田学会雑誌」82巻4号（1990年1月）

計量経済学における頑健推定（2）

蓑　谷　千　凰　彦

12　代表的なψ関数

M推定量を与える代表的なψ関数を，損失関数ρ，ウエイト関数wとともに表にしたのが表7であり，グラフを示したのが図13から図21である。表および図には，比較のために，OLS の3つの関数も示した。Huber の関数はすでに図12で示したが再掲した。表7の名称の H=Huber〔24〕，A=Andrews et al.〔1〕，B=Beaton and Tukey〔3〕，C=Cauchy，F=Fair〔10〕，L=Logistic，T=Hinich and Talwar〔20〕，W=Dennis and Welsch〔8〕である。Bは Tukey の biweight としても知られている。

10節で述べたように，影響関数 IC とψ関数は比例関係にあるから，Andrews et al. の IC を例にとれば図22のようにψと同じ形をもつ。図22にはさらに11節で説明した g. e. s., l. s. s. および排除点を示した。図14から図21までの（OLS を除く）ψ関数の特徴は次の通りである。

① すべてのψは有界である。したがって g. e. s. はすべての IC で有限の大きさをもつ。

② 不連続点をもつTを除き，すべてのψは連続である。すなわち l. s. s. はやはり有限の大きさをもつ。

③ 排除点をもっているψはA，B，Tの3種類である。その他のψの排除点は∞の大きさである。もしきわめて大きな残差に対して抵抗力のある（resistant な）M 推定量が必要な場合には，A，B，Tが重要である。AとBは図からわかるようにほとんど同じである。

④ すべてのψは奇関数，すなわち

$$\psi(-u)=-\psi(u)$$

である。

⑤ 小さいuの値に対して

$$\psi(u)\approx cu,\ c>0$$

である。

⑥ すべてのψは，$\psi'(0)=0$ を満たす。すなわち0の近辺におけるuの変化のパラメータ推定値への影響力の変化はない。

調整定数はψ関数の名称と同じにしてある。この調整定数の値によって，g. e. s., l. s. s. あるい

表 7　代表的な ρ, ψ, w 関数

名称	$\rho(u)$	$\psi(u)$	$w(u)$	uの範囲
OLS	$\frac{1}{2}u^2$	u	1	$-\infty<u<\infty$
H	$\begin{cases}\frac{1}{2}u^2 \\ H\lvert u\rvert-\frac{H^2}{2}\end{cases}$	u $\mathrm{sgn}(u)H$	1 $\frac{H}{\lvert u\rvert}$	$\lvert u\rvert\leq H$ $\lvert u\rvert>H$
A	$\begin{cases}A^2\left[1-\cos\left(\frac{u}{A}\right)\right] \\ 2A^2\end{cases}$	$A\sin\left(\frac{u}{A}\right)$ 0	$\left(\frac{u}{A}\right)^{-1}\sin\left(\frac{u}{A}\right)$ 0	$\lvert u\rvert\leq\pi A$ $\lvert u\rvert>\pi A$
B	$\begin{cases}\left(\frac{B^2}{2}\right)\left\{1-\left[1-\left(\frac{u}{B}\right)^2\right]^3\right\} \\ \frac{B^2}{2}\end{cases}$	$u\left[1-\left(\frac{u}{B}\right)^2\right]^2$ 0	$\left[1-\left(\frac{u}{B}\right)^2\right]^2$ 0	$\lvert u\rvert\leq B$ $\lvert u\rvert>B$
C	$\left(\frac{C}{2}\right)^2\log\left[1+\left(\frac{u}{C}\right)^2\right]$	$u\left[1+\left(\frac{u}{C}\right)^2\right]^{-1}$	$\left[1+\left(\frac{u}{C}\right)^2\right]^{-1}$	$-\infty<u<\infty$
F	$F^2\left[\frac{\lvert u\rvert}{F}-\log\left(1+\frac{\lvert u\rvert}{F}\right)\right]$	$u\left(1+\frac{\lvert u\rvert}{F}\right)^{-1}$	$\left(1+\frac{\lvert u\rvert}{F}\right)^{-1}$	$-\infty<u<\infty$
L	$L^2 log\left[\cosh\left(\frac{u}{L}\right)\right]$	$L\tanh\left(\frac{u}{L}\right)$	$\left(\frac{u}{L}\right)^{-1}\tanh\left(\frac{u}{L}\right)$	$-\infty<u<\infty$
T	$\begin{cases}\frac{u^2}{2} \\ \frac{T^2}{2}\end{cases}$	u 0	1 0	$\lvert u\rvert\leq T$ $\lvert u\rvert>T$
W	$\left(\frac{W}{2}\right)^2\left\{1-\exp\left[-\left(\frac{u}{W}\right)^2\right]\right\}$	$u\exp\left[-\left(\frac{u}{W}\right)^2\right]$	$\exp\left[-\left(\frac{u}{W}\right)^2\right]$	$-\infty<u<\infty$

注：出所 Holland〔23〕

は排除点，あるいは漸近的分散の値

$$V(T,\ F)=\frac{E(\psi^2)}{[E(\psi')]^2} \tag{68}$$

が異なってくる。表8は $F=\Phi$（標準正規分布の累積分布関数）のとき，すなわち u の真の分布が標準正規分布のとき，M推定量の漸近的有効性が95%となる調整定数の値である（Holland〔23〕）。

11節で Huber の ψ を例にとり，調整定数 H の値が 1.345 のとき漸近的有効性が95%となることを示した。その他の ψ の調整定数の値は不完全ガンマ関数（B, T, W）あるいは数値計算によって Holland が求めた値である。18節でこれらの ψ 関数を用いて実際にM推定値を求める。

13　IRLS と M推定量

線形回帰モデル

$$Y_i=\mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta}+u_i,\qquad i=1,\ \cdots,\ n \tag{69}$$

のパラメータ β のM推定量は

$$\sum_{i=1}^{n}\psi\left(\frac{Y_i-\mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)\mathbf{x}'_i=0 \tag{70}$$

を解くことによって得られる（9節参照）。

図13 OLS

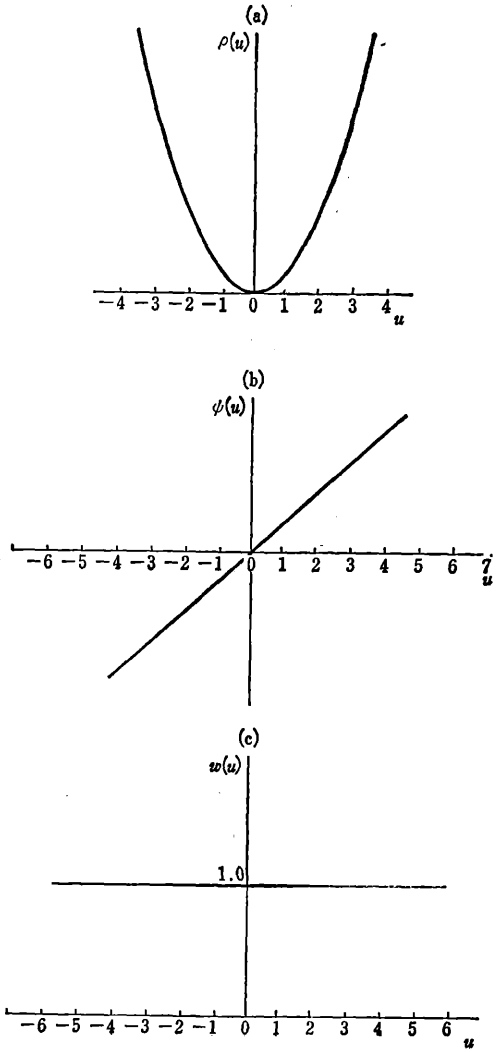


図14 Huber

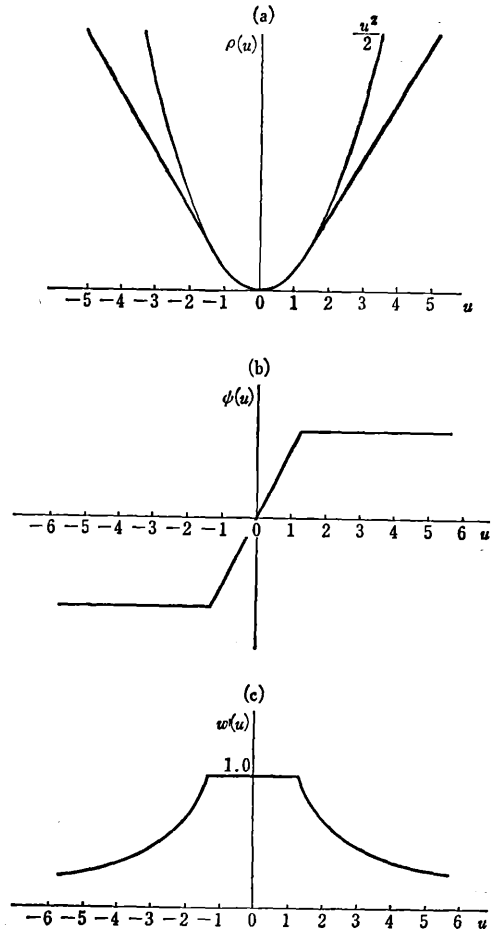


図15 Andrews

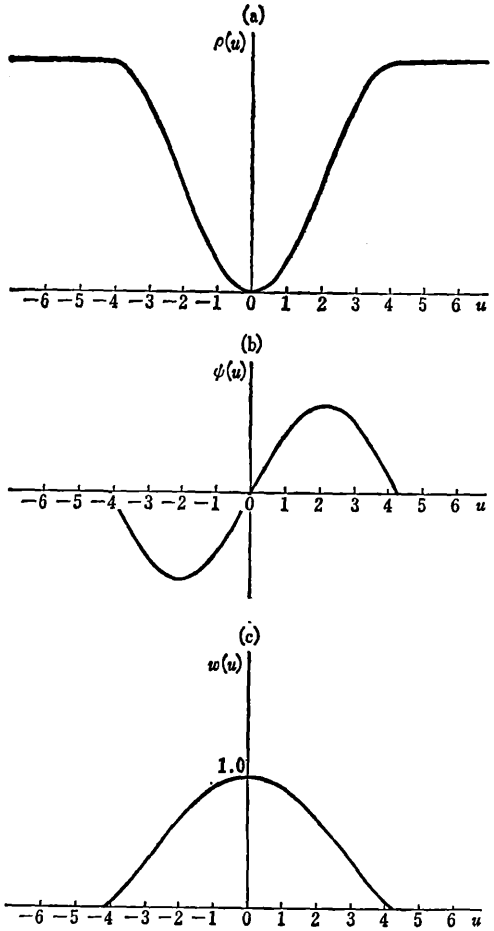


図16 Tukey の biweight

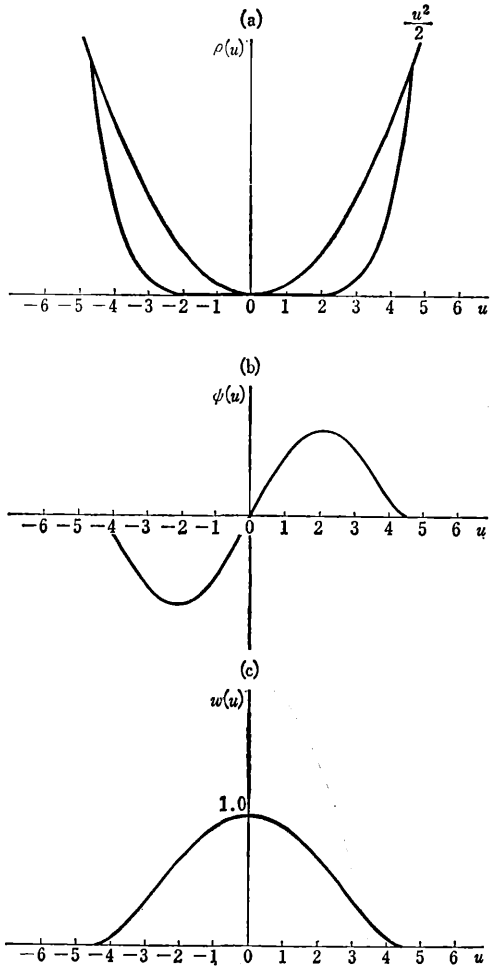


図17 Cauchy

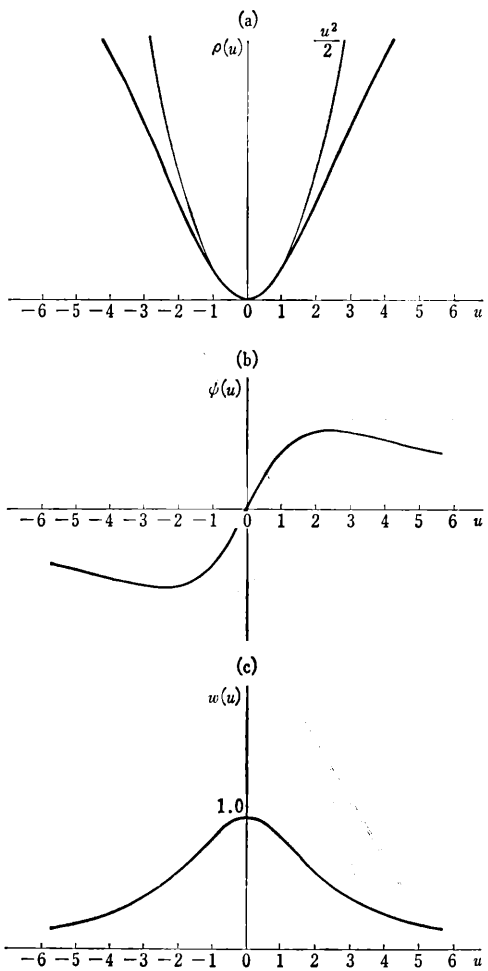


図18 Fair

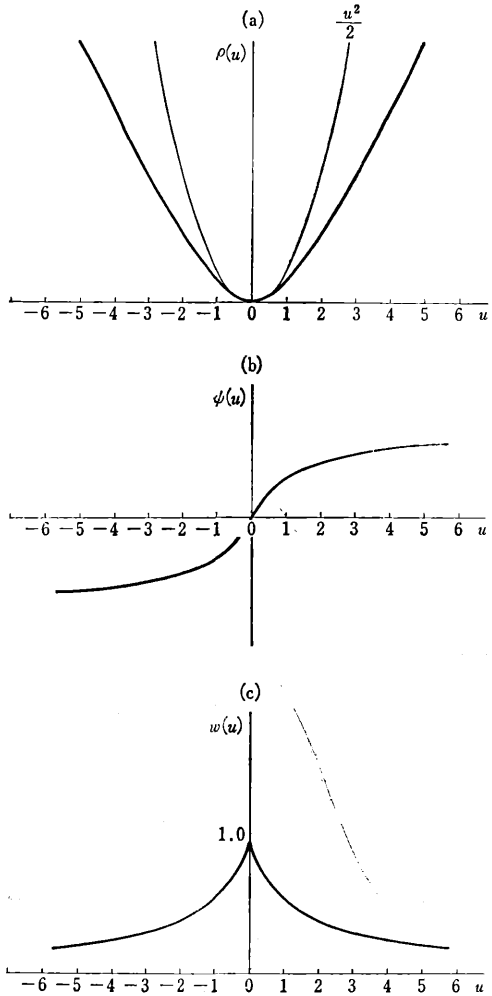


図19 Logistic

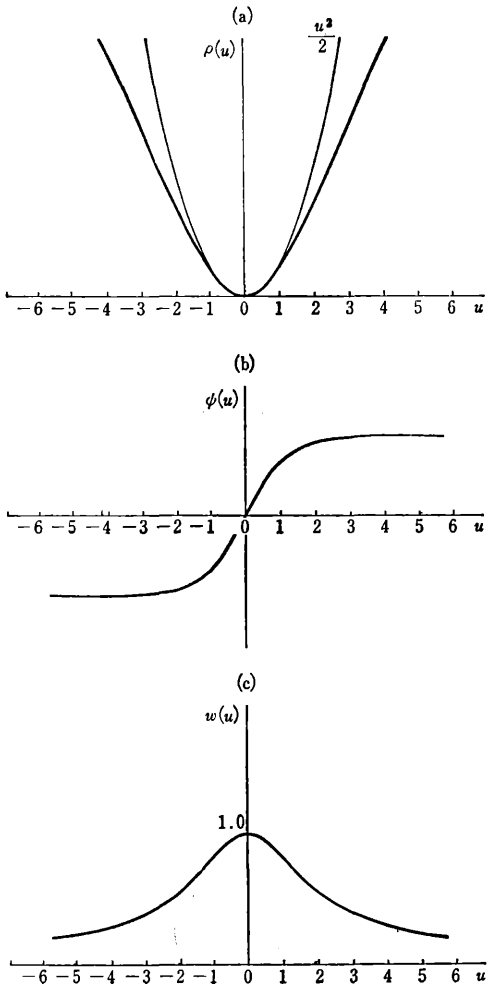


図20 Hinich

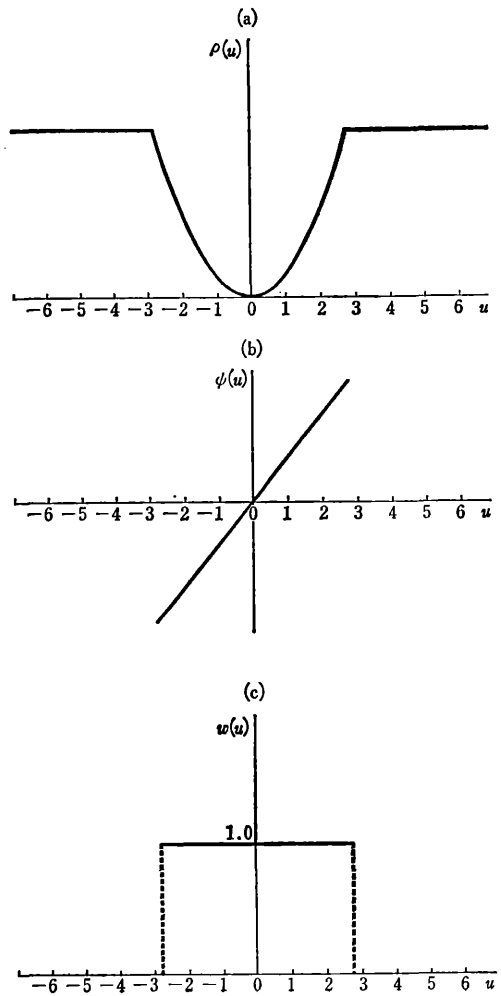


図21 Dennis と Welsch

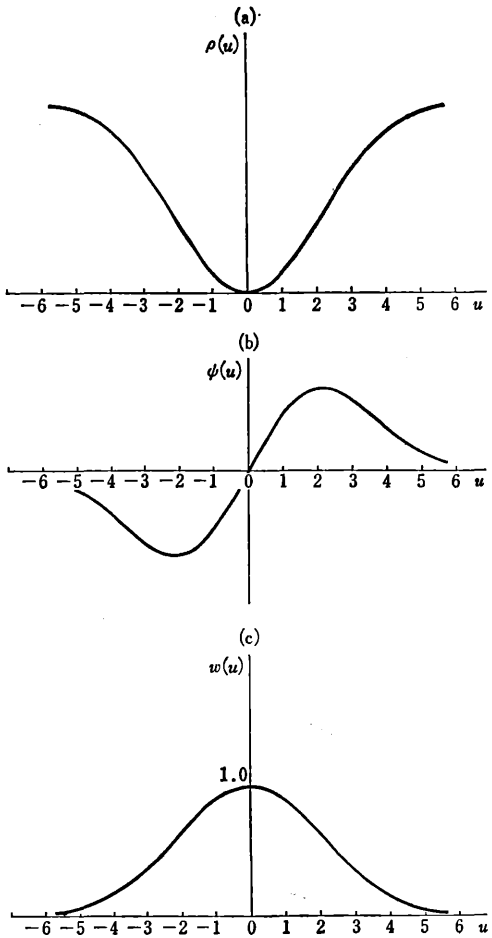
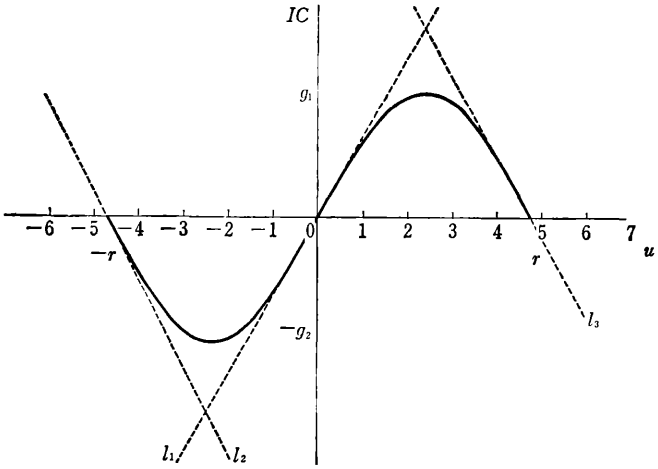


図22　Andrews の影響関数



注：(1)　g. e. s.＝max (g_1, g_2)，l. s. s.＝max$(|l_1|, |l_2|, |l_3|)$，排除点＝r

(2)　Goodall〔11〕図11-5 の Tukey の biweight を Andrews のψに変更。

表 8　調整定数の値

ψ 関 教	H	A	B	C	F	L	T	W
調整定数	1.345	1.339	4.685	2.385	1.400	1.205	2.795	2.985

さらに(70)式は

$$\sum_{i=1}^{n} w_i\left(\frac{Y_i-\mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)\mathbf{x}'_i=0 \tag{71}$$

の解，すなわち加重最小2乗推定量として求めることができるということも9節で示した。ここで $\hat{\boldsymbol{\beta}}_M$ を $\boldsymbol{\beta}$ のM推定量とすれば

$$w_i=\frac{\psi(e_i^*)}{e_i^*} \tag{72}$$

$$e_i^*=\frac{e_i}{\sigma}=\frac{Y_i-\mathbf{x}_i\hat{\boldsymbol{\beta}}_M}{\sigma} \tag{73}$$

である。

行列を用いて表せば，$\boldsymbol{\beta}$ のM推定量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_M$ は

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_M=(\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{y} \tag{74}$$

として求めることができる。ここで

$$\mathbf{y}=\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix},\quad \mathbf{X}=\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix} w_1 & & & 0 \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & w_n \end{bmatrix}$$

であり，Wの対角要素 w_i は(72)式で与えられる。

ところが(74)式から $\hat{\boldsymbol{\beta}}_M$ を求めるためには w_i を知る必要があり，w_i を(72)式から計算するためには $\hat{\boldsymbol{\beta}}_M$ がわかっていなければならない。もちろんこれは不可能である。そこでM推定量を求めるために，くりかえし再加重最小2乗法 Iterative Reweighted Least Squares (以下 IRLS と略す) が用いられる。[1]

(74)式は次のように書くことができる。

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_M=(\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{W}\,[\hat{\mathbf{y}}+(\mathbf{y}-\hat{\mathbf{y}})]=\hat{\boldsymbol{\beta}}_M+(\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{e} \tag{75}$$

ここで

$$\hat{\mathbf{y}}=\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_M$$

$$\mathbf{e}=\mathbf{y}-\hat{\mathbf{y}}$$

上式をくりかえし型で表せば

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_M^{(m+1)}=\hat{\boldsymbol{\beta}}_M^{(m)}+[\mathbf{X}'\mathbf{W}^{(m)}\mathbf{X}]^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{W}^{(m)}\mathbf{e}^{(m)} \tag{76}$$

と書くことができる。ここで $\mathbf{W}^{(m)}$ の対角要素 $w_i^{(m)}$ は

$$w_i^{(m)}=\frac{\psi(e_i^{*(m)})}{e_i^{*(m)}} \tag{77}$$

$$e_i^{*(m)}=\frac{Y_i-\mathbf{x}_i\hat{\boldsymbol{\beta}}_M^{(m)}}{\sigma} \tag{78}$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

によって与えられる。

$\hat{\boldsymbol{\beta}}_M$ の初期値 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_M^{(0)}$ と σ が与えられれば，(78)式と(77)式から $\mathbf{e}^{(0)}$ と $\mathbf{W}^{(0)}$ が計算され，(76)式から $\hat{\boldsymbol{\beta}}_M^{(1)}$ を求めることができる。$\hat{\boldsymbol{\beta}}_M$ が収束するまでこのくりかえし計算を行えばよい。

14 IRLS を用いるときの注意

前節でM推定量を IRLS を用いて計算することができるということを示したが，実際に IRLS を適用するにあたっては次のことをまず決定しなければならない。

(1) $\hat{\boldsymbol{\beta}}_M$ の初期値 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_M^{(0)}$ をいかにして与えるか

注 (1) Beaton and Tukey [3], Dutter [9], Holland [23], Huber [26], Green [13]。

(2) 誤差項の標準偏差 σ の推定値をどのようにして求めるか

(3) ψ 関数と調整定数の決定

(1) 初期値 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_M^{(0)}$

くりかえし法において初期値の決定は重要な問題である。初期値が悪ければ $\rho(u)$ の最小値ではなく極小値に収束するかも知れないし，収束回数が多くなるにちがいない。あるいは発散してしまうということさえあり得る。

頑健推定を行おうとしているのであるから，初期値 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_M^{(0)}$ にも何らかの頑健推定値が利用できると良いであろう。1つの方法は最小絶対残差法 Least Absolute Residuals（以下 LAR と略す）を用いて $\boldsymbol{\beta}$ の推定値を求め，この LAR 推定値を $\hat{\boldsymbol{\beta}}_M^{(0)}$ とする方法である（Harvey〔18〕）。

第2にメジアンによる回帰の方法によって $\hat{\boldsymbol{\beta}}_M^{(0)}$ を求める方法がある（Andrews〔2〕）。しかしこの LAR あるいはメジアンによる方法はいずれも膨大な計算を必要とし，実際的な方法ではない。第3の方法として，OLS 推定値を初期値に用いて，たとえば Huber の ψ のように単調 ψ 関数による M推定値を求め，次にこの M 推定値を初期値にして，Tukey の biweight のように下降し始めて再び0に戻る ψ 関数 redescending ψ を用いて M 推定値を求めるという方法がある（Li〔30〕）。この第3の方法は後に実際例を示す。

初期値 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_M^{(0)}$ に頑健推定値を用いようとするとき，そのために余りにも膨大な計算を必要とするのであれば，この方法は実際的でない。しかしそれだけではなくて，われわれの関心は OLS 推定値が頑健推定によってどのように変化するかを知りたい。とすれば，OLS の ψ と同じように単調な ψ 関数をもつ H, F, L, T の ψ を適用する場合にはとくに OLS 推定値を初期値とすることは何ら問題がないであろう。またA，Bのように下降し始めて再び0に戻る ψ 関数の場合には損失関数 ρ が複数の極小値をもつことになるが，OLS による初期値から複数解が得られるというような，とくに困難な問題が発生するとは思われない。そこで以下の IRLS による M 推定値の計算にあたっては初期値 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_M^{(0)}$ には OLS 推定値を用いることにする。

(2) σ の推定

誤差項の標準偏差 σ は未知パラメータであるという意味においては $\boldsymbol{\beta}$ と同じであるが，通常，計量経済学者が関心あるのは $\boldsymbol{\beta}$ であって σ ではない。$\boldsymbol{\beta}$ を推定しようとするとき σ はやっかいなパラメータ nuisance parameter である。やっかいなパラメータとはいえ σ を OLS の残差 e_i を用いて

$$s=\left(\frac{\sum e^2}{n-k}\right)^{\frac{1}{2}}$$

によって推定することは賢明ではない。なぜならば，

$$T_n=s^2=\frac{\sum e^2}{n-k}$$

とすれば

$$T(F)=\sigma^2$$

であり，(11)式に示されているように s^2 の無限標本における影響関数は

$$IC(z;\ F,\ T)=(z-\mu)^2-\sigma^2$$

であるから，s^2 は z から限界のない大きな影響を受ける推定量である。したがって s 自身が外れ値から大きな影響を受けるから，この s を σ の推定値として用い，残差を標準化することは好ましくない。

$\boldsymbol{\beta}$ と σ の M 推定量を同時決定で求める方法もある（Huber〔26〕）が，ここでは以下の方法で σ の頑健推定値を求めることにしよう。

σ の頑健推定の1つは標本メジアンからの平均絶対偏差 mean absolute deviation from the sample median（以下 AD と略す）であり，次式で定義される。

$$AD=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|e_i-M| \tag{79}$$

$$M=\underset{j}{\mathrm{median}}\,(e_j)$$

2番目の推定量は標本メジアンからの絶対偏差のメジアン median absolute deviation from the sample median（以下 MAD と略す）であり，

$$MAD=\underset{i}{\mathrm{median}}\,|e_i-M| \tag{80}$$

$$M=\underset{j}{\mathrm{median}}\,(e_j)$$

で与えられる。

3番目の σ の推定量の候補は四分位数間範囲 inter-quartile range あるいは4次間隔 fourth spread（F-spread）といわれる

$$d=Q_3-Q_1 \tag{81}$$

$$Q_j=\text{第 } j \text{ 四分位数}$$

がある。

これらの推定量はいずれも外れ値に対して無防備ではない。この3つの推定量のなかでシミュレーション結果は MAD を用いる M 推定量の優位を示しており（Andrews et al.〔1〕p. 239), Holland〔23〕, Hampel et al.〔16, p. 105, p. 237〕も MAD を位置パラメータの M 推定量を求めるときの σ の推定値として推奨している。もし誤差項の分布が正規分布ならば

$$E(MAD)\approx 0.6745\,\sigma$$

であるから，$\boldsymbol{\beta}$ の M 推定量を IRLS によって求めるとき，σ の推定値には MAD を規準化した

$$\hat{\sigma}=\frac{MAD}{0.6745}=\frac{\underset{i}{\mathrm{median}}\,|e_i-M|}{0.6745} \tag{82}$$

$$M=\underset{j}{\mathrm{median}}\,(e_j)$$

が用いられ，くりかえし過程において固定される。0.6745 は $\Phi^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$，すなわち標準正規分布の右片側25%点でもある。私が採用した方法は，$\boldsymbol{\beta}$ の OLS 推定値 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ を初期値 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_M^{(0)}$ として $\hat{\boldsymbol{\beta}}_M^{(1)}$ を求め，$\mathbf{e}^{(1)}=\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_M^{(1)}$ によって残差を求め，この残差から (82) 式によって $\hat{\sigma}$ を計算し，この $\hat{\sigma}$ をくりかえし過程において固定した。くりかえし過程において $\hat{\sigma}$ を固定したのは，$\hat{\sigma}$ がくりかえし過程において固定されている場合には IRLS の収束が保証されるからである (Huber〔26〕, p. 184)。

$\boldsymbol{\beta}$ の推定値を求めるとき σ の推定に直接関心はない。しかし，この σ の推定値 $\hat{\sigma}$ によって残差が

$$e_i^*=\frac{e_i}{\hat{\sigma}}$$

と規準化され，この e_i^* にもとづいて ψ 関数と調整定数によってウェイトが決まるから，σ をいかなる方法で推定するか，くりかえし過程において $\hat{\sigma}$ を固定するかどうかは M 推定値を大きく変える可能性がある。

(3) ψ 関数と調整定数

M推定量は

$$\sum_{i=1}^{n}\psi(e_i^*)\mathbf{x}'_i=0$$

の解であるから，Huber 推定値は

$$\sum_{|e_i^*|\leq H}e_i^*\,\mathbf{x}'_i+\sum_{|e_i^*|>H}H\,\mathrm{sgn}\,(e_i^*)\,\mathbf{x}'_i=0 \tag{83}$$

の解である。Huber の ψ 関数は単調関数であり，したがって ρ 関数は凸であり，損失関数 ρ は1つの最小値をもつ。ところが，A，B のように再び下降し始めて再び 0 に戻る ψ 関数，たとえば Tukey の biweight による M 推定値は

$$\sum_{|e_i^*|\leq B}e_i^*\left[1-\left(\frac{e_i^*}{B}\right)^2\right]^2\mathbf{x}'_i=0 \tag{84}$$

の解であるから複数個の解をもち，したがって本節 (1) で述べたように，初期値 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_M^{(0)}$ の選択が収束解に大きな影響を与える可能性がある。いくつかの ψ 関数のなかでどれを選ぶべきかは分析者の判断に委ねられているが，ψ 関数が単調か，そうでないか，排除点 rejection point をもっているかどうかを考慮することは重要である。ψ が単調であれば $\boldsymbol{\beta}$ の OLS 推定値を初期値としても収束解が極小値の心配はない。ψ 関数がA，B，Tのように排除点をもてば，その点を絶対値でこえる e_i^* に対してはウエイトが 0 となるから，このような ψ 関数を用いれば余りにも大きな残差に対する抵抗力は強くなる。しかしこのウエイトを 0 とするほどの大きな残差は，正しく定式化されたモデルの誤差項の分布が正規分布ではなく，両すその厚い（長い尾をもつ）分布にしたがっているがゆ

えに生じた「外れ値」とみなすことがいつでもできるとは限らない。計量経済モデルにおける余りにも大きな残差は，誤差項の分布の問題というよりはむしろモデルの定式化が不適切であり，重要な系統的要因が欠如していることによって，あるいは突発的なショックあるいは制度変更などが考慮されていないことによって生じたという可能性も大きい。大きな残差は後者のこの定式化の問題であるならば，ウエイトを0にするϕを用いれば不適切な定式化をかえって隠蔽することになるのではないか，という問題が生ずる。

いいかえれば，計量経済モデルにおいて，純粋に誤差項の確率変動によって（純粋にということは，Yを説明する系統的要因以外の，偶然変動のみによってYの確率変動が生ずる），長い尾をもつ分布からの「外れ値」とみなさざるを得ない誤差のみが大きな残差として現れるということは恐らくまれなことであり，余りにも大きな残差は定式化の不適切さを示唆していることが多い。したがって，その残差のパラメータ推定値への影響を0にしない方がモデルのチェックになるという意味である。

経済理論と整合的であり，したがって ad hoc な説明変数は含まれておらず，説明力も高い，しかし誤差項の分布は正規分布より長い尾をもつ分布らしいと判断されるときにのみ頑健推定の意義がある。

しかし完全なモデルなどというものはない。パラメータの符号条件，大きさは理論と整合的であっても，理論は関数形やラグ構造や説明変数の変換（逆数，差分，変化率，対数あるいは Box-Cox 変換等々）まで特定化しないから，実証分析者の裁量の余地は大きい。したがって残差の大きさなど定式化が変われば，ラグ構造が変われば，説明変数の変換に工夫をこらせばどうにかなる，頑健推定など無意味ではないか，いう考えがこれまで実証分析家を支配していたといってよいであろう。

このような考え方は正しいであろうか。自ら構築したモデルの誤差項の分布が正規分布より長い尾をもつ分布ではないかと判断されるとき，なぜそのような状況に適切な統計的方法を用いないのか。定式化を変えても，いつでも誤差項の分布は正規分布という仮定こそ奇妙なことではなかろうか。「外れ値」のウエイトを小さくしてパラメータ推定値への「外れ値」の影響を小さくする頑健推定を行っても尚，残差が大きいままであるならば，その時こそモデルの不適切さを示す証拠として頑健推定の結果は使えるであろう。

議論を整理しよう。頑健推定を行おうとするのは，頑健推定量が次の性質をもつからである。

(1)誤差項の真の分布が正規分布であるとき，もっとも望ましい特性をもつ最小2乗推定量にくらべて有効性の損失はわずかである。

(2)誤差項の分布が正規分布より長い尾をもつ分布の場合には，「外れ値」が発生しやすい。そしてこの「外れ値」から限界のない大きな影響を受ける最小2乗推定量よりも，M推定量は「外れ値」に対して頑健であり，推定量の有効性は最小2乗推定量より高い。

しかし OLS の大きな残差はモデルが不適切であることを示している可能性もあるから，大きな残差を与える期のウェイトを0にするϕ関数を使用する場合には慎重を期すべきであり，簡単にウェイトを0にすべきではない。

ψ関数と調整定数の決定は上述の有効性，「外れ値」に対する感度に関連している。

さて話をψ関数の調整定数へ進めよう。ψ関数を固定しても調整定数の値をいくつに設定するかによって，M推定量の有効性，g.e.s., l.s.s. が変化する。調整定数の値を大きくすれば誤差項の真の分布が正規分布であるときのM推定量の漸近的有効性は大きくなるが，g.e.s. も大きくなり，外れ値に対する感度は鈍る（11節参照)。調整定数の値は，誤差項のある特定の分布（通常は正規分布）のもとで，M推定量の漸近的有効性が90%あるいは95%ぐらいになる値が選ばれる。以下のM推定の実際例では表8の調整定数を用いることにする。

15 IRLS によるM推定値の計算方法

M推定量は IRLS によって求めることができることはすでに述べた。(76)式は

$$\mathbf{e}^{(m)}=\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_M^{(m)} \tag{85}$$

に注意すれば

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_M^{(m+1)}=[\mathbf{X}'\mathbf{W}^{(m)}\mathbf{X}]^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{W}^{(m)}\mathbf{y} \tag{86}$$

と表すことができる。さらに

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix} w_1 & & & 0 \\ & w_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & w_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} w_1^{\frac{1}{2}} & & & 0 \\ & w_2^{\frac{1}{2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & w_n^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1^{\frac{1}{2}} & & & 0 \\ & w_2^{\frac{1}{2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & w_n^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}=\mathbf{W}^{\frac{1}{2}}\mathbf{W}^{\frac{1}{2}}$$

と分解することができるから

$$\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X}=\mathbf{X}'\mathbf{W}^{\frac{1}{2}}\mathbf{W}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}=(\mathbf{W}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X})'\mathbf{W}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}$$
$$\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{y}=\mathbf{X}'\mathbf{W}^{\frac{1}{2}}\mathbf{W}^{\frac{1}{2}}\mathbf{y}=(\mathbf{W}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X})'\mathbf{W}^{\frac{1}{2}}\mathbf{y}$$

と表すことができる。したがって

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^*&=\mathbf{W}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X}=\{X_{ij}^*\}\\ \mathbf{y}^*&=\mathbf{W}^{\frac{1}{2}}\mathbf{y}=\{Y_i^*\}\end{aligned} \tag{87}$$

とすれば

$$X_{ij}^*=w_i^{\frac{1}{2}}X_{ij}, \qquad i=1,\cdots,n,\quad j=1,\cdots,k$$
$$Y_i^*=w_i^{\frac{1}{2}}Y_i, \qquad i=1,\cdots,n$$

であるから，加重最小2乗推定量は，w_i を用いて X_{ij}^*, Y_i^* を作れば

$$(\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{X}^*)^{-1}\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{y}^* \tag{88}$$

として求めることができる。

以上の点に注目し，13，14節で述べたことと併せてM推定値の計算方法を示しておこう。

ステップ1

OLS によって $\hat{\beta}_j$, $j=1, \cdots, k$, e_i^0, $i=1, \cdots, n$ を求める。そしてこの残差 e_i^0 を用いて

$$\hat{\sigma}_0=\frac{\underset{i}{\text{median}}\,|e_i^0-M_0|}{0.6745} \tag{89}$$

$$M_0=\underset{j}{\text{median}}\,(e_j^0)$$

$$e_i^*=\frac{e_i^0}{\hat{\sigma}_0}, \qquad i=1, \cdots, n \tag{90}$$

を求める。

$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ のノルム $\|\hat{\boldsymbol{\beta}}\|=\left(\sum_{j=1}^{k}\hat{\beta}_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ を N_0 とする。$ITR=0$ とおく。

ステップ2

$$w_i=\frac{\psi(\epsilon_i^*)}{e_i^*}, \qquad i=1, \cdots, n \tag{91}$$

$$\mathbf{W}^{\frac{1}{2}}=\begin{bmatrix} w_1^{\frac{1}{2}} & & & 0 \\ & w_2^{\frac{1}{2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & w_n^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

を用いて

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^*&=\mathbf{W}^{\frac{1}{2}}\mathbf{X} \\ \mathbf{y}^*&=\mathbf{W}^{\frac{1}{2}}\mathbf{y} \end{aligned} \tag{92}$$

を計算し

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_M=(\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{X}^*)^{-1}\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{y}^* \tag{93}$$

を求める。

$$e_i=Y_i-\mathbf{x}_i\hat{\boldsymbol{\beta}}_M \qquad i=1, \cdots, n$$

を計算する。$ITR=0$ のときのみ次の $\hat{\sigma}$ を求め，$ITR\geq 1$ のときは e_i^* の計算へ飛ぶ。

$$\hat{\sigma}=\frac{\underset{i}{\text{median}}\,|e_i-M|}{0.6745} \tag{94}$$

$$M=\underset{j}{\text{median}}\,(e_j)$$

$$e_i^*=\frac{e_i}{\hat{\sigma}}, \qquad i=1, \cdots, n \tag{95}$$

$\hat{\boldsymbol{\beta}}_M$ のノルムを次式で求める。

$$N_M = \| \hat{\boldsymbol{\beta}}_M \| = \left(\sum_{j=1}^{k} \hat{\beta}_{Mj}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ステップ3

$$\left| \frac{N_M - N_0}{N_0} \right| \leq \delta, \quad \delta = 0.001$$

を満たすかどうかチェックする。

NO $\Longrightarrow$ $ITR \leftarrow ITR+1$, $N_0 \leftarrow N_M$ とし，ステップ2へ

YES $\Longrightarrow$ $\hat{\boldsymbol{\beta}}_M$ を採用

16 頑健推定の実際(1)——Huber のψ

OLS

Huber のψを用いる M 推定値の例をあげよう。設定したモデルは日本の賃金率関数

$$WDOT2 = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{RU2} \right) + \beta_2 \, CPIDOT2 + u \tag{96}$$

表 9 賃金率関数のデータ

	RU 2 (%)	CPIDOT 2 (%)	WDOT 2 (%)
1965	+1.2900000D+00	+6.4700000D+00	+1.0620669D+01
1966	+1.3000000D+00	+4.5600000D+00	+1.1061940D+01
1967	+1.2200000D+00	+4.3600000D+00	+1.3085118D+01
1968	+1.1200000D+00	+4.7400000D+00	+1.3318160D+01
1969	+1.1100000D+00	+6.3800000D+00	+1.6384806D+01
1970	+1.1800000D+00	+7.5000000D+00	+1.7020774D+01
1971	+1.3100000D+00	+5.8100000D+00	+1.3691900D+01
1972	+1.3400000D+00	+5.7100000D+00	+1.5373316D+01
1973	+1.2700000D+00	+1.5590000D+01	+2.1626076D+01
1974	+1.5100000D+00	+2.0680000D+01	+2.7175516D+01
1975	+1.9500000D+00	+1.0430000D+01	+1.2733039D+01
1976	+1.9700000D+00	+9.5800000D+00	+1.0773495D+01
1977	+2.0700000D+00	+6.7700000D+00	+9.9240842D+00
1978	+2.2000000D+00	+3.8100000D+00	+6.3601807D+00
1979	+2.0300000D+00	+4.8900000D+00	+5.9052366D+00
1980	+2.0800000D+00	+7.6300000D+00	+5.9696431D+00
1981	+2.2200000D+00	+3.9500000D+00	+6.2449259D+00
1982	+2.4600000D+00	+2.6000000D+00	+3.8389011D+00
1983	+2.6600000D+00	+1.9000000D+00	+2.3743001D+00
1984	+2.6700000D+00	+2.1800000D+00	+3.8235201D+00
1985	+2.6400000D+00	+1.9300000D+00	+4.0003875D+00
1986	+2.8400000D+00	+0.0000000D+00	+3.0096509D+00
1987	+2.8600000D+00	+4.9800000D−01	+2.6181575D+00

注：$WDOT2 = \dot{w} = \left(\frac{w - w_{-1}}{w_{-1}} \right) \times 100$, $w = \frac{\text{雇用者所得}}{\text{雇用者数}}$

表10　賃金率関数の観測値，推定値，残差

	観測値	推定値	残差	誤差率(%)
1	+1.0620669D+01	+1.3786903D+01	−3.1662344D+00	−29.81
2	+1.1061940D+01	+1.1967375D+01	−9.0543495D−01	−8.19
3	+1.3085118D+01	+1.2620347D+01	+4.6477009D−01	3.55
4	+1.3318160D+01	+1.4171614D+01	−8.5345347D−01	−6.41
5	+1.6384806D+01	+1.5782224D+01	+6.0258183D−01	3.68
6	+1.7020774D+01	+1.5908645D+01	+1.1121291D+00	6.53
7	+1.3961900D+01	+1.2996712D+01	+9.6518808D−01	6.91
8	+1.5373316D+01	+1.2624313D+01	+2.7490031D+00	17.88
9	+2.1626076D+01	+2.2206251D+01	−5.8017464D−01	−2.68
10	+2.7175516D+01	+2.4725452D+01	+2.4500634D+00	9.02
11	+1.2733039D+01	+1.3021262D+01	−2.8822234D−01	−2.26
12	+1.0773495D+01	+1.2169360D+01	−1.3958648D+00	−12.96
13	+9.9240842D+00	+9.2323125D+00	+6.9177171D−01	6.97
14	+6.3601807D+00	+6.0936386D+00	+2.6654211D−01	4.19
15	+5.9052366D+00	+7.6955474D+00	−1.7903108D+00	−30.32
16	+5.9696431D+00	+9.9688635D+00	−3.9992204D+00	−66.99
17	+6.2449259D+00	+6.1521467D+00	+9.2779243D−02	1.49
18	+3.8389011D+00	+4.2098090D+00	−3.7090791D−01	−9.66
19	+2.3743001D+00	+3.0742079D+00	−6.9990777D−01	−29.48
20	+3.8235201D+00	+3.3032483D+00	+5.2027182D−01	13.61
21	+4.0003875D+00	+3.1482833D+00	+8.5210420D−01	21.30
22	+3.0096509D+00	+9.6861217D−01	+2.0410387D+00	67.82
23	+2.6181575D+00	+1.3766694D+00	+1.2414881D+00	47.42

表11　順序化された残差，スチューデント化残差，ランキッツ

	残差	スチューデント化残差 $r(i)$	スチューデント化残差 $t(i)$	RANKITS
1	−3.9992	−2.4567	−2.8656	−1.9292
2	−3.1662	−1.9584	−2.1233	−1.4816
3	−1.7903	−1.0877	−1.0930	−1.2143
4	−1.3959	−0.8684	−0.8629	−1.0135
5	−0.9054	−0.5656	−0.5557	−0.8469
6	−0.8535	−0.5619	−0.5520	−0.7010
7	−0.6999	−0.4377	−0.4287	−0.5688
8	−0.5802	−0.3914	−0.3830	−0.4458
9	−0.3709	−0.2297	−0.2241	−0.3294
10	−0.2882	−0.1811	−0.1767	−0.2173
11	0.0928	0.0568	0.0553	−0.1079
12	0.2665	0.1630	0.1590	−0.0000
13	0.4648	0.2964	0.2896	0.1079
14	0.5203	0.3250	0.3176	0.2173
15	0.6026	0.3918	0.3834	0.3294
16	0.6918	0.4226	0.4137	0.4458
17	0.8521	0.5325	0.5227	0.5688
18	0.9652	0.5968	0.5869	0.7010
19	1.1121	0.7019	0.6927	0.8469
20	1.2415	0.7892	0.7815	1.0135
21	2.0410	1.3031	1.3277	1.2143
22	2.4501	1.6929	1.7827	1.4816
23	2.7490	2.1063	2.3273	1.9292

である。OLS の推定結果と変数記号は1節に示してある。誤差項 u は通常の古典的線形回帰モデルの諸仮定を満たしているものとする。推定に用いたデータは表9に示されている。変数記号の最後の2は年度を示すための識別記号である。

この表9のデータを用いて OLS によって推定した結果は次の通りである。推定期間は1965年度から1987年度までの23年間である。

$$WDOT2=\underset{(-4.228)}{-4.8475}+\underset{(8.184)}{16.518}\left(\frac{1}{RU2}\right)+\underset{(10.759)}{0.90106}\,CPIDOT2$$

$$\bar{R}^2=0.932,\ s=1.69\ (\%),\ DW=1.355 \tag{97}$$

$$VIF(\hat{\beta}_1)=VIF(\hat{\beta}_2)=1.195$$

上式（　）内の値は $\beta_j=0$ の帰無仮説検定のための t 値である。

この推定結果より得られる $WDOT2$ の推定値，残差 e_i，誤差率＝(e_i/$WDOT2$ の観測値)×100 は表10に示した。この OLS 残差 e_i から計算される σ の MAD による推定値（ステップ1の(89)式）は

$$\hat{\sigma}_0=\frac{MAD}{0.6745}=1.2553$$

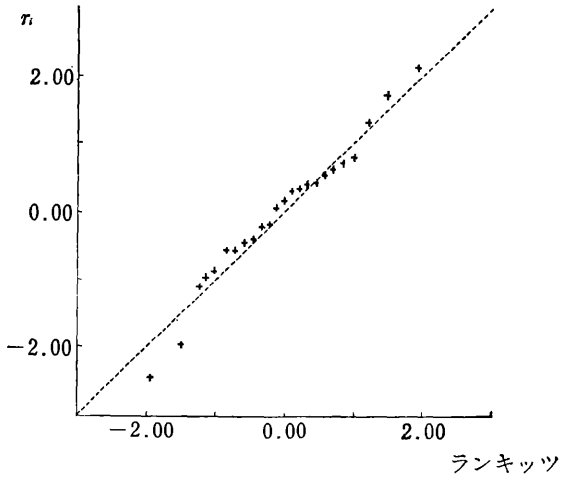
である。$s=1.69$ であるから，MAD で推定すると s よりも小さい値が σ の推定値として得られた。

この OLS の残差 e_i から

表12　残差，規準化残差，ウエイト

	残　　差	規準化残差	ウエイト
1	−3.1662344D+00	−2.5222426D+00	+5.3325561D−01
2	−9.0543495D−01	−7.2127528D−01	+1.0000000D+00
3	+4.6477009D−01	+3.7023883D−01	+1.0000000D+00
4	−8.5345347D−01	−6.7986650D−01	+1.0000000D+00
5	+6.0258183D−01	+4.8002055D−01	+1.0000000D+00
6	+1.1121291D+00	+8.8592915D−01	+1.0000000D+00
7	+9.6518808D−01	+7.6887500D−01	+1.0000000D+00
8	+2.7490031D+00	+2.1898735D+00	+6.1419076D−01
9	−5.8017464D−01	−4.6217083D−01	+1.0000000D+00
10	+2.4500634D+00	+1.9517362D+00	+6.8913003D−01
11	−2.8822234D−01	−2.2959976D−01	+1.0000000D+00
12	−1.3958648D+00	−1.1119548D+00	+1.0000000D+00
13	+6.9177171D−01	+5.5106977D−01	+1.0000000D+00
14	+2.6654211D−01	+2.1232915D−01	+1.0000000D+00
15	−1.7903108D+00	−1.4261730D+00	+9.4308336D−01
16	−3.9992204D+00	−3.1858046D+00	+4.2218536D−01
17	+9.2779243D−02	+7.3908539D−02	+1.0000000D+00
18	−3.7090791D−01	−2.9546762D−01	+1.0000000D+00
19	−6.9990777D−01	−5.5755102D−01	+1.0000000D+00
20	+5.2027182D−01	+4.1445186D−01	+1.0000000D+00
21	+8.5210420D−01	+6.7879167D−01	+1.0000000D+00
22	+2.0410387D+00	+1.6259045D+00	+8.2723188D−01
23	+1.2414881D+00	+9.8897735D−01	+1.0000000D+00

図22　スチューデント化残差　$r(i)$（縦軸）と RANKITS（横軸）



$$\text{スチューデント化残差}\ r_i=\frac{e_i}{s(1-h_{ii})^{\frac{1}{2}}},\qquad i=1,\ \cdots,\ n \tag{98}$$

$$\text{スチューデント化残差}\ t_i=\frac{e_i}{s(i)(1-h_{ii})^{\frac{1}{2}}},\qquad i=1,\ \cdots,\ n \tag{99}$$

を求め，残差 e_i とともに順序化したのが表11である。ここで

h_{ii}＝ハット行列 $\mathbf{H}=\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ の $(i,\ i)$ 要素

$s(i)=i$ 期の観測値を除いてパラメータ推定をしたときの残差から計算される σ の推定値。

また表11には標準正規分布の変位値 quantile もランキッツの名称で示した。この順序化された r_i とランキッツは図1で示したが，もう一度図22に掲げた。1節で述べたように，この正規確率プロットは明らかに，誤差項の分布は正規分布より長い尾をもつ分布に従っていることを示唆している。

それゆえ次に Huber の ψ 関数による頑健推定を行うことにしよう。調整定数 H は表8の1.345とする。$\hat{\sigma}_0=1.2553$ によって残差を

$$e_i^*=\frac{e_i}{\hat{\sigma}_0}$$

と規準化し，Huber の ψ によってウエイト

$$w_i=\frac{\psi(e_i^*)}{e_i^*}=\begin{cases}1 & |e_i^*|\leq 1.345\\ \dfrac{1.345}{e_i^*} & |e_i^*|>1.345\end{cases}$$

を計算したのが表12である。ウェイトダウンは 1，8，10，15，16，22 の6期で生じている。最大のウエイトダウンは規準化残差 e_i^* の値が −3.1858 と一番大きい16期（1980年度）であり，ウエイトは0.422まで小さくなっている。15期（1979年度）のウェイトも小さくなっているが0.943とその

表13　回帰診断

	残　差	PRESS 残差	スチューデント化残差 $r(i)$	スチューデント化残差 $t(i)$	Cook's D
1	−3.1662	−3.4729	−1.9584	−2.1233	0.1238
2	−0.9054	−1.0129	−0.5656	−0.5557	0.0127
3	0.4648	0.5420	0.2964	0.2896	0.0049
4	−0.8535	−1.0605	−0.5619	−0.5520	0.0255
5	0.6026	0.7304	0.3918	0.3834	0.0109
6	1.1121	1.2701	0.7019	0.6927	0.0233
7	0.9652	1.0578	0.5968	0.5869	0.0114
8	2.7490	2.9888	1.6929	1.7827	0.0834
9	−0.5802	−0.7572	−0.3914	−0.3830	0.0156
10	2.4501	5.1914	2.1063	2.3273	1.6547
11	−0.2882	−0.3262	−0.1811	−0.1767	0.0014
12	−1.3959	−1.5489	−0.8684	−0.8629	0.0276
13	0.6918	0.7401	0.4226	0.4137	0.0042
14	0.2665	0.2858	0.1630	0.1590	0.0006
15	−1.7903	−1.8944	−1.0877	−1.0930	0.0229
16	−3.9992	−4.3266	−2.4567	−2.8656	0.1647
17	0.0928	0.0995	0.0568	0.0553	0.0001
18	−0.3709	−0.4076	−0.2297	−0.2241	0.0017
19	−0.6999	−0.7848	−0.4377	−0.4287	0.0077
20	0.5203	0.5821	0.3250	0.3176	0.0042
21	0.8521	0.9539	0.5325	0.5227	0.0113
22	2.0410	2.3851	1.3031	1.3277	0.0954
23	1.2415	1.4384	0.7892	0.7815	0.0329

表14　回帰診断（つづき）

	規準化残差平方 a_i^2	$W(i)$	DFFITS	COVRATIO	$h(i,i)$
1	0.1748	3.2458	−0.6607	0.6754	0.0883
2	0.0143	0.9499	−0.1915	1.2432	0.1061
3	0.0038	0.5978	0.1180	1.3423	0.1425
4	0.0127	1.4217	−0.2719	1.3818	0.1953
5	0.0063	0.9118	0.1766	1.3815	0.1750
6	0.0216	1.3087	0.2611	1.2360	0.1244
7	0.0162	0.8925	0.1818	1.2111	0.0875
8	0.1318	2.5754	0.5266	0.7973	0.0802
9	0.0059	1.1335	−0.2115	1.4874	0.2337
10	0.1047	16.8080	2.4618	1.1645	0.5281
11	0.0014	0.3202	−0.0642	1.3137	0.1165
12	0.0340	1.4115	−0.2857	1.1533	0.0988
13	0.0083	0.5306	0.1094	1.2147	0.0653
14	0.0012	0.2075	0.0427	1.2456	0.0673
15	0.0559	1.2717	−0.2636	1.0279	0.0550
16	0.2789	3.9998	−0.8199	0.4295	0.0757
17	0.0002	0.0726	0.0149	1.2508	0.0680
18	0.0024	0.3468	−0.0705	1.2718	0.0901
19	0.0085	0.7416	−0.1493	1.2706	0.1082
20	0.0047	0.5433	0.1095	1.2844	0.1062
21	0.0127	0.8966	0.1807	1.2509	0.1067
22	0.0727	2.7638	0.5451	1.0444	0.1442
23	0.0269	1.5716	0.3113	1.2290	0.1369

注：$a_i^2 = e_i^2 \Big/ \sum_{i=1}^{n} e_i^2$　$W_{(i)} = |\mathrm{DFFITS}| \left(\frac{n-1}{1-h_{ii}}\right)^{\frac{1}{2}}$

図23　*WDOT*2 と 1/RU2

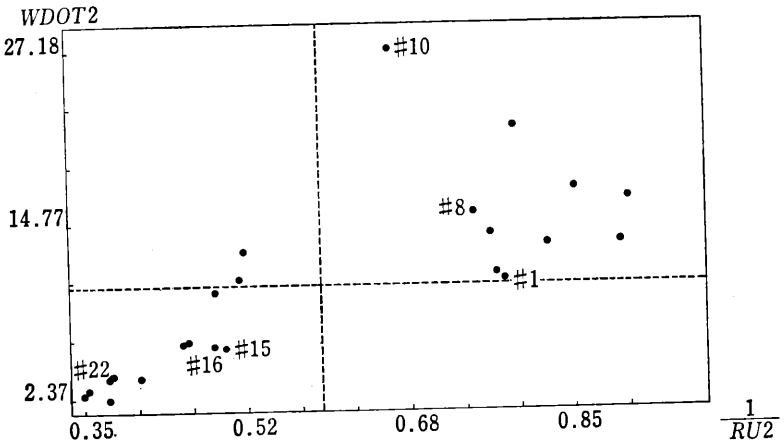


図24　*WDOT*2 と *CPIDOT*2

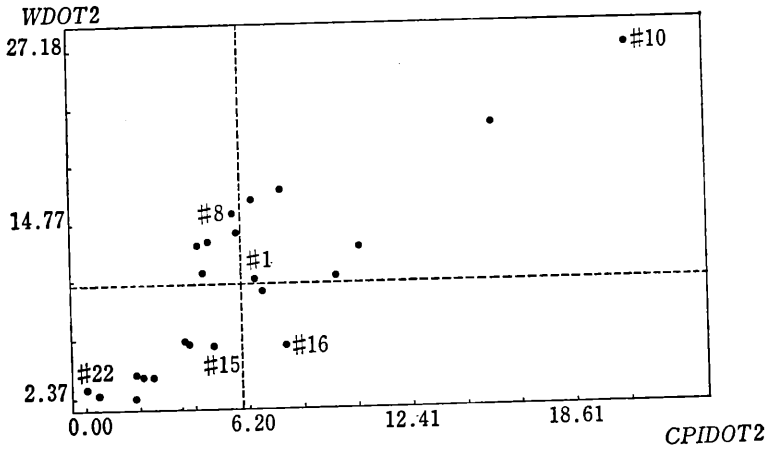
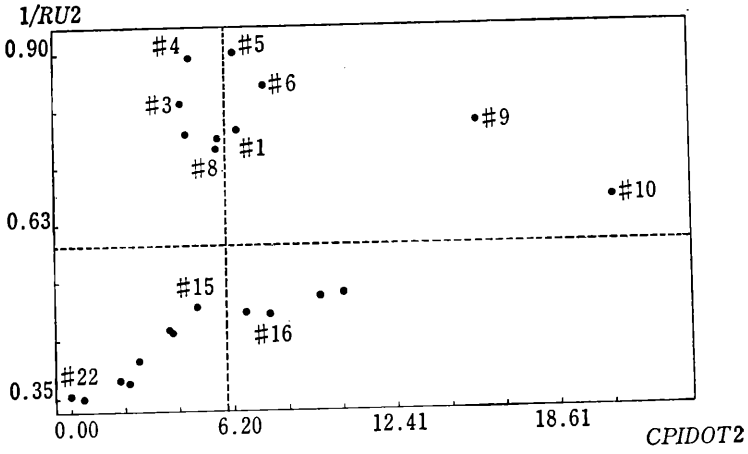


図25　1/RU2 と *CPIDOT*2



程度は小さい。

このウェイトダウンした6個の期に焦点を合せて回帰診断を行ってみよう。

回帰診断

被説明変数と説明変数および説明変数間の散布図を描いたのが図23, 図24, 図25である。散布図において集団から離れた特異な位置を占めているのは図23では#10（1974年度），図24では#10, #16（1980年度），図25では#10と#9であることがわかる。ところがウエイトダウンの大きい期は#16, #1, #8, #10の順であり，散布図では特異な位置にある#10のウエイトダウンの大きさは4番目であることに注意しよう。これは，$e_i/\hat{\sigma}$ の大きさにもとづくウエイトダウンは Y（被説明変数）方向の誤差のみを問題にしており，X（説明変数）方向の高い作用点 leverage point については何も考慮していないからである。高い作用点は大きい h_{ii} の値をもつ点であり，Y方向の大きな誤差は

$$a_i^2=\frac{e_i^2}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2} \tag{100}$$

の大きい値によって示すことができる。したがってL-Rプロット（Lは leverage の L，Rは residual のR，縦軸に h_{ii}，横軸に a_i^2）を描けば a_i^2 が大きいほどウエイトダウンが大きく，高い作用点はウエイトと関連していないことは明らかである（図26参照。図の中の点線は h_{ii} あるいは a_i^2 の平均を示す）。実際，ウエイトダウンする6期を，ウエイトダウンの大きい順に並べ，a_i^2 および h_{ii} の値を大きさの順に並べると表15が得られ，前述の結果を確認することができる。

表 15

ウエイト w_i	16	1	8	10	22	15
a_i^2	16	1	8	10	22	15
h_{ii}	10	9	4	5	22	3

このように

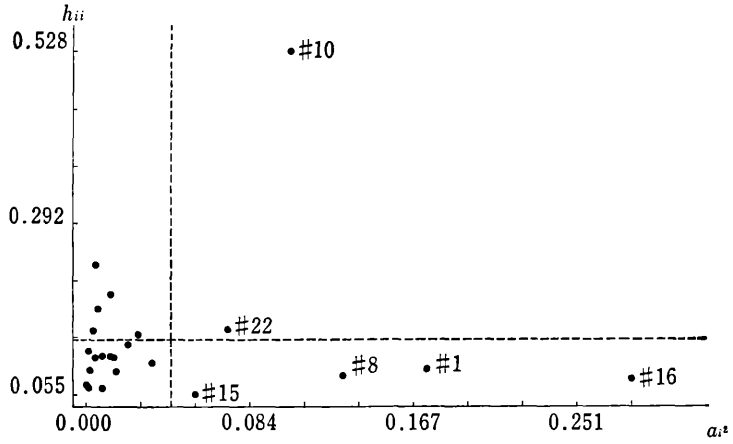
$$\sum \psi\left(\frac{e}{\hat{\sigma}}\right)\mathbf{x}_i=0$$

の解として得られるM推定量は，大きな残差のパラメータ推定値への影響を小さくするが，説明変数の高い作用点からの影響はパラメータ推定値，したがって残差を通じてのみ現れる。高い作用点は直接ウエイトをダウンさせない。もしきわめて高い作用点によってパラメータ推定値への影響が大きく現れる観測点であっても，残差が大きくなければ，これまでに説明してきたM推定量のウエイトはダウンしない。説明変数の高い作用点によってウエイトがダウンするM推定量は19節であつかう。

以上の点を考えれば，ウエイトダウンした6個の期に関する次の特徴は明らかであろう。

① 6個のウエイトダウンした観測点はすべて a_i^2 の平均を上回る点である（図26 L-Rプロット参照）。そして a_i^2 が大きいほどウエイトダウンは大きい。

図26　L-Rプロット



② h_{ii} の一番大きい，高い作用点である10期は Cook の D, DFFITS, $W(i)$ いずれの統計量も影響力が際立って大きい観測点であることを示しているが，ウエイトダウンの大きさは4番目である。

正規性の検定

線形回帰モデルの誤差項の正規性を検定する統計量のなかで，検定力の点から判断すると Shapiro-Wilk 検定がすぐれている（Shapiro and Wilk〔35〕，D'Agostino〔7〕，Green and Hegazy〔12〕，Pearson et al.〔32〕を参照せよ）。

Shapiro and Wilk の検定統計量 W は次式で与えられる。

$$W=\frac{\left\{\sum_{i=1}^{n} c_i Y_{(i)}\right\}^2}{\left\{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2\right\}} \tag{101}$$

ここで

Y_i は平均 μ，分散 σ^2 をもつ独立な確率変数

$Y_{(i)}$ は Y_i の順序化された変数

$Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq \cdots \leq Y_{(n)}$

$$\mathbf{c}'=(c_1 \cdots c_n)=\frac{\mathbf{m}'\mathbf{V}^{-1}}{(\mathbf{m}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{m})^{\frac{1}{2}}}$$

$\mathbf{m}'=(\mu_{(1)}\ \mu_{(2)}\ \cdots\ \mu_{(n)})$

$\mu_{(i)}=E[Z_{(i)}]$

$Z_{(i)}$ は $Z_i=\dfrac{Y_i-\mu}{\sigma}$ の順序化された変数

$\mathbf{V}=\{\sigma^2 v_{ij}\}$, $i, j=1, 2, \cdots, n$

$\sigma^2 v_{ij}=\mathrm{cov}\,[Y_{(i)}, Y_{(j)}]$

Shapiro and Wilk は，種々の非正規分布のもとで $E(W)$ をモンテカルロ実験によって求め，この非正規分布の $E(W)$ は正規分布のもとでの $E(W)$ より小さくなることから

$$W<w_0$$

のとき，正規分布であるという仮説を棄却すべきであると述べた。w_0 は有意点である。Royston〔33〕の方法によって賃金率関数の W の観測値 W^* と有意確率をスチューデント化残差 r_i を用いて求めると

$$W^*=0.9714$$

$$P(W<W^*)=0.7150$$

となる。この結果は，誤差項の分布が正規分布であるという仮説を棄却できないことを示している。しかしこの W による検定は，W の弱点——正の（3より大きい）尖度 kurtosis をもつ対称分布に対しては検定力が小さい——を示しているのかも知れない。実際，尖度の推定値は3.4157となり，3より大きい。W 統計量は非正規分布を支持する証拠を与えないが，図22の正規確率プロットは，誤差項が正規分布より長い尾をもつ分布にしたがっているのではないかということを示唆している。そこで賃金率関数における大きな残差は，正規分布よりも長い尾をもつ分布からの誤差であると考え，頑健推定を行ってみよう。

Huber の ψ による M 推定値

15節で述べた計算方法にしたがって，Huber の ψ による M 推定値を求めると以下のようになる。

OLS の $e_i/\hat{\sigma}_0$ と，Huber の $\psi(e_i/\hat{\sigma}_0)$ によって6個の期のウエイトダウンが生じたことはすでに述べた。この表12のウエイトを用いて加重回帰を行い（ステップ0），そのパラメータ推定値を用いて残差 $\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_M$ を求め，この残差から，MAD/0.6745によって σ の推定値を求めると

$$\hat{\sigma}=1.3416$$

が得られる。この $\hat{\sigma}$ の値が IRLS において固定される。収束過程のパラメータ推定値等々は表16に示されている。また収束結果のウェイトとそのウエイトを与えたステップ1の残差は表17に，収束結果のパラメータ推定値を用いて計算された残差と誤差率は表18に示されている。表18は加重回帰における残差 $Y_i^*-\mathbf{x}_i^*\hat{\boldsymbol{\beta}}_M$ ではなく，$Y_i-\mathbf{x}_i\hat{\boldsymbol{\beta}}_M$ であることに注意せよ。

表16　IRLS ステップごとの推定値

ステップ	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	R^2	$\sum\lvert e_i\rvert$	$\hat{\sigma}$	DW
OLS	−4.8475	16.518	0.90106	0.938	28.099	1.255	1.355
0	−4.6750	16.446	0.89260	0.987	27.733	1.342	1.344
1	−4.6408	16.413	0.89236	0.987	27.720	1.362	1.341
2	−4.6341	16.406	0.89239	0.987	27.718	1.366	1.341

注：IRLS の R^2 は $1-\sum e_i^{*2}/\sum Y_i^{*2}$ により計算。

表17　収束結果を与えたウエイトと残差

	残　　差	規準化残差	ウ エ イ ト
1	−3.2356579D+00	−2.4117783D+00	+5.5767978D−01
2	−9.9209837D−01	−7.3948528D−01	+1.0000000D+00
3	+3.8163985D−01	+2.8446479D−01	+1.0000000D+00
4	−9.2562703D−01	−6.8993920D−01	+10000000D+00
5	+5.4551682D−01	+4.0661457D−01	+1.0000000D+00
6	+1.0592209D+00	+7.8951671D−01	+10000000D+00
7	+8.8878553D−01	+6.6247848D−01	+1.0000000D+00
8	+2.6699439D+00	+1.9901093D+00	+6.7584227D−01
9	−5.6897986D−01	−4.2410334D−01	+1.0000000D+00
10	+2.4924569D+00	+1.8578150D+00	+7.2396877D−01
11	−3.5062314D−01	−2.6134571D−01	+1.0000000D+00
12	−1.4662047D+00	−1.0928722D+00	+1.0000000D+00
13	+5.9442186D−01	+4.4306717D−01	+1.0000000D+00
14	+1.4045667D−01	+1.0469288D−01	+1.0000000D+00
15	−1.9030211D+00	−1.4184642D+00	+9.4820862D−01
16	−4.0893312D+00	−3.0480851D+00	+4.4126066D−01
17	−3.2516324D−02	−2.4236854D−02	+1.0000000D+00
18	−5.1254234D−01	−3.8203622D−01	+1.0000000D+00
19	−8.5082724D−01	−6.3418531D−01	+1.0000000D+00
20	+3.7164110D−01	+2.7701197D−01	+1.0000000D+00
21	+7.0174347D−01	+5.2306201D−01	+1.0000000D+00
22	+1.8710988D+00	+1.3946702D+00	+9.6438576D−01
23	+1.0756232D+00	+8.0174260D−01	+1.0000000D+00

（上記の残差，規準化残差は収束直前，ウエイトは収束したケースの加重回帰に用いたウエイト）

表18　収束したパラメータ推定値より計算された推定値，残差

	観 測 値	推 定 値	残　　差	誤差率(%)
1	+1.0620669D+01	+1.3857854D+01	−3.2371845D+00	−30.48
2	+1.1061940D+01	+1.2055551D+01	−9.9361136D−01	−8.98
3	+1.3085118D+01	+1.2704639D+01	+3.8047869D−01	2.91
4	+1.3318160D+01	+1.4244457D+01	−9.2629687D−01	−6.96
5	+1.6384806D+01	+1.5839951D+01	+5.4485533D−01	3.33
6	+1.7020774D+01	+1.5962614D+01	+1.0581607D+00	6.22
7	+1.3961900D+01	+1.3074703D+01	+8.8719655D−01	6.35
8	+1.5373316D+01	+1.2705075D+01	+2.6682406D+00	17.36
9	+2.1626076D+01	+2.2196760D+01	−5.7068323D−01	−2.64
10	+2.7175516D+01	+2.4685766D+01	+2.4897494D+00	9.16
11	+1.2733039D+01	+1.3087102D+01	−3.5406322D−01	−2.78
12	+1.0773495D+01	+1.2243152D+01	−1.4696562D+00	−13.64
13	+9.9240842D+00	+9.3332018D+00	+5.9088233D−01	5.95
14	+6.3601807D+00	+6.2233749D+00	+1.3680582D−01	2.15
15	+5.9052366D+00	+7.8116782D+00	−1.9064416D+00	−32.28
16	+5.9696431D+00	+1.0062554D+01	−4.0929112D+00	−68.56
17	+6.2449259D+00	+6.2811252D+00	−3.6199274D−02	−0.58
18	+3.8389011D+00	+4.3553893D+00	−5.1648828D−01	−13.45
19	+2.3743001D+00	+3.2292630D+00	−8.5496290D−01	−36.01
20	+3.8235201D+00	+3.4560324D+00	+3.6748778D−01	9.61
21	+4.0003875D+00	+3.3027610D+00	+6.9762649D−01	17.44
22	+3.0096509D+00	+1.1427970D+00	+1.8668539D+00	62.03
23	+2.6181575D+00	+1.5468103D+00	+1.0713472D+00	40.92

（この推定値，残差は加重回帰の推定パラメータを用いて計算した元データの推定値，残差である。）

収束結果は次のように表すことができる。

$$WDOT2^* = \underset{(-4.803)}{-4.6341}\,C^* + \underset{(9.513)}{16.406}\left(\frac{1}{RU2^*}\right) + \underset{(11.871)}{0.89239}\,CPIDOT2^* \qquad (102)$$

$$\bar{R}^2 = 0.985,\ s = 1.401\ (\%),\ DW = 1.341$$

推定期間　1965年度—1987年度

＊はウエイトをかけた変数を示す。

$C_i^* = w_i^{\frac{1}{2}}$ である。

表16，17，18から次のことがわかる。

① IRLS はステップ2で収束し，$\hat{\beta}_j$, $j=1, 2, 3$ は OLS よりいずれも少し（絶対値が）小さいだけである。

② 収束結果のウエイトダウンはやはり6個の期で生じ，期もウエイトダウンの大きさの順序も同じである。

③ 収束結果を与えるウエイトがより大きくダウンした期は1期もない。すなわち規準化残差 $e_i/\hat{\sigma}$ の大きさは（絶対値が）小さくなっている。しかしこの結果は10，16，1，5の4期については残差 e_i が OLS より小さくなったからではなく，IRLS で固定されている $\hat{\sigma}=1.3416$ が，OLS の残差から計算された $\hat{\sigma}_0=1.2553$ より大きいからである。このことは，σ の推定値 $\hat{\sigma}$ の求め方および $\hat{\sigma}$ をくりかえし過程中固定するかどうか（表16のステップごとの $\hat{\sigma}$ の相違をみよ）が，ウエイトに，したがって $\hat{\boldsymbol{\beta}}_M$ に大きな影響を及ぼすことを示している。σ はまったくやっかいなパラメータ nuisance parameter である。

④ 表18と表10をくらべてみよう。$\hat{\beta}_{Mj}$ も OLS の $\hat{\beta}_j$ とそれほど大きく異なっていないから，表18の $\hat{Y}$ も OLS の $\hat{Y}$ とくらべとくに大きく変わっていない。残差も8，22の2期の誤差率が頑健推定によって若干小さくなっただけで，残りの4期についてはむしろ誤差率が大きくなっている。とくに残差の大きかった10，16両期の説明力の改善はない。大きい残差のウエイトをダウンした頑健推定によっても依然として残差が大きいというこの結果は，10，16期の説明が設定したモデルでは不十分にしかできず，失業率，物価上昇率以外に何か別の説明要因が欠除しているということを示している。

加重回帰の回帰診断

前に注意したように表18は IRLS の残差ではなく，IRLS の収束したパラメータ推定値 $\hat{\beta}_{Mj}$ を用いて計算した残差

$$e_i = Y_i - \mathbf{x}_i\,\hat{\boldsymbol{\beta}}_M$$

である。大きい残差のウエイトをダウンさせた効果は直接的には加重回帰に現れるから，頑健推定を評価するにあたって表18と表10を比較するだけでは公平ではない。なぜならば，IRLS によって最小化されるのは表18の残差平方和 $\sum e_i^2$ ではなく，$\sum e_i^{*2} = \sum w_i e_i^2$ であるからである。いいか

表19　IRLS（収束結果）の回帰診断

	残　差	PRESS 残差	スチューデント化残差 $r(i)$	スチューデント化残差 $t(i)$	Cook's D
1	−2.4175	−2.5521	−1.7723	−1.8815	0.0583
2	−0.9936	−1.1213	−0.7531	−0.7447	0.0243
3	0.3805	0.4493	0.2950	0.2882	0.0052
4	−0.9263	−1.1717	−0.7433	−0.7347	0.0488
5	0.5449	0.6698	0.4310	0.4221	0.0142
6	1.0582	1.2204	0.8108	0.8036	0.0336
7	0.8872	0.9789	0.6649	0.6554	0.0152
8	2.1936	2.3288	1.6127	1.6852	0.0534
9	−0.5707	−0.7864	−0.4780	−0.4686	0.0288
10	2.1184	3.9037	2.0519	2.2508	1.1827
11	−0.3541	−0.4103	−0.2720	−0.2656	0.0039
12	−1.4697	−1.6609	−1.1148	−1.1220	0.0539
13	0.5909	0.6367	0.4376	0.4286	0.0050
14	0.1368	0.1471	0.1012	0.0987	0.0003
15	−1.8564	−1.9644	−1.3626	−1.3944	0.0360
16	−2.7188	−2.8248	−1.9774	−2.1488	0.0508
17	−0.0362	−0.0390	−0.0268	−0.0261	0.0000
18	−0.5165	−0.5694	−0.3870	−0.3786	0.0051
19	−0.8550	−0.9623	−0.6472	−0.6375	0.0175
20	0.3675	0.4127	0.2779	0.2713	0.0032
21	0.6976	0.7839	0.5277	0.5179	0.0115
22	1.8333	2.1435	1.4145	1.4532	0.1128
23	1.0713	1.2484	0.8252	0.8184	0.0375

表20　IRLS（収束結果）の回帰診断（つづき）

	規準化残差平方ai2	$W(i)$	DFFITS	COVRATIO	$h(i,i)$
1	0.1488	2.1395	−0.4440	0.7375	0.0527
2	0.0251	1.3303	−0.2670	1.2074	0.1139
3	0.0037	0.6246	0.1225	1.3594	0.1531
4	0.0218	1.9950	−0.3782	1.3564	0.2094
5	0.0076	1.0509	0.2021	1.3941	0.1865
6	0.0285	1.5850	0.3147	1.2168	0.1329
7	0.0200	1.0380	0.2107	1.2034	0.0937
8	0.1225	2.0221	0.4184	0.8153	0.0581
9	0.0083	1.5863	−0.2881	1.5528	0.2743
10	0.1142	13.1563	2.0663	1.0576	0.4573
11	0.0032	0.5345	−0.1058	1.3367	0.1371
12	0.0550	2.0184	−0.4048	1.0874	0.1152
13	0.0089	0.5811	0.1194	1.2210	0.0720
14	0.0005	0.1316	0.0271	1.2521	0.0699
15	0.0877	1.6225	−0.3363	0.9214	0.0550
16	0.1882	2.0284	−0.4243	0.6310	0.0375
17	0.0000	0.0351	−0.0072	1.2550	0.0707
18	0.0068	0.5971	−0.1212	1.2573	0.0930
19	0.0186	1.1241	−0.2259	1.2320	0.1115
20	0.0034	0.4729	0.0951	1.2946	0.1095
21	0.0124	0.9055	0.1821	1.2566	0.1100
22	0.0856	3.0318	0.5978	0.9940	0.1447
23	0.0292	1.6846	0.3327	1.2250	0.1418

表21　OLS の回帰係数の変化 $\hat{\beta}_j - \hat{\beta}_j(i)$ (DFBETAS)

	定　数　項	B (1)	B (2)
1	0.2964 (0.280)	−0.8718 (−0.468)	0.0112 (0.146)
2	0.0811 (0.069)	−0.2917 (−0.142)	0.0079 (0.092)
3	−0.0623 (−0.053)	0.1975 (0.096)	−0.0051 (−0.060)
4	0.1763 (0.151)	−0.4872 (−0.237)	0.0109 (0.128)
5	−0.1262 (−0.108)	0.3154 (0.153)	−0.0047 (−0.055)
6	−0.1731 (−0.149)	0.4181 (0.204)	−0.0031 (−0.037)
7	−0.0811 (−0.070)	0.2644 (0.129)	−0.0048 (−0.057)
8	−0.1935 (−0.178)	0.6816 (0.356)	−0.0132 (−0.166)
9	0.0754 (0.064)	−0.0389 (−0.019)	−0.0142 (−0.166)
10	−0.0806 (−0.078)	−1.2853 (−0.704)	0.1776 (2.343)
11	−0.0310 (−0.026)	0.0705 (0.034)	−0.0041 (−0.048)
12	−0.1534 (−0.133)	0.3147 (0.155)	−0.0166 (−0.197)
13	0.0872 (0.074)	−0.1266 (−0.061)	0.0033 (0.038)
14	0.0399 (0.034)	−0.0404 (−0.020)	−0.0006 (−0.007)
15	−0.2130 (−0.187)	0.2138 (0.106)	0.0007 (0.009)
16	−0.5147 (−0.524)	0.8432 (0.487)	−0.0286 (−0.398)
17	0.0142 (0.012)	−0.0150 (−0.007)	−0.0002 (−0.002)
18	−0.0708 (−0.060)	0.0737 (0.036)	0.0016 (0.019)
19	−0.1534 (−0.131)	0.1628 (0.079)	0.0039 (0.045)
20	0.1143 (0.097)	−0.1258 (−0.061)	−0.0024 (−0.029)
21	0.1846 (0.158)	−0.1947 (−0.095)	−0.0047 (−0.055)
22	0.5087 (0.452)	−0.4677 (−0.236)	−0.0215 (−0.261)
23	0.3088 (0.267)	−0.3042 (−0.149)	−0.0111 (−0.131)

表22　IRLS (収束結果) の回帰係数の変化 $\hat{\beta}_{Mj} - \hat{\beta}_{Mj}(i)$ (DFBETAS)

	定　数　項	B (1)	B (2)
1	0.1713 (0.188)	−0.5058 (−0.311)	0.0063 (0.089)
2	0.0957 (0.098)	−0.3477 (−0.199)	0.0097 (0.127)
3	−0.0548 (−0.055)	0.1762 (0.100)	−0.0048 (−0.062)
4	0.2053 (0.210)	−0.5768 (−0.331)	0.0136 (0.178)
5	−0.1214 (−0.123)	0.3069 (0.174)	−0.0047 (−0.062)
6	−0.1739 (−0.179)	0.4221 (0.243)	−0.0029 (−0.038)
7	−0.0795 (−0.081)	0.2604 (0.149)	−0.0048 (−0.062)
8	−0.1317 (−0.143)	0.4652 (0.282)	−0.0089 (−0.124)
9	0.0783 (0.080)	−0.0215 (−0.012)	−0.0178 (−0.232)
10	−0.0305 (−0.035)	−1.0144 (−0.645)	0.1354 (1.976)
11	−0.0412 (−0.042)	0.0998 (0.057)	−0.0064 (−0.083)
12	−0.1731 (−0.181)	0.3776 (0.220)	−0.0219 (−0.293)
13	0.0779 (0.079)	−0.1180 (−0.067)	0.0037 (0.048)
14	0.0211 (0.021)	−0.0214 (−0.012)	−0.0003 (−0.004)
15	−0.2211 (−0.234)	0.2259 (0.134)	−0.0002 (−0.003)
16	−0.2325 (−0.262)	0.3999 (0.252)	−0.0156 (−0.226)
17	−0.0057 (−0.006)	0.0061 (0.003)	0.0001 (0.001)
18	−0.1016 (−0.103)	0.1048 (0.059)	0.0023 (0.030)
19	−0.1931 (−0.197)	0.2027 (0.116)	0.0050 (0.066)
20	0.0832 (0.084)	−0.0911 (−0.052)	−0.0018 (−0.023)
21	0.1557 (0.158)	−0.1624 (−0.092)	−0.0041 (−0.053)
22	0.4592 (0.489)	−0.4069 (−0.242)	−0.0211 (−0.288)
23	0.2745 (0.282)	−0.2635 (−0.151)	−0.0106 (−0.140)

えれば，表10は OLS で最小化された残差であり，表18の残差は IRLS で最小化された残差ではない。そこで頑健推定を評価するために IRLS の収束結果の回帰診断（表19，表20）と OLS の回帰診断（表13，表14）をくらべてみよう。

h_{ii} の大きさは高い作用点であるかどうかを示す。ウエイトダウンした6期のなかで15，22期を除いて残り4期の IRLS の h_{ii} は OLS の h_{ii} より小さくなっている。ウエイトダウンによって OLS の X_{ij} は IRLS で $w_i^{\frac{1}{2}} X_{ij}$ へと変化するから，説明変数の中心からの乖離の程度も小さくなり，h_{ii} が小さくなり，作用点としてのパラメータ推定値への影響も小さくなる。しかし10，16の2期は IRLS においても依然高い作用点である。

影響点かどうかは Cook の D, DFFITS あるいは $W(i)$ で調べればよいが，ここでは $W(i)$ をみてみよう。$W(i)$ で比較しても，15，22の2期を除き，残り4期のウエイトダウンした期の $W(i)$ は OLS よりも IRLS の方が小さくなっており，パラメータ推定値への影響力は OLS とくらべて相対的に弱い。とくに IRLS の16期の $W(i)$ は切断点 cut off point を

$$2\left[\frac{k(n-1)}{n-k}\right]^{\frac{1}{2}}=3.6322$$

とすれば有意ではない。

h_{ii} による作用点，$W(i)$ による影響点のチェックいずれにおいても，15，22の2期のパラメータ推定値への効果が残りの4期のように小さくなっていないのは，15期については w_i が1と余り変らないこと，22期については $CPIDOT2$ の値が0であり，$w^{\frac{1}{2}}$ を乗じた IRLS においても22期の $w^{\frac{1}{2}}$ $CPIDOT2=0$ であるから，ウエイトダウンの効果は現れないからである。OLS においても IRLS においても $\sum_{i=1}^{n} h_{ii}=3$ であるから，h_{ii} の小さくなった期があれば，大きくなる期もあり，15，22期の作用点，影響点としての位置が相対的に IRLS では高くなったのである。

以上のことは表21，表22に示したそれぞれ OLS，IRLS の i 期を除いたときの回帰係数の変化

$$\hat{\beta}_j-\hat{\beta}_j(i)$$

$$\hat{\beta}_{Mj}-\hat{\beta}_{Mj}(i)$$

と（　）内に示した $DFBETAS$ の値を比較することによっても，とくに10，16期のパラメータ推定値への影響がM推定量においては，OLS とくらべ弱くなっていることが明らかとなるであろう。

17　M推定量の分散の推定

IRLS によってM推定量を求めるとき，誤差項の分散を

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum w_i e_i^2}{n-k} \tag{103}$$

によって，cov $(\hat{\boldsymbol{\beta}}_M)$ を

$$\hat{\sigma}^2(\mathbf{X}'\mathbf{W}\mathbf{X})^{-1} \tag{104}$$

によって推定することは，IRLS の誤差項

$$\mathbf{W}^{\frac{1}{2}}\ \mathbf{u}$$

が均一分散をもつと仮定するならば何ら問題がないように思われる。(102)式の $\hat{\beta}_{Mj}$ の分散はこの方法で推定した値である。ところが Huber〔26, p. 175〕は(103)式による σ^2 の推定は頑健でない（ψ が再び 0 へ戻っていく関数でなければ $w_i e_i^2 = \psi(e_i) e_i$ は有界でない）ということ，および(103)式は $E(\psi^2)$ の一致推定値を与えないという理由で，(103)式によって σ^2 を推定することに強く反対している。

しかし計量経済学の分野で著しく大きな外れ値が発生し，$w_i e_i^2 = \psi(e_i) e_i$ が有界でなくなるというような事態に直面することはほとんどないであろう。著しく大きな外れ値がある場合，それは正規分布より長い尾をもつ確率分布からの誤差，いいかえれば純粋に確率的変動による誤差というよりはモデルに欠陥があるという証拠であるとみなすべきであろう。著しく大きな外れ値によって $w_i e_i^2$ が有界でなくなるというような状況は，パラメータ推定法ではなく，モデル自体を修正すべきことを示している。したがって，(103)，(104)式による分散行列の推定は，Huber の強い反対があるとはいえ，計量経済学の分野においては依然有効であろう。

ところで Huber が提唱しているのは次のような方法である。$\boldsymbol{\beta}$ の頑健推定量を $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ とすると

$E[\psi(e)] = 0$

$E[\psi(e)]^2 < \infty$

$n^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}$ は正値定符号

のとき

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}} \xrightarrow{d} N[\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\psi, F)(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}]$$

である。ここで

$$\sigma^2(\psi, F) = \frac{E_F(\psi^2)}{(E_F\psi')^2}$$

である。そして

$$E_F(\psi^2) \text{ は } \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\psi(e_i)]^2$$

$$E_F\psi' \text{ は } \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi'(e_i)$$

によって推定することができる。さらに偏りを補正して

$$\mathrm{cov}(\tilde{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{E_F(\psi^2)}{(E_F\psi')^2}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \tag{105}$$

は

$$K^2\frac{\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n}[\psi(e_i)]^2}{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi'(e_i)\right]^2}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \tag{106}$$

によって推定すればよい。ここで補正項Kは次式で与えられる（Huber〔26〕, p. 173)。

$$K=1+\frac{k}{n}\frac{\mathrm{var}(\psi')}{(E\psi')^2} \tag{107}$$

とくにψ関数が Huber のψのとき，すなわち

$$\psi(e_i)=\begin{cases} e_i & |e_i|\leq H\sigma \\ H\sigma & e_i>H\sigma \\ -H\sigma & e_i<-H\sigma \end{cases}$$

のとき(106)式は次式となる。

$$\left(\frac{K}{p}\right)^2\frac{\sum_{i=1}^{n}e_i^{*2}}{n-k}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \tag{108}$$

ここで

$$e_i^*=\psi(e_i)=\begin{cases} e_i & |e_i|\leq H\hat{\sigma} \\ H\hat{\sigma} & e_i>H\hat{\sigma} \\ -H\hat{\sigma} & e_i<-H\hat{\sigma} \end{cases}$$

$e_i=Y_i-\mathbf{x}_i\tilde{\boldsymbol{\beta}}$

$\hat{\sigma}=\sigma$の頑健推定値

$p=|e_i|\leq H\hat{\sigma}$ を満たす e_i の相対度数

$$K=1+\frac{k}{n}\frac{1-p}{p}$$

(108)式は次のようにして得られる。

$$\psi'(e_i)=\begin{cases} 1 & |e_i|\leq H\hat{\sigma} \\ 0 & |e_i|>H\hat{\sigma} \end{cases}$$

であるから

$$E_F\psi'\approx p=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi'(e_i)=\frac{n_1}{n}$$

n_1 は $|e_i|<H\hat{\sigma}$ を満たす e_i の数

$$\mathrm{var}(\psi')\approx\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[\psi'(e_i)-p]^2$$

ところが

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}[\psi'(e_i)-p]^2\\ &=n_1(1-p)^2+(n-n_1)(0-p)^2\\ &=np(1-p)^2+n(1-p)p^2\\ &=np(1-p)\end{aligned}$$

ゆえに

$$\mathrm{var}(\phi')\approx p(1-p)$$

したがって

$$K=1+\frac{k}{n}\frac{p(1-p)}{p^2}=1+\frac{k}{n}\frac{1-p}{p}$$

以上の結果を(105)式へ代入すれば(108)式が得られる。

前述の賃金率関数を例にとろう。

$$X_1=\frac{1}{RU2},\quad X_2=CPIDOT2$$

とすれば

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}=\begin{bmatrix} n & \sum X_1 & \sum X_2 \\ \sum X_1 & \sum X_1^2 & \sum X_1X_2 \\ \sum X_2 & \sum X_2X_1 & \sum X_2^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 23 & 13.584022 & 137.968 \\ & 8.8636424 & 89.663342 \\ & & 1315.8939 \end{bmatrix}$$

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}=\begin{bmatrix} 0.45850861 & -0.69640564 & -6.2121954\times10^{-4} \\ & 1.4208310 & -2.3797332\times10^{-2} \\ & & 2.4465929\times10^{-3} \end{bmatrix}$$

$|e_i|\leq H\hat{\sigma}$

$H=1.345$

$\hat{\sigma}=\mathrm{MAD}/0.6745$

を満たす e_i は $n_1=17$個であるから

$$p=\frac{n_1}{n}=\frac{17}{23}=0.73913$$

したがって

$$K=1+\frac{k}{n}\frac{1-p}{p}=1+\frac{3}{23}\left(\frac{1-0.73913}{0.73913}\right)=1.0460358$$

ウインザー化残差の残差平方和は

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^{*2}=29.477553$$

であるから

$$\sigma^{*2}=\left(\frac{K}{p}\right)^2\frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^{*2}}{n-k}=2.951976324$$

ゆえに，m^{ij} を $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ の (i, j) 要素とすれば

$$\tilde{\beta}_j \text{ の分散の推定値}=\sigma^{*2}m^{jj},\quad j=1,\ 2,\ 3$$

で与えられるから，上式で分散を推定し，平方根をとれば，M推定量 $\tilde{\beta}_j$ の漸近的標準偏差が得られる。この結果を次のように表しておこう。

$$WDOT2=\underset{\substack{(1.1634)\\(-3.983)}}{-4.6341}+\underset{\substack{(2.0480)\\(8.011)}}{16.406}\left(\frac{1}{RU2}\right)+\underset{\substack{(0.084984)\\(10.501)}}{0.89239}\,CPIDOT2 \tag{109}$$

パラメータ推定値の下の最初の（　）内の値はM推定値の漸近的標準偏差の推定値，その下の（　）内の値は，パラメータ推定値をその漸近的標準偏差で割った“t 値”に相当する値である。漸近的な検定においてもM推定値が有意であるという結論は同じである。

18　8種類のψ関数の実例

M推定量を求めるときの代表的なψ関数は表7に示した。この8種類のψ関数は次のように3分類することができる。

(1) 排除点をもつ。A，B，T。

(2) 排除点はもたないが，残差が絶対値で大きくなるにしたがって影響関数の値が次第に小さくなる。C，F，L，W。

(3) 排除点をもたず，残差が絶対値で調整定数をこえると影響関数の値が一定となる（ただしウエイトは残差の絶対値が調整定数をこえて大きくなればなるほど小さくなる）。H。

この8種類のψ関数によるM推定値，Huber の ψ の収束結果をパラメータ $\boldsymbol{\beta}$ の初期値として Tukey の biweight を使う M 推定値（HB），LAR および LAR の収束結果を初期値として Tukey の biweight を使うM推定値（LARB）の11種類の方法を2つの回帰モデルに適用してみよう。

HB，LARB いずれの場合も，Huber のψの収束結果のパラメータ推定値 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_M$ を用いて残差

$$e_i^M=Y_i-\mathbf{x}_i\hat{\boldsymbol{\beta}}_M$$

を求め，この残差から

$$\hat{\sigma}=\frac{\mathrm{MAD}}{0.6745}$$

によって得られるσの推定値を Tukey の beweight を使う IRLS において固定した。

LAR も IRLS において，OLS の残差 e_i を用いて

$$w_i=\frac{1}{|e_i|}$$

とおけば

$$\sum w_ie_i^2=\sum\left\{\frac{1}{|e_i|}\right\}e_i^2=\sum_{i=1}^{n}|e_i|$$

となるから，IRLS によって LAR の推定値を求めることができる。11種類のM推定値を推定したモデルは次の2つである。

EC から日本向け輸出関数

$$\log QXECJ\$=\beta_0+\beta_1 \log GNPJ\$87+\beta_2 \log(PXECWPIJ)_{-1}+u \qquad (110)$$

ここで

$QXECJ\$$＝EC から日本向け輸出数量（1987年基準，億ドル）

$GNPJ\$87$＝日本の GNP（1987年基準，100億ドル）

$$PXECWPIJ=\frac{\text{ECの輸出価格指数（1987年＝100，ドル建て）}}{\text{日本の卸売物価指数（1987年＝100，ドル建て）}}$$

u＝確率誤差項

イギリスの輸入関数

$$\log MGSUK1=\beta_0+\beta_1 \log GDPUK1+\beta_2 \sum_{i=0}^{2} w_i \log PMWPIUK1_{-i}+u \qquad (111)$$

ここで

$MGSUK1$＝イギリスの財・サービスの輸入（1980年基準，10億ポンド）

$GDPUK1$＝イギリスの GDP（1980年基準，10億ポンド）

$$PMWPIUK1=\frac{\text{イギリス輸入価格指数（1980年＝100）}}{\text{イギリス卸売物価指数（1980年＝100）}}$$

u＝確率誤差項

OLS による推定結果は次の通りである。パラメータ推定値の下の（　）内の値は上が標準偏差，下がパラメータ0の仮説検定のための t 値である。

$$\log QXECJ\$=\underset{\substack{(2.4656)\\(1.996)}}{4.92212}+\underset{\substack{(0.12102)\\(8.702)}}{1.05316} \log GNPJ\$87-\underset{\substack{(0.41970)\\(-3.029)}}{1.27106} \log PXECWPIJ_{-1} \qquad (112)$$

$\bar{R}^2=0.923$，$s=0.1129$，$DW=0.931$

$VIF(\hat{\beta}_1)=VIF(\hat{\beta}_2)=1.986$

推定期間　1967年～1987年

$$\log MGSUK1=\underset{\substack{(0.21375)\\(-29.616)}}{-6.3305}+\underset{\substack{(0.039857)\\(48.028)}}{1.9142} \log GDPUK1$$

$$-\underset{\substack{(-0.085091)\\(-2.918)}}{0.24827} \sum_{i=0}^{2} w_i \log PMWPIUK1_{-i} \qquad (113)$$

$w_0=0.25$，$w_1=0.50$，$w_2=0.25$

（逆 V 分布）

$\bar{R}^2=0.991$，$s=0.0250$，$DW=1.427$

$VIF(\hat{\beta}_1)=VIF(\hat{\beta}_2)=1.024$

推定期間　1965年—1987年

表23　ＥＣから日本向け輸出のデータ

	GNPJ $87 (100億ドル)	*PXECWPIJ* (－1) ('87＝100)	*QXECJ* $ (億ドル ('87))
1967	+8.4373000D+01	+1.2597235D+02	+3.2026800D+01
1968	+9.4942100D+01	+1.2387931D+02	+3.5278500D+01
1969	+1.0643000D+02	+1.1953575D+02	+4.0666600D+01
1970	+1.1649700D+02	+1.2200058D+02	+4.9997200D+01
1971	+1.2151700D+02	+1.2284583D+02	+4.6109800D+01
1972	+1.3188800D+02	+1.2816438D+02	+5.0702200D+01
1973	+1.4230100D+02	+1.2261084D+02	+7.1692800D+01
1974	+1.4028200D+02	+1.1548256D+02	+6.7782700D+01
1975	+1.4403600D+02	+1.1554254D+02	+4.9792800D+01
1976	+1.5094400D+02	+1.2992800D+02	+5.6492500D+01
1977	+1.5899800D+02	+1.2027676D+02	+5.9266800D+01
1978	+1.6725200D+02	+1.1836663D+02	+6.9075500D+01
1979	+1.7609400D+02	+1.0960010D+02	+7.8661900D+01
1980	+1.8362600D+02	+1.2507301D+02	+6.8967300D+01
1981	+1.9036900D+02	+1.2580837D+02	+7.5709200D+01
1982	+1.9623900D+02	+1.0730588D+02	+7.8614900D+01
1983	+2.0259900D+02	+1.1380913D+02	+8.6751600D+01
1984	+2.1288200D+02	+1.0566148D+02	+9.9121700D+01
1985	+2.2288300D+02	+1.0023438D+02	+1.0810900D+02
1986	+2.2843000D+02	+1.0218652D+02	+1.2961900D+02
1987	+2.3844600D+02	+9.7405358D+01	+1.5706000D+02

表24　イギリスの輸入関数のデータ

	*GDPUK*1 (10億ポンド)	*PMWPIUK*1 ('80ＣＹ＝1.0)	*MGSUK*1 (10億ポンド)
1965	+1.6788400D+02	+9.7379913D−01	+3.2328000D+01
1966	+1.7124400D+02	+9.5762712D−01	+3.3083000D+01
1967	+1.7587300D+02	+9.5833333D−01	+3.5351000D+01
1968	+1.8325900D+02	+1.0200000D+00	+3.7997000D+01
1969	+1.8566900D+02	+1.0077220D+00	+3.9280000D+01
1970	+1.8995400D+02	+1.0000000D+00	+4.1125000D+01
1971	+1.9485300D+02	+9.5379538D−01	+4.3317000D+01
1972	+1.9931200D+02	+9.3103448D−01	+4.7394000D+01
1973	+2.1546900D+02	+1.0701754D+00	+5.2898000D+01
1974	+2.1330600D+02	+1.2251185D+00	+5.3384000D+01
1975	+2.1187900D+02	+1.1221374D+00	+4.9659000D+01
1976	+2.1964500D+02	+1.1740558D+00	+5.2127000D+01
1977	+2.2194200D+02	+1.1277778D+00	+5.2930000D+01
1978	+2.3014800D+02	+1.0543616D+00	+5.4958000D+01
1979	+2.3529300D+02	+1.0376283D+00	+6.0231000D+01
1980	+2.3069800D+02	+1.0000000D+00	+5.8078000D+01
1981	+2.2809600D+02	+9.8538813D−01	+5.6373000D+01
1982	+2.3090400D+02	+9.7711864D−01	+5.9282000D+01
1983	+2.3979300D+02	+9.9598071D−01	+6.3038000D+01
1984	+2.4413100D+02	+1.0196821D+00	+6.9226000D+01
1985	+2.5287400D+02	+1.0043042D+00	+7.0959000D+01
1986	+2.6069000D+02	+9.2381606D−01	+7.5579000D+01
1987	+2.7053600D+02	+9.1402116D−01	+8.1177000D+01

表25　log *QXECJ*$ の OLS の結果

	観測値	推定値	残差	誤差率(%)
1	+3.4665730D+00	+3.4462102D+00	+2.0362803D−02	0.59
2	+3.5632734D+00	+3.5917998D+00	−2.8526394D−02	−0.80
3	+3.7054069D+00	+3.7574589D+00	−5.2051972D−02	−1.40
4	+3.9119670D+00	+3.8266992D+00	+8.5267843D−02	2.18
5	+3.8310254D+00	+3.8623544D+00	−3.1329039D−02	−0.82
6	+3.9259694D+00	+3.8947356D+00	+3.1233713D−02	0.80
7	+4.2723904D+00	+4.0310722D+00	+2.4131819D−01	5.65
8	+4.2163072D+00	+4.0921542D+00	+1.2415299D−01	2.94
9	+3.9078703D+00	+4.1193067D+00	−2.1143639D−01	−5.41
10	+4.0341077D+00	+4.0194935D+00	+1.4614178D−02	0.36
11	+4.0820494D+00	+4.1723469D+00	−9.0297495D−02	−2.21
12	+4.2351999D+00	+4.2459956D+00	−1.0795656D−02	−0.25
13	+4.3651590D+00	+4.3980561D+00	−3.2897041D−02	−0.75
14	+4.2336326D+00	+4.2743108D+00	−4.0678245D−02	−0.96
15	+4.3268995D+00	+4.3048398D+00	+2.2059680D−02	0.51
16	+4.3645611D+00	+4.5390187D+00	−1.7445763D−01	−4.00
17	+4.4630489D+00	+4.4978215D+00	−3.4772578D−02	−0.78
18	+4.5963483D+00	+4.6443803D+00	−4.8031980D−02	−1.05
19	+4.6831398D+00	+4.7597517D+00	−7.6611868D−02	−1.64
20	+4.8645992D+00	+4.7611238D+00	+1.0347541D−01	2.13
21	+5.0566278D+00	+4.8672263D+00	+1.8940149D−01	3.75

表26　log *MGSUK*1 の OLS の結果

	観測値	推定値	残差	誤差率(%)
1	+3.4759337D+00	+3.4800098D+00	−4.0761152D−03	−0.12
2	+3.4990196D+00	+3.5211251D+00	−2.2105583D−02	−0.63
3	+3.5653267D+00	+3.5753115D+00	−9.9848372D−03	−0.28
4	+3.6375072D+00	+3.6510513D+00	−1.3544139D−02	−0.37
5	+3.6707155D+00	+3.6690362D+00	+1.6792583D−03	0.05
6	+3.7166162D+00	+3.7108976D+00	+5.7186572D−03	0.15
7	+3.7685452D+00	+3.7642310D+00	+4.3141665D−03	0.11
8	+3.8584956D+00	+3.8153662D+00	+4.3129415D−02	1.12
9	+3.9683655D+00	+3.9615247D+00	+6.8408694D−03	0.17
10	+3.9775111D+00	+3.9172823D+00	+6.0228798D−02	1.51
11	+3.9051796D+00	+3.8852016D+00	+1.9978032D−02	0.51
12	+3.9536830D+00	+3.9540607D+00	−3.7769846D−04	−0.01
13	+3.9689703D+00	+3.9764160D+00	−7.4457161D−03	−0.19
14	+4.0065693D+00	+4.0521512D+00	−4.5581941D−02	−1.14
15	+4.0981872D+00	+4.1063723D+00	−8.1851799D−03	−0.20
16	+4.0617869D+00	+4.0771591D+00	−1.5372134D−02	−0.38
17	+4.0319903D+00	+4.0619391D+00	−2.9948767D−02	−0.74
18	+4.0823057D+00	+4.0900404D+00	−7.7346664D−03	−0.19
19	+4.1437377D+00	+4.1631228D+00	−1.9385038D−02	−0.47
20	+4.2373765D+00	+4.1941121D+00	+4.3264391D−02	1.02
21	+4.2621022D+00	+4.2583199D+00	+3.7823954D−03	0.09
22	+4.3251785D+00	+4.3220298D+00	+3.1487098D−03	0.07
23	+4.3966320D+00	+4.4049748D+00	−8.3428774D−03	−0.19

表27　EC から日本向け輸出（*QXECJ*$）の所得弾性値 β_1 の IRLS 推定値

φ関数 / くりかえし回数	*H* 1.345	*A* 1.339	*B* 4.685	*T* 2.795	*C* 2.385	*F* 1.400	*L* 1.205	*W* 2.985	*HB* 1.345, 4.685	*LAR*	*LARB* 4.685
0	1.04199	1.04130	1.04129	1.01909	1.04576	1.05069	1.04731	1.04287	1.03927	1.05712	1.03910
1	1.04175	1.04071	1.04065	1.05316	1.04580	1.05063	1.04732	1.04242	1.04021		1.04093
2	1.04174	1.04115	1.04109	1.05316	1.04604	1.05076	1.04773	1.04277	1.04091	35回で	1.04150
3	1.04174	1.04143	1.04137	(0.12102)	1.04615	1.05084	1.04782	1.04299	1.04132	収束	1.04168
4	1.04174	1.04161	1.04154		1.04621	1.05088	1.04786	1.04311	1.04155	ステップ0	1.04175
5	1.04173	1.04172	1.04165		1.04623	1.05090	1.04787	1.04317	1.04169	と35回目	1.04178
6	(0.090442)	1.04173	1.04172		1.04624	(0.084117)	1.04788	1.04321	1.04177	のみ示す	1.04179
7		1.04183	1.04176		(0.084126)		(0.085139)	1.04323	1.04181		(0.059469)
8		1.04186	1.04179					1.04324	1.04184		
9		1.04189	1.04181					(0.081573)	1.04185	1.03826	
10		1.04190	1.04183						(0.062102)	(0.029033)	
11		1.04191	(0.081669)								
		(0.081562)									
R^2	1.000	1.000	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Σlel	1.62002	1.59134	1.59142	1.66377	1.60235	1.60671	1.60579	1.59208	1.55514	1.53015	1.55861
σ_o	0.06824	0.07248	0.06905	0.09154	0.06633	0.06673	0.06638	0.06660	0.05198	0.04768	0.05382
σ_F	0.05683	0.04921	0.04928	0.07248	0.05330	0.05708	0.05538	0.04857	0.03191	0.05454	0.05307
DW	1.618	1.561	1.561	1.662	1.579	1.579	1.583	1.562	1.343	1.383	1.330

注 (1)　β_1 の OLSE は1.05316 (0.12102)　(　) 内は標準偏差

(2)　$\hat{\sigma}=\{\text{median}\,|e_i-M|/0.6745\}$，$M=\text{median}\,(e_j)$ により σ を推定。$\hat{\sigma}$ はくりかえし0ステップの推定値 $\hat{\sigma}_0$ をくりかえし過程において固定。$\hat{\sigma}_F$ は収束結果の $\hat{\sigma}$ である。

(3)　R^2 はすべて加重回帰の収束結果の決定係数であり，$1-\sum e_i^{*2}/\sum Y_i^{*2}$ によって計算している。

(4)　収束結果の（　）内の値は標準偏差。

(5)　$\sum|e|$ は，くりかえし加重回帰推定値を用いて計算された元データの残差 e_i の絶対値の総和であり，加重回帰の絶対残差和ではない。

(6)　DW も(5)の残差 e_i から計算。

表28　EC から日本向け輸出（*QXECJ* $）の価格弾性値　β_2 の IRLS 推定値

	H 1.345	*A* 1.339	*B* 4.685	*T* 2.795	*C* 2.385	*F* 1.400	*L* 1.205	*W* 2.985	*HB* 1.345, 4.685	*LAR*	*LARB* 4.685
0	−1.27244	−1.27637	−1.27644	−1.45557	−1.24893	−1.22184	−1.24101	−1.26517	−1.16836	−1.10799	−1.00985
1	−1.24505	−1.24703	−1.24630	−1.27106	−1.21549	−1.19752	−1.20947	−1.22975	−1.10512		−0.99721
2	−1.23255	−1.22305	−1.22202	−1.27106	−1.19791	−1.18528	−1.19490	−1.20531	−1.05597		−0.98906
3	−1.22730	−1.20665	−1.20551	(0.41970)	−1.18963	−1.18007	−1.18872	−1.19068	−1.02395	35回で収束	−0.98483
4	−1.22513	−1.19566	−1.19450		−1.18581	−1.17791	−1.18618	−1.18214	−1.00625	ステップ0	−0.98270
5	−1.22423	−1.18829	−1.18717		−1.18407	−1.17703	−1.18514	−1.17721	−0.99765	と35回目の	−0.98164
6	(0.33062)	−1.18334	−1.18230		−1.18328	(0.31201)	−1.18472	−1.17437	−0.99870	み示す	−0.98111
7		−1.18001	−1.17906		(0.31136)		(0.31475)	−1.17274	−0.99185		(0.23058)
8		−1.17778	−1.17690					−1.17180	−0.99098		
9		−1.17627	−1.17546					(0.30311)	−0.99056	−0.99282	
10		−1.17525	−1.17450						(0.24012)	(0.048286)	
11		−1.17456	(0.30339)								
		(0.30300)									

注 (1)　β_2 の OLSE は −1.27106 (0.41970)。(　) 内標準偏差。

(2)　R^2, $\sum|e|$, *DW*等々については表27を参照。

表29　輸入関数（イギリス）の所得弾性値　β_1 の IRLS 推定値

ステップ＼ϕ	*H* 1.345	*A* 1.339	*B* 4.685	*T* 2.795	*C* 2.385	*F* 1.400	*L* 1.205	*W* 2.985	*HB* 1.345, 4.685	*LAR*	*LARB* 4.685
0	1.9143	1.9152	1.9151	1.9119	1.9147	1.9147	1.9146	1.9149	1.9143	1.9154	1.9150
1	(0.028654)	1.9141	1.9141	1.9119	(0.027145)	(0.027861)	(0.027841)	(0.025438)	(0.021407)	1.9166	1.9139
2		(0.022192)	(0.022174)	(0.017483)						1.9175	(0.022470)
										(0.016417)	
R^2	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$\sum\|e\|$	0.37940	0.37768	0.37757	0.38541	0.37873	0.38038	0.37939	0.37751	0.37698	0.37982	0.37750
σ_0	0.013263	0.013781	0.013748	0.013202	0.013777	0.013924	0.013801	0.013750	0.013911	0.014171	0.013200
σ_F	0.013263	0.013437	0.013190	0.013202	0.013777	0.013924	0.013801	0.013750	0.013911	0.013608	0.013114
DW	1.402	1.367	1.367	1.320	1.407	1.418	1.411	1.398	1.369	1.418	1.362

注 (1)　β_1 の OLSE は 1.9142 (0.039857)。(　) 内は標準偏差。

(2)　HB は Huber のϕの収束結果を初期値とし，$\hat{\sigma}$ も収束結果の $\hat{\sigma}_F$ を固定して Tukey の biweight を適用。

(3)　LARB は LAR の収束結果を初期値とし，$\hat{\sigma}$ も LAR の収束結果の $\hat{\sigma}_F$ を固定して Tukey の biweight を適用。

表30　輸入関数（イギリス）の価格弾性値　β_2 の IRLS 推定値

ステップ＼ϕ	*H* 1.345	*A* 1.339	*B* 4.685	*T* 2.795	*C* 2.385	*F* 1.400	*L* 1.205	*W* 2.985	*HB* 1.345, 4.685	*LAR*	*LARB* 4.685
0	−0.22433	−0.23097	−0.22944	−0.18582	−0.23213	−0.23926	−0.23390	−0.22957	−0.21877	−0.24714	−0.22484
1	(0.063264)	−0.22483	−0.22390	−0.18582	(0.060651)	(0.061531)	(0.062132)	(0.057031)	(0.048602)	−0.24289	−0.22189
2		(0.050318)	(0.050275)	(0.039781)						−0.23880	(0.049334)
										(0.018380)	

注：β_2 の OLSE は−0.24827 (0.085091)。(　) 内は標準偏差。

表31 log *QXECJ*$ の収束結果のウエイト

	H	*A*	*B*	*T*	*C*	*F*
1	+1.0000000D+00	+9.9289633D−01	+9.9317177D−01	+1.0000000D+00	+9.8509346D−01	+8.1850765D−01
2	+1.0000000D+00	+9.8601931D−01	+9.8609023D−01	+1.0000000D+00	+9.7137846D−01	+7.8003949D−01
3	+1.0000000D+00	+9.5986266D−01	+9.6024224D−01	+1.0000000D+00	+9.1957256D−01	+6.6870252D−01
4	+1.0000000D+00	+8.4716269D−01	+8.4947345D−01	+1.0000000D+00	+7.5798563D−01	+5.1117452D−01
5	+1.0000000D+00	+9.8681552D−01	+9.8689697D−01	+1.0000000D+00	+9.7062878D−01	+7.7064281D−01
6	+1.0000000D+00	+9.7845224D−01	+9.7903688D−01	+1.0000000D+00	+9.6086510D−01	+7.5086998D−01
7	+3.7405400D−01	+1.6321312D−01	+1.6855132D−01	+1.0000000D+00	+2.9189323D−01	+2.7574609D−01
8	+7.0175186D−01	+6.7252965D−01	+6.7442491D−01	+1.0000000D+00	+5.8101269D−01	+4.1122241D−01
9	+4.4873951D−01	+3.9138573D−01	+3.8859991D−01	+1.0000000D+00	+3.8222080D−01	+3.1643504D−01
10	+1.0000000D+00	+9.9440985D−01	+9.9460488D−01	+1.0000000D+00	+9.9102836D−01	+8.7446868D−01
11	+1.0000000D+00	+8.7992797D−01	+8.8108344D−01	+1.0000000D+00	+7.8501243D−01	+5.2598769D−01
12	+1.0000000D+00	+9.9994845D−01	+9.9995819D−01	+1.0000000D+00	+9.9990530D−01	+9.6805066D−01
13	+1.0000000D+00	+9.9694669D−01	+9.9692923D−01	+1.0000000D+00	+9.8912037D−01	+8.3920313D−01
14	+1.0000000D+00	+9.7956265D−01	+9.7978074D−01	+1.0000000D+00	+9.5187527D−01	+7.1147024D−01
15	+1.0000000D+00	+9.8244101D−01	+9.8290656D−01	+1.0000000D+00	+9.7187970D−01	+7.9299862D−01
16	+5.7141395D−01	+6.1201294D−01	+6.1182418D−01	+1.0000000D+00	+5.0838861D−01	+3.7270080D−01
17	+1.0000000D+00	+9.9474783D−01	+9.9476120D−01	+1.0000000D+00	+9.8304909D−01	+8.0267519D−01
18	+1.0000000D+00	+9.9058248D−01	+9.9063485D−01	+1.0000000D+00	+9.7122988D−01	+7.6191224D−01
19	+1.0000000D+00	+9.6095999D−01	+9.6137272D−01	+1.0000000D+00	+9.0617864D−01	+6.3909632D−01
20	+7.5664845D−01	+6.8718675D−01	+6.8913585D−01	+1.0000000D+00	+6.0553999D−01	+4.2656916D−01
21	+4.3721976D−01	+2.6983489D−01	+2.6957197D−01	+1.0000000D+00	+3.4479118D−01	+3.0185398D−01

	L	*W*	*HB*	*LAR*	*LARB*
1	+9.7984434D−01	+9.9118668D−01	+9.9233328D−01	+1.7519255D+02	+9.9172887D−01
2	+9.6389398D−01	+9.8123180D−01	+9.8049541D−01	+2.7200328D+01	+9.7900206D−01
3	+8.9972801D−01	+9.4732319D−01	+9.5842042D−01	+2.0551016D+01	+9.5591883D−01
4	+7.2233889D−01	+8.1483379D−01	+7.6611201D−01	+1.1859028D+01	+7.4613121D−01
5	+9.6187380D−01	+9.8186664D−01	+9.8378889D−01	+2.9790712D+01	+9.8269462D−01
6	+9.5084731D−01	+9.7392469D−01	+9.7862708D−01	+5.4295575D+01	+9.7711407D−01
7	+3.2382651D−01	+2.1225520D−01	+1.2475089D−02	+4.1329255D+00	+1.1241574D−03
8	+5.5691956D−01	+6.2587964D−01	+4.6367058D−01	+7.0796096D+00	+4.2230934D−01
9	+3.9160095D−01	+3.6610418D−01	+2.6734727D−01	+5.1522414D+00	+2.3035778D−01
10	+9.8906716D−01	+9.9378984D−01	+9.9787603D−01	+1.8687135D+13	+9.9785448D−01
11	+7.4696672D−01	+8.4664510D−01	+8.5138588D−01	+1.2097960D+01	+8.4088235D−01
12	+9.9972988D−01	+9.9999456D−01	+9.9687200D−01	+4.8748347D+02	+9.9622783D−01
13	+9.8435139D−01	+9.9535752D−01	+9.9685230D−01	+4.6963557D+02	+9.9569823D−01
14	+9.3624076D−01	+9.7132469D−01	+9.6816727D−01	+2.3934523D+01	+9.6557150D−01
15	+9.6614877D−01	+9.7950428D−01	+9.7835108D−01	+5.0347170D+01	+9.7649093D−01
16	+4.9064130D−01	+5.5749702D−01	+6.1413856D−01	+7.5795707D+00	+5.9396655D−01
17	+9.7580983D−01	+9.9206040D−01	+9.9999787D−01	+1.2270898D+02	+9.9998625D−01
18	+9.5977355D−01	+9.8645813D−01	+9.9827037D−01	+7.4430436D+10	+9.9725255D−01
19	+8.7831198D−01	+9.4753137D−01	+9.9915931D−01	+7.5625269D+01	+9.9966165D−01
20	+5.8176125D−01	+6.4228473D−01	+3.5370689D−01	+6.1781388D+00	+3.0211810D−01
21	+3.6611085D−01	+2.8306061D−01	+0.0000000D+00	+3.8202746D+00	+0.0000000D+00

表32　log *MGSUK* 1 の収束結果のウエイト

	H	*A*	*B*	*T*	*C*	*F*
1	+1.0000000D+00	+9.9997836D-01	+9.9998813D-01	+1.0000000D+00	+9.8539267D-01	+8.2821536D-01
2	+8.5407831D-01	+8.5489118D-01	+8.5549751D-01	+1.0000000D+00	+6.9638567D-01	+4.7062033D-01
3	+1.0000000D+00	+9.8630101D-01	+9.8644540D-01	+1.0000000D+00	+9.1831503D-01	+6.6309300D-01
4	+1.0000000D+00	+9.5988832D-01	+9.6019385D-01	+1.0000000D+00	+8.5934955D-01	+5.9199581D-01
5	+1.0000000D+00	+9.8464646D-01	+9.8522139D-01	+1.0000000D+00	+9.9749036D-01	+9.2127688D-01
6	+1.0000000D+00	+9.5635667D-01	+9.5758983D-01	+1.0000000D+00	+9.7164915D-01	+7.7459508D-01
7	+1.0000000D+00	+9.6583850D-01	+9.6664944D-01	+1.0000000D+00	+9.8366536D-01	+8.1998884D-01
8	+4.3774994D-01	+2.0357434D-01	+2.0302597D-01	+0.0000000D+00	+3.7598979D-01	+3.1302190D-01
9	+1.0000000D+00	+9.4009472D-01	+9.4087436D-01	+1.0000000D+00	+9.5992014D-01	+7.4178391D-01
10	+3.1346963D-01	+0.0000000D+00	+2.8589395D-03	+0.0000000D+00	+2.3604338D-01	+2.4601599D-01
11	+9.4503297D-01	+7.9336249D-01	+7.9940558D-01	+1.0000000D+00	+7.3740789D-01	+4.9588577D-01
12	+1.0000000D+00	+9.9964808D-01	+9.9984227D-01	+1.0000000D+00	+9.9987274D-01	+9.8114302D-01
13	+1.0000000D+00	+9.8212524D-01	+9.8084014D-01	+1.0000000D+00	+9.5286817D-01	+7.2522655D-01
14	+4.1419691D-01	+2.9281069D-01	+2.8416730D-01	+0.0000000D+00	+3.5041457D-01	+3.0125356D-01
15	+1.0000000D+00	+9.8478191D-01	+9.8422378D-01	+1.0000000D+00	+9.4359586D-01	+7.0596167D-01
16	+1.0000000D+00	+9.2915267D-01	+9.2890744D-01	+1.0000000D+00	+8.2587831D-01	+5.6109804D-01
17	+6.3040655D-01	+6.9471367D-01	+6.9371050D-01	+1.0000000D+00	+5.5547800D-01	+3.9620280D-01
18	+1.0000000D+00	+9.9314086D-01	+9.9315559D-01	+1.0000000D+00	+9.4932801D-01	+7.1757484D-01
19	+9.7394180D-01	+8.8819973D-01	+8.8902115D-01	+1.0000000D+00	+7.4890912D-01	+5.0341856D-01
20	+4.3638426D-01	+2.1943969D-01	+2.1884698D-01	+0.0000000D+00	+3.7452471D-01	+3.1235037D-01
21	+1.0000000D+00	+9.7420001D-01	+9.7490084D-01	+1.0000000D+00	+9.8739642D-01	+8.3859599D-01
22	+1.0000000D+00	+9.7614772D-01	+9.7657001D-01	+1.0000000D+00	+9.9123183D-01	+8.6190262D-01
23	+1.0000000D+00	+9.9336752D-01	+9.9368653D-01	+1.0000000D+00	+9.4152984D-01	+7.0198492D-01

	L	*W*	*HB*	*LAR*	*LARB*
1	+9.8108211D-01	+9.9058119D-01	+9.9964031D-01	+4.6159683D+02	+9.9963871D-01
2	+6.6071988D-01	+7.5704673D-01	+8.2958951D-01	+4.9567083D+01	+8.6459244D-01
3	+8.9803561D-01	+9.4479657D-01	+9.8059642D-01	+1.2421673D+02	+9.9009453D-01
4	+8.2979813D-01	+9.0078714D-01	+9.4900782D-01	+8.4932390D+01	+9.6584578D-01
5	+9.9672753D-01	+9.9839512D-01	+9.8926490D-01	+3.0621672D+02	+9.8127775D-01
6	+9.6356386D-01	+9.8154534D-01	+9.6359746D-01	+1.3868168D+02	+9.5107849D-01
7	+9.7886556D-01	+9.8945491D-01	+9.7138874D-01	+1.7110584D+02	+9.6017217D-01
8	+3.8743005D-01	+3.4662677D+01	+1.8252433D-01	+2.2334123D+01	+1.7590132D-01
9	+9.4882361D-01	+9.7369708D-01	+9.4432089D-01	+1.2147561D+02	+9.3106116D-01
10	+2.8038759D-01	+1.2667067D-01	+5.2010931D-04	+1.6365456D+01	+5.7481482D-04
11	+7.0086908D-01	+7.9665567D-01	+8.1598317D-01	+4.8892305D+01	+7.9616268D-01
12	+9.9983383D-01	+9.9991875D-01	+9.9943922D-01	+1.0432322D+05	+9.9985846D-01
13	+9.4005250D-01	+9.6891644D-01	+9.6814639D-01	+1.4223462D+02	+9.8050748D-01
14	+3.6771184D-01	+3.0622691D-01	+2.1711503D-01	+2.2163476D+01	+2.7685029D-01
15	+9.2862236D-01	+9.6255853D-01	+9.7572501D-01	+1.3301363D+02	+9.8579359D-01
16	+7.9286408D-01	+8.7407094D-01	+9.1140048D-01	+6.9096751D+01	+9.3323432D-01
17	+5.3297493D-01	+5.9997052D-01	+6.5396816D-01	+3.4624722D+01	+7.0132737D-01
18	+9.3567481D-01	+9.6649872D-01	+9.8947069D-01	+1.5162750D+02	+9.9540543D-01
19	+7.1239705D-01	+8.0731811D-01	+8.7036879D-01	+5.4585882D+01	+8.9698846D-01
20	+3.8629595D-01	+3.4433214D-01	+1.9924496D-01	+2.2617113D+01	+1.9467323D-01
21	+9.8365876D-01	+9.9188437D-01	+9.7857804D-01	+2.1837264D+02	+9.6990186D-01
22	+9.8860701D-01	+9.9436886D-01	+9.7930199D-01	+2.5061974D+02	+9.7098773D-01
23	+9.2609124D-01	+9.6113059D-01	+9.9172889D-01	+1.3640055D+02	+9.9646061D-01

表33　log *QXECJ*$ の OLS の回帰係数の変化　$\hat{\beta}_j-\hat{\beta}_j(i)$ (DFBETAS)

	定　数　項	B (1)	B (2)
1	0.1588 (0.063)	−0.0140 (−0.112)	−0.0182 (−0.042)
2	−0.1653 (−0.065)	0.0143 (0.115)	0.0192 (0.045)
3	−0.3277 (−0.130)	0.0228 (0.185)	0.0440 (0.103)
4	0.1775 (0.071)	−0.0193 (−0.158)	−0.0159 (−0.038)
5	−0.0177 (−0.007)	0.0046 (0.037)	−0.0016 (−0.004)
6	−0.1571 (−0.062)	0.0027 (0.022)	0.0305 (0.071)
7	−0.6095 (−0.282)	0.0104 (0.098)	0.1197 (0.325)
8	0.3593 (0.147)	−0.0192 (−0.160)	−0.0538 (−0.129)
9	−0.4843 (−0.214)	0.0253 (0.228)	0.0727 (0.189)
10	−0.1474 (−0.058)	0.0049 (0.040)	0.0260 (0.060)
11	0.2847 (0.114)	−0.0110 (−0.090)	−0.0491 (−0.116)
12	0.0304 (0.012)	−0.0015 (−0.012)	−0.0049 (−0.011)
13	−0.0896 (−0.035)	0.0011 (0.009)	0.0174 (0.040)
14	0.4574 (0.181)	−0.0202 (−0.163)	−0.0753 (−0.175)
15	−0.2990 (−0.118)	0.0134 (0.108)	0.0490 (0.114)
16	−0.4122 (−0.176)	−0.0068 (−0.059)	0.0919 (0.230)
17	0.1224 (0.048)	−0.0091 (−0.074)	−0.0164 (−0.038)
18	−0.0989 (−0.039)	−0.0046 (−0.038)	0.0252 (0.059)
19	−0.4943 (−0.198)	0.0010 (0.008)	0.1019 (0.240)
20	0.3906 (0.158)	0.0090 (0.074)	−0.0904 (−0.216)
21	1.5875 (0.705)	−0.0033 (−0.030)	−0.3276 (−0.855)

表34　log *MGSUK*1 の OLS の回帰係数の変化　$\hat{\beta}_j-\hat{\beta}_j(i)$ (DFBETAS)

	定　数　項	B (1)	B (2)
1	−0.0163 (−0.075)	0.0030 (0.073)	0.0009 (0.011)
2	−0.0782 (−0.366)	0.0143 (0.359)	0.0094 (0.110)
3	−0.0297 (−0.136)	0.0054 (0.133)	0.0062 (0.071)
4	−0.0304 (−0.140)	0.0055 (0.136)	0.0063 (0.073)
5	0.0036 (0.016)	−0.0006 (−0.016)	−0.0002 (−0.002)
6	0.0102 (0.047)	−0.0019 (−0.045)	−0.0002 (−0.002)
7	0.0057 (0.026)	−0.0010 (−0.025)	−0.0012 (−0.014)
8	0.0369 (0.184)	−0.0064 (−0.171)	−0.0307 (−0.385)
9	−0.0017 (−0.008)	0.0004 (0.010)	−0.0042 (−0.048)
10	0.0215 (0.118)	−0.0036 (−0.107)	0.0392 (0.541)
11	0.0197 (0.092)	−0.0036 (−0.090)	0.0395 (0.462)
12	−0.0001 (−0.001)	0.0000 (0.001)	−0.0007 (−0.008)
13	−0.0007 (−0.003)	0.0001 (0.003)	−0.0127 (−0.146)
14	0.0280 (0.142)	−0.0054 (−0.148)	−0.0552 (−0.705)
15	0.0092 (0.042)	−0.0018 (−0.043)	−0.0041 (−0.047)
16	0.0148 (0.068)	−0.0029 (−0.071)	−0.0013 (−0.015)
17	0.0274 (0.130)	−0.0054 (−0.137)	0.0068 (0.082)
18	0.0093 (0.042)	−0.0018 (−0.044)	0.0037 (0.043)
19	0.0351 (0.163)	−0.0068 (−0.168)	0.0110 (0.128)
20	−0.0874 (−0.436)	0.0167 (0.448)	−0.0178 (−0.223)
21	−0.0096 (−0.044)	0.0018 (0.045)	−0.0011 (−0.012)
22	−0.0104 (−0.047)	0.0020 (0.048)	−0.0020 (−0.023)
23	0.0405 (0.185)	−0.0077 (−0.189)	0.0131 (0.151)

図27　log *QXECJ*$ の L-Rプロット

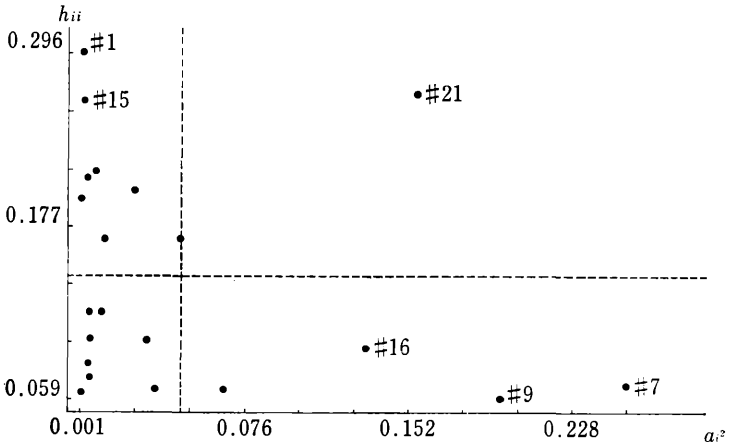


図28　log *MGSUK*1 の L-Rプロット

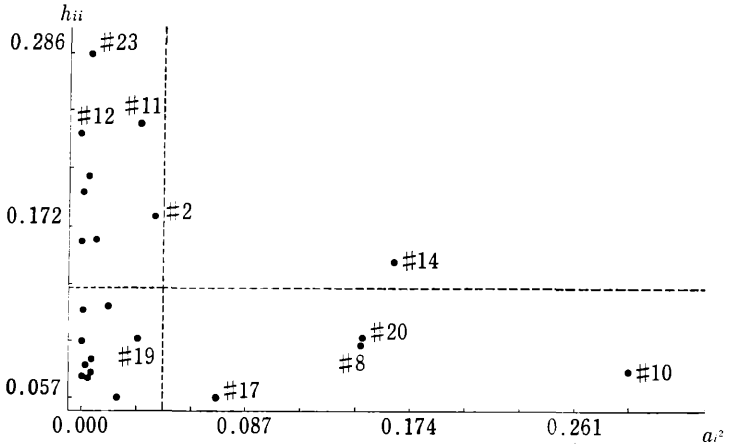
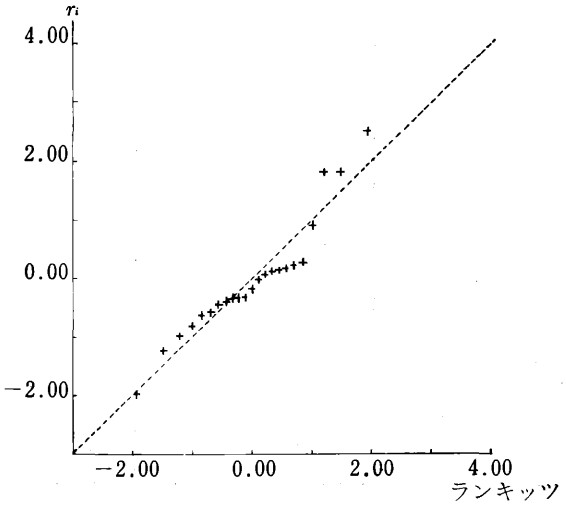


図29　log *MGSUK*1 の正規確率プロット



推定に用いたデータは表23，表24に，OLS の推定値，残差は表25，表26に，L-R プロットは図27，図28に，log $QXECJ\$$ の正規確率プロットはすでに図2に，log $MGSUK1$ の正規確率プロットは図29に示した。

この2つのモデルに対して適用された11種類のM推定値のステップごとの値は表27～表30に示した。IRLS の最終結果のウエイトは表31～表32に示した。そして i 期の観測値を除いたときの OLSE の変化

$$\hat{\beta}_j-\hat{\beta}_j(i)$$

を表33，表34に示した。（　）内の値は DFBETAS である。

これらの表および図の詳細な検討は16節で説明した方法で行えばよい。ここでは主要な結果をまとめておこう。

(1) どの ψ 関数を用いても，M推定値と OLSE との相違は小さい。したがって OLS で十分であるという考え方もあれば，M推定量は OLS と全く異なる突飛な推定値を与えるわけではなく，外れ値に対して頑健であるから，あるいは正規性の仮定がくずれ，正規分布からの乖離があっても頑健であるからM推定量を求めることは大いに意義があるという考え方もある。本論文は後者の考え方を採ってきた。特定の2，3の推定値から OLS で十分という判断をすべきではない。

(2) イギリスの輸入関数の例において，Hinich and Talwar の ψ（ψ 関数T）の価格弾性値のみ -0.18582 となり，他の ψ 関数の -0.22～-0.24（表30）と異なるのは次の理由による。ψ 関数T（調整定数2.795）を用いると，ウエイトが0になる期が8，10，14，20と4期ある（表32）。他方，この価格弾性値 β_2 の推定値に大きな影響を与える期は，DFBETASの大きさの順に14，10，11，8，20……である（表34）。この5期のうち4期のウエイトが ψ 関数Tにおいては0となり，14，8，20期の

$$\hat{\beta}_j-\hat{\beta}_j(i)<0$$

が，10期の

$$\hat{\beta}_j-\hat{\beta}_j(i)>0$$

を絶対値でこえるから，ψ 関数Tの価格弾性値は他のウエイトが0にならない ψ 関数（Aのみ10期0）より推定値が小さくなっている。ψ 関数Tの所得弾性値 β_1 の推定値が他の関 ψ 数とほとんど変わらないのは8，10，14期の

$$\hat{\beta}_j-\hat{\beta}_j(i)<0$$

が20期の

$$\hat{\beta}_j-\hat{\beta}_j(i)>0$$

とほぼ相殺しているからである。

(3) log $QXECJ\$$ の価格弾性値のM推定値が HB-0.99，LARB-0.98 といずれのケースも，他の ψ 関数の推定値約-1.2 と大きく異なっているのは（表28），IRLS のくりかえし過程中固定されている σ の値の相違による。HB において biweight へ入ったときは Huber の ψ の収束結果の σ_F

$=0.05683$で$\hat{\sigma}$は固定され，LARB は LAR の収束結果の$\hat{\sigma}_F=0.05454$で$\hat{\sigma}$は固定されている。これらの値は他のψ関数のとき固定されている$\hat{\sigma}$の値0.066～0.07とかなり異なっている（表27)。この$\hat{\sigma}$の相違が HB，LARB とも21期のウエイトを0にする（表32)。そしてこの21期は表35からわかるように

$$\hat{\beta}_2-\hat{\beta}_2(21)=-0.3276\ (-0.855)$$

と一番大きな影響点であるため，21期をパラメータ推定に用いない HB，LARB と他のM推定値との相違は大きくなる。

(4) LAR を初期値とするM推定量は次の点で推奨できない。

① LAR の解を求める計算自体面倒である。LAR 推定値を線形計画法で求めるにせよ，IRLS で求めるにせよ，M推定量の初期値を得るために膨大な計算をすることは時間の無駄である。その上，われわれは OLSE とM推定値を比較したいという場合が多いから LAR から出発することに関心もない。

② LAR を IRLS で求めると収束回数がきわめて多くなることがある。log *QXECJ*$ の例では35回，SAS には334回の収束回数の例が示されている（Sall〔34〕，p. 150)。

③ IRLS による LAR 回帰分析は，ウエイトを

$$w_i=\frac{1}{|e_i|}$$

で与えるから，0に近い残差にきわめて大きなウエイトを与え（たとえば表31の LAR の10期)，これは$\sum|e_i|$の最小値ではなく，極小値を与えるかも知れない（Sall〔34〕p. 150)。

(5) M推定値はψ関数が異なってもそれほど大きく違わない。ウエイトの観点からψ関数を大別すれば次の2種類になる。

① 規準化残差の絶対値が調整定数以下のときウエイト1をとり OLS と同じであるが，調整定数をこえるとウエイトが0になるT，漸減するH。

② 残差0のときのみウエイト1をとり，規準化残差が絶対値で大きくなるにしたがってウエイトが漸減し，ウエイト0となる排除点をもつA，B，排除点をもたないC，F，L，W。この中でC，L，W のウエイト変化は2次関数であるが，Fのみ幾何級数的に減少する。

どのψ関数を用いるかは上記の点を考慮すればよい。計量経済学においては，大きな残差（たとえば規準化残差の絶対値が3をこえる残差）の影響をカットしたいとすれば，T，A，Bの排除点をもつψを，ウエイトを漸減させようとすればその他のψを用いればよい。OLS に頑健性を加えるM推定量という要求に対しては，ウエイトの与え方から考えても，Huberのψが一番適しているであろう。ψ関数に Hinich and Talwar のTを用い，調整定数をTとすれば，誤差項の真の分布が正規分布のときの Hinich and Talwar のψの漸近的有効性は

$$-2T\phi(T)+1-2\Phi(-T)$$

で与えられるから，調整定数T＝3.0とすれば漸近的有効性は97%になる。

(6) 規準化残差の絶対値がすべて調整定数以下であればψ関数TのM推定値は OLS と同じになる（log *QXECJ* $ がこの例である。表27，表28)。排除点をもつA，B，T 3つのψ の調整定数をそれぞれA＝1.339π＝4.206，B＝4.685，T＝2.795にとればウエイト0を一番多く与えるのはTである。したがってすべての残差にウエイト1を与える OLS と一番異なるパラメータ推定値をもたらす可能性があるのもTである。この例をlog *MGSUK*1でみた（表30)。このψ関数Tを除けば，A，Bを用いても，計量経済モデルで規準化残差が4.2をこえる期が数期もあることは少なく，したがってA，Bあるいはその他のψ関数の間でM推定値に大きな相違がもたらされることはほとんどないであろう。

19 有界影響推定

M推定量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}_M$ の影響関数は

$$IC=\psi(Y-\mathbf{x}\hat{\boldsymbol{\beta}}_M)\mathbf{B}^{-1}\mathbf{x}'$$

によって与えられる（(54)式)。この影響関数からわかるように，たとえ$\psi(\cdot)$が大きな残差の効果を制限しても，$\mathbf{x}$によって（Y $\mathbf{x}$）の影響は無制限に大きくなり得る。前節までで考察してきたM推定量は，Y方向の大きな誤差に対してのみ頑健な推定法であったが，高い作用点に対しても頑健な，あるいは同じことであるが$\mathbf{x}$方向の誤差にも有界な推定を行おうとするのが有界影響推定 bounded influence estimation である。

Schweppe (Handschin et al. [17])，Krasker and Welsch [29] は

$$\sum_{i=1}^{n} v(\mathbf{x}_i)\psi\left[\frac{Y_i-\mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma v(\mathbf{x}_i)}\right]\mathbf{x}_i'=0 \tag{114}$$

の形の有界影響推定を提唱した。$v(\mathbf{x}_i)$ は影響関数 IC を有界にする関数である。

Schweppe のケースは

$$v(\mathbf{x}_i)=(1-h_{ii})^{\frac{1}{2}}$$

であるから，$\mathbf{X}'\mathbf{X}=\mathbf{I}$ と規準化すれば $(1-h_{ii})^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}_i'$ は絶対値1で有界である。このとき(114)式は

$$\sum_{i=1}^{n}(1-h_{ii})^{\frac{1}{2}}\psi\left[\frac{Y_i-\mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta}}{\sigma(1-h_{ii})^{\frac{1}{2}}}\right]\mathbf{x}_i'=0 \tag{115}$$

と表すことができる。(115) 式は Huber [27] が minimax 原理によって導出した結果と同じである。

Welsch [37] の有界影響推定は，(114) 式においてσを推定値 $s(i)$（i 期の観測値を除いたときに得られるσの推定値）でおきかえ，

$$v(\mathbf{x}_i)=\frac{1-h_{ii}}{h_{ii}^{\frac{1}{2}}}$$

とおいた場合である。このとき

$$\frac{Y_i-\mathbf{x}_i\hat{\boldsymbol{\beta}}}{\sigma v(\mathbf{x}_i)}=\frac{h_{ii}^{\frac{1}{2}}(Y_i-\mathbf{x}_i\hat{\boldsymbol{\beta}})}{s(i)(1-h_{ii})}=DFFITS_i \tag{116}$$

となる。したがって(114)式は

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(1-h_{ii})}{h_{ii}^{\frac{1}{2}}}\psi(DFFITS_i)\mathbf{x}_i'=0 \tag{117}$$

となる。

$$w_i=\frac{\psi(DFFITS_i)}{DFFITS_i}$$

とおけば (117) 式は

$$\sum_{i=1}^{n}w_i\left[\frac{Y_i-\mathbf{x}_i\boldsymbol{\beta}}{s(i)}\right]\mathbf{x}_i'=0 \tag{118}$$

と同じである。Welsch は

$$w_i=\begin{cases}1 & |DFFITS_i|\leq 0.34\\ \dfrac{0.34}{|DFFITS_i|} & |DFFITS_i|>0.34\end{cases}$$

の有界影響推定を試みた。

本節では (115) 式の有界影響推定を行ってみよう。σは未知パラメータであるから，σの推定値として

sを使えば$\dfrac{e_i}{s(1-h_{ii})^{\frac{1}{2}}}$ はスチューデント化残差 r_i

$s(i)$を使えば$\dfrac{e_i}{s(i)(1-h_{ii})^{\frac{1}{2}}}$ はスチューデント化残差 t_i

$\hat{\sigma}=MAD/0.6745$ を使えば$\dfrac{e_i}{\hat{\sigma}(1-h_{ii})^{\frac{1}{2}}}$

がψ関数の引数となる。

たとえば$\hat{\sigma}$を Huber のψに適用する場合を考えてみよう。

$$\psi\left[\frac{e_i}{\hat{\sigma}(1-h_{ii})^{\frac{1}{2}}}\right]=\begin{cases}\dfrac{e_i}{\hat{\sigma}(1-h_{ii})^{\frac{1}{2}}} & \left|\dfrac{e_i}{\hat{\sigma}(1-h_{ii})^{\frac{1}{2}}}\right|\leq H\\ H & \dfrac{e_i}{\hat{\sigma}(1-h_{ii})^{\frac{1}{2}}}>H\\ -H & \dfrac{e_i}{\hat{\sigma}(1-h_{ii})^{\frac{1}{2}}}<-H\end{cases}$$

であるからウエイトは次式で与えられる。

$$w_i=\begin{cases} 1 & \left|\dfrac{e_i}{\hat{\sigma}(1-h_{ii})^{\frac{1}{2}}}\right|\leq H \\ \dfrac{(1-h_{ii})^{\frac{1}{2}}H}{\dfrac{e_i}{\hat{\sigma}}} & \left|\dfrac{e_i}{\hat{\sigma}(1-h_{ii})^{\frac{1}{2}}}\right|>H \end{cases}$$

したがって$\psi(e_i/\hat{\sigma})$と比較すれば，h_{ii}が大きいほど（$\mathbf{x}_i$が高い作用点であるほど）$e_i/\hat{\sigma}$にくらべ$e_i/\hat{\sigma}(1-h_{ii})^{\frac{1}{2}}$は大きくなり，残差がウエイトダウンされる可能性は高くなる。たとえば$h_{ii}=0.5$のとき，$1/(1-h_{ii})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}=1.414$となるから，調整定数$H=1.345$とすれば，$e_i/\hat{\sigma}$ならば1.0でウエイトダウンしなかった$i$期が，$\sqrt{2}e_i/\hat{\sigma}=1.414$となりウエイトダウンする。

また$\psi(e_i/\hat{\sigma})$において，たとえば$e_i/\hat{\sigma}=1.5$で$H/(e_i/\hat{\sigma})$にウエイトダウンしたi期の場合，さらに有界影響推定においては$(1-h_{ii})^{\frac{1}{2}}$がかけられ，ウエイトは一層ダウンする。この2重のルートで有界影響推定（115）式は高い作用点のパラメータ推定値への影響を減殺する。

Huber のψを用いて（115）式の有界影響推定の例をあげよう。σの推定値は上記の3ケースを考察する。

望ましい貨幣需要

$$M^*=\alpha_0 Y^{\alpha_1}e^{\alpha_2 R}$$

と部分調整

$$\frac{M}{M_{-1}}=\left(\frac{M^*}{M_{-1}}\right)^{\gamma}e^{u}$$

から貨幣需要関数

$$\log M=\beta_0+\beta_1\log Y+\beta_2 R+\beta_3\log M_{-1}+u \tag{119}$$

が得られる。ここで

$$\begin{aligned} \beta_0&=\gamma\log\alpha_0 \\ \beta_1&=\gamma\alpha_1 \\ \beta_2&=\gamma\alpha_2 \\ \beta_3&=1-\gamma \end{aligned} \tag{120}$$

である。M＝M2CD2（名目のM2＋CDの前期と当期の平均残高をGNPデフレーターPで割った実質残高），Y＝GNP2（実質GNP），R＝RD2（電々債利回り）としてOLSで（119）式を推定した結果は次の通りである。推定に用いたデータは表35に示した。

$$\begin{aligned} \log \mathrm{M2CD2}=&-0.27046+0.48072\log \mathrm{GNP2} \\ &\quad(0.20156)\quad(0.10893) \\ &\quad(-1.342)\quad(4.413) \\ &-0.021768\,\mathrm{RD2}+0.59423\log \mathrm{M2CD2}_{-1} \\ &\quad(0.0030119)\qquad(0.077904) \\ &\quad(-7.227)\qquad(7.628) \end{aligned} \tag{121}$$

表35　貨幣需要関数のデータ

	GNP2 (兆円　)	RD2 (%　)	M2CD2 (−1) (兆円 (年央))	M2CD2 (兆円 (年央))
1966	+1.0003340D+02	+7.6300000D+00	+6.3061389D+01	+6.9995391D+01
1967	+1.1097360D+02	+8.2300000D+00	+6.9995391D+01	+7.6524672D+01
1968	+1.2599640D+02	+8.5700000D+00	+7.6524672D+01	+8.4627092D+01
1969	+1.4140240D+02	+8.9700000D+00	+8.4627092D+01	+9.3752768D+01
1970	+1.5391540D+02	+9.0400000D+00	+9.3752768D+01	+1.0405623D+02
1971	+1.6168810D+02	+7.5000000D+00	+1.0405623D+02	+1.2030671D+02
1972	+1.7662790D+02	+6.7600000D+00	+1.2030671D+02	+1.4048672D+02
1973	+1.8456930D+02	+9.5500000D+00	+1.4048672D+02	+1.4519984D+02
1974	+1.8379780D+02	+1.1300000D+01	+1.4519984D+02	+1.3809906D+02
1975	+1.9087470D+02	+9.2900000D+00	+1.3809906D+02	+1.4773034D+02
1976	+1.9963010D+02	+8.9100000D+00	+1.4773034D+02	+1.5663689D+02
1977	+2.1023440D+02	+7.0000000D+00	+1.5663689D+02	+1.6576812D+02
1978	+2.2124300D+02	+6.6800000D+00	+1.6576812D+02	+1.7745529D+02
1979	+2.3287830D+02	+8.2000000D+00	+1.7745529D+02	+1.9229276D+02
1980	+2.4213090D+02	+8.9800000D+00	+1.9229276D+02	+1.9892534D+02
1981	+2.5015880D+02	+8.3400000D+00	+1.9892534D+02	+2.1126031D+02
1982	+2.5824090D+02	+8.0100000D+00	+2.1126031D+02	+2.2678662D+02
1983	+2.6769970D+02	+7.4000000D+00	+2.2678662D+02	+2.4271747D+02
1984	+2.8139890D+02	+7.0400000D+00	+2.4271747D+02	+2.5945930D+02
1985	+2.9398180D+02	+6.5700000D+00	+2.5945930D+02	+2.7701868D+02
1986	+3.0183380D+02	+5.1700000D+00	+2.7701868D+02	+2.9579603D+02
1987	+3.1758940D+02	+4.2900000D+00	+2.9579603D+02	+3.2684964D+02

$\bar{R}^2=0.998$, $s=0.01866$, $DW=1.446$ ($h=1.444$)

推定期間　1966年度〜1987年度

この推定結果から(120)式の関係を用いて次の推定値が得られる。

$$\hat{\alpha}_0=0.513,\ \hat{\alpha}_1=1.18,\ \hat{\alpha}_2=-0.0536,\ \hat{\gamma}=0.406。$$

貨幣需要の利子弾力性をRD2の標本平均値7.88(%)で評価すれば−0.423となる。

OLSの結果のL-Rプロットは図30，正規確率プロットは図31に示されている。正規確率プロットは，誤差項が正規分布より長い尾をもつ分布に従っているということは示唆していないが，有界影響推定の目的は大きな残差の効果を小さくするだけでなく，L-Rプロットの#9のような影響点の効果を減ずることにある。

Huberのψと調整定数$H=1.345$を用いて，18節までで説明してきたM推定

$$\sum_{i=1}^{n}\psi\left(\frac{e_i}{\hat{\sigma}}\right)\mathbf{x}'_i=0 \tag{122}$$

と，本節の3つの有界影響推定

$$\sum_{i=1}^{n}(1-h_{ii})^{\frac{1}{2}}\psi\left[\frac{e_i}{s(1-h_{ii})^{\frac{1}{2}}}\right]\mathbf{x}'_i=0 \tag{123}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(1-h_{ii})^{\frac{1}{2}}\psi\left[\frac{e_i}{s(i)(1-h_{ii})^{\frac{1}{2}}}\right]\mathbf{x}'_i=0 \tag{124}$$

図30　OLS の L-Rプロット

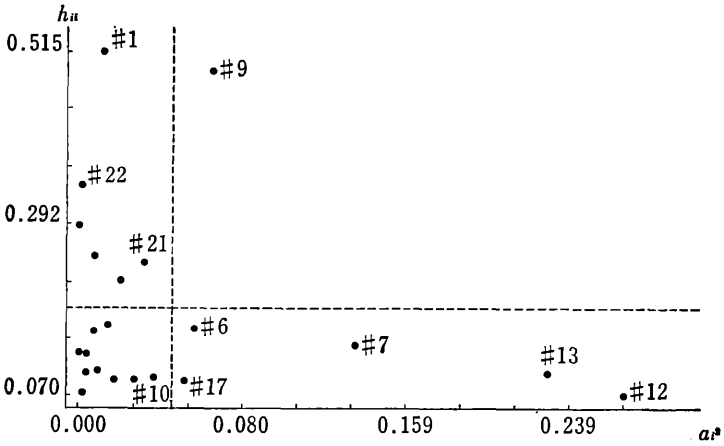
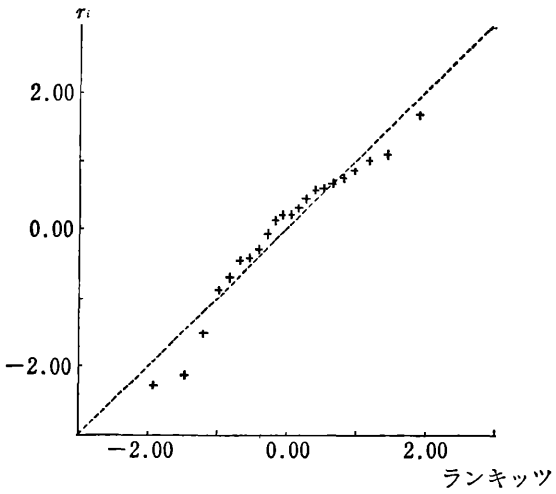


図31　貨幣需要関数の正規確率プロット



$$\sum_{i=1}^{n}(1-h_{ii})^{\frac{1}{2}}\psi\left[\frac{e_i}{\hat{\sigma}(1-h_{ii})^{\frac{1}{2}}}\right]\mathbf{x}'_i=0 \qquad (125)$$

$\hat{\sigma}$=MAD/0.6745 はステップ0の値で固定。

の4通りの推定値を示したのが表36，ダウンしたウエイトのみを示したのが表37である。表38にはOLS の影響点を Cook のDの大きさの順に並べてある。

前節までの頑健推定（(122)式の解）と有界影響推定の一番大きな相違は，最大の影響点である#9が有界影響において初めてウエイトダウンしたことである。#9は残差の大きさでは4番目であるが，h_{ii}=0.4902 と高い作用点であり，影響点としては一番大きい（表38参照）。h_{ii} の効果が比較

表36　パラメータ推定値

パラメータ	(122)式	(123)式	(124)式	(125)式
β_0	−0.30311	−0.28445	−0.28517	−0.28006
β_1	0.50475	0.49004	0.49025	0.48624
β_2	−0.022612	−0.022073	−0.022070	−0.021937
β_3	0.57700	0.58787	0.58783	0.59083
α_0	0.488	0.501	0.501	0.504
α_1	1.19	1.19	1.19	1.19
α_2	−0.0535	−0.0536	−0.0535	−0.0536
γ	0.423	0.412	0.412	0.410
R^2	1.000	1.000	1.000	1.000
s	0.0155	0.0166	0.0163	0.0164
DW	1.377	1.420	1.417	1.427
h	1.535	1.442	1.447	1.424

表37　ウエイト

期	(122)式		(123)式		(124)式		(125)式	
	初　期	最　終	初　期	最　終	初　期	最　終	初　期	最　終
6	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.9875	1.0
7	0.6961	0.7652	0.8032	0.8311	0.7594	0.8090	0.6474	0.8214
9	1.0	1.0	0.8902	0.8885	0.8559	0.8407	0.7175	0.8068
12	0.4963	0.4525	0.5939	0.6386	0.5167	0.5938	0.4787	0.6332
13	0.5351	0.4795	0.6308	0.6674	0.5612	0.6113	0.5085	0.6510
21	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.9877

表38　OLS の回帰診断

期	Cook の D	DFFITS	$W(i)$	a_i^2	h_{ii}
9	0.5489	−1.541	9.892	0.0647	0.4902
1	0.1125	0.6599	4.342	0.0114	0.5149
13	0.1222	−0.7858	3.790	0.2281	0.0971
7	0.1095	0.6999	3.448	0.1347	0.1350
12	0.0958	−0.7116	3.381	0.2651	0.0695
21	0.0613	−0.4917	2.590	0.0321	0.2431
6	0.0558	0.4752	2.371	0.0565	0.1562

可能な式は(122)と(125)式の推定結果である。構造パラメータ α_j と γ の推定値で比較すればどのケースもほとんど同じであるが，β_j の推定値は(122)と(125)式の間では若干異なっている。(125)式の初期ウエイトは OLS の h_{ii} が影響するから，(122)式の初期ウエイトより小さくなるが，IRLS において h_{ii} の値は変化し，高い作用点も少し低くなるから最終ウエイトは(122)式の最終ウエイトより大きくなっている。

外れ値ばかりでなく，高い作用点からパラメータ推定値への影響を減殺しようとする有界影響推定は，正規分布からの若干の乖離に対して頑健な推定とは異質な説明変数の影響力にも制限を加え

ようとする方法である。外れ値でなくても，h_{ii} の大きい高い作用点であるために影響点となり，$e_i/\{\hat{\sigma}(1-h_{ii})^{\frac{1}{2}}\}$ が絶対値で調整定数をこえればこの有界影響ではウエイトダウンする。モデルの仮定の若干の乖離に対して頑健なパラメータ推定という18節までの頑健推定ではない。有界影響推定の方が外れ値に対する頑健推定より秀れているかどうかを判断できる理論的・経験的蓄積をわれわれはまだもっていない。

わずかに，Hill and Holland〔19〕が，モンテカルロ実験によって，外れ値が説明変数の高い作用点を伴っているとき（すなわち a_i^2 も h_{ii} も大きい影響点であるとき），LAR や Andrews の ψ によるM推定量の OLSE に対する優位（有効性）は若干減少することを確認しているにすぎない。

20　おわりに

計量経済モデルにおける大きな残差はモデル定式化の誤まりであるとみなされ，正規分布より長い尾をもつ分布からの誤差項の可能性をこれまで計量経済学者は等閑視してきた。OLS を適用して大きな残差が現れれば ad hoc に説明変数を導入して，あるいはダミー変数で処理して，計量経済学者は正規分布の仮定と OLS から離れようとしなかった。

しかし実際には誤差項が正規分布に従わず，それより長い尾をもつ分布をしていることが多いということが認識されるようになってきた。このような状況においては正規分布からの若干の乖離にも敏感に反応する OLS ではなく，乖離に頑健であり，OLSE より高い有効性を与えるパラメータ推定法が有意義であることを筆者は本論文で強調してきた。なぜならば，頑健推定法は悪いモデルからの大きな残差にパラメータ推定法を適応させようとする方法ではなく，設定したモデルの確率メカニズムに適切な統計的方法であるからである。そして頑健推定は正規分布の仮定が正しかった場合にも有効性の損失の少ない推定量をもたらすからである。したがって頑健推定は古典的正規線形回帰モデルの OLS に対する代替的方法ではなく，OLS の弱点を補う方法である。

頑健推定は（有界影響推定も含めて）影響関数の概念を入れることによって回帰診断と結びつき，診断から処方へと進む分析過程の中で位置づけることができる。

本論文で触れなかった点は多い。頑健推定のなかでM推定量のみとりあげたが，線形モデルのランクづけされた残差にもとづくR推定量，順序統計量の線形結合によるL推定量に関しては Huber〔26〕，Hampel et al.〔16〕に詳しい。被説明変数が質的属性をもつ場合の頑健推定，同時方程式体系における頑健推定については，Koenker〔28〕に文献が若干紹介されているが，これらは今後の展開が待たれる分野でもある。

参考文献

〔1〕 Andrews, D. F., Bickel, P. J., Hampel, F. R., Huber, P. J., Rogers, W. H. and Tukey, J. W.: *Robust Estimation of Location: Survey and Advances*, Princeton University Press, 1972.

[2] Andrews, D. F.: A robust method for multiple linear regression, *Technometrics*, 16, 1974, 523–531.

[3] Beaton, A. E. and Tukey, J. W.: The fitting of power series, meaning polynomials, illustrated on band-spectroscopic data, *Technometrics*, 16, 1974, 147–185.

[4] Bickel, P. J.: One-step Huber estimates in the linear model, *Journal of the American Statistical Association*, 70, 1975, 428–434.

[5] Chatterjee, S. and Hadi, A. S.: *Sensitivity Analysis in Linear Regression*, John Wiley & Sons, 1988.

[6] Cook, R. D. and Weisberg, S.: *Residuals and Inference in Regression*, Chapman and Hall, 1982.

[7] D'Agostino, R. B.: An omnibus test of normality for moderate and large size samples, *Biometrika*, 58, 1971, 341–348.

[8] Dennis, J. E. and Welsch, R. E.: Techniques for nonlinear least squares and robust regression, *1976 Proc. Amer. Statist. Assoc. Statist. Comp. Section*, American Statistical Association, 83–87.

[9] Dutter, R.: Algorithms for the Huber estimation in multiple regression, *Computing*, 18, 1977. 167–176.

[10] Fair, R. C.: On the robust estimation of econometric model, *Annals of Economic and Social Measurement*, 314, 1974, 667–677.

[11] Goodall, C.: M-estimators of location: an outline of the theory, in *Understanding Robust and Exploratory Data Analysis*, Hoaglin, D. C. et al (ed.), John Wiley & Sons, 1983.

[12] Green, J. R. and Hegazy, Y. A. S.: Powerful modified-EDF goodness-of-fit tests, *Journal of the American Statistical Association*, 71, 1976, 204–209.

[13] Green, P. J.: Iteratively reweighted least squares for maximum likelihood estimation, and some robust and resistant alternatives, *Journal of the Royal Statistical Society*, B, 46, 1984, 149–192.

[14] Hampel, F. R.: A general qualitative definition of robustness, *Annals of Mathematical Statistics*, 42, 1971, 1877–1896.

[15] Hampel, F. R.: The influence curve and its role in robust estimation, *Journal of the American Statistical Association*, June, 1974, 383–393.

[16] Hampel, F. R., Ronchetti, E. M., Rousseeuw, P. J., and Stahel, W. A.: *Robust Statistics*, John Wiley & Sons, 1986.

[17] Handschin, E., Schweppe, F. C., Kohlas, J., and Fiechter, A.: Bad data analysis for power system state estimation, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, March/April, 1975, 329–337.

[18] Harvey, A. C.: A comparison of preliminary estimators for robust regression, *Journal of the American Statistical Association*, Dec. 1977, 910–913.

[19] Hill, R. W. and Holland, P. W.: Two robust alternatives to least-squares regression, *Journal of the American Statistical Association*, Dec. 1977, 828–833.

[20] Hinich, M. J. and Talwar, P. P.: A simple method for robust regression, *Journal of the American Statistical Association*, 70, 1975, 113–119.

[21] Hoaglin, D. C.: Using quantiles to study shape, in *Exploring Data Tables, Trends, and Shapes*, Hoaglin, D. C., Mosteller, F., and Tukey, J. W. (ed.), John Wiley & Sons, 1985.

[22] Hogg, R. V.: An introduction to robust procedures, *Communications in Statistics*, A6, 1977, 789–794.

〔23〕 Holland, P. W.: Robust regression using iteratively reweighted least-squares, *Communications in Statistics*, A6, 1977, 813–827.

〔24〕 Huber, P. J.: Robust estimation of a location parameter, *Annals of Mathematical Statistics*, 35, 1964, 73–101.

〔25〕 Huber, P. J.: Robust regression: asymptotics, conjectures and monte carlo, *Annals of Statistics*, 1973, 799–821.

〔26〕 Huber, P. J.: *Robust Statistics*, John Wiley & Sons, 1981.

〔27〕 Huber, P. J.: Minimax aspects of bounded-influence regression, *Journal of the American Statistical Association*, March. 1983, 66–80.

〔28〕 Koenker, R.: Robust methods in econometrics, *Econometric Reviews*, 1 (2), 1982, 213–255.

〔29〕 Krasker, W. S. and Welsch, R. E.: Efficient bounded-influence regression estimation, *Journal of the American Statistical Association*, Sep. 1982, 595–604.

〔30〕 Li, G.: Robust regression, in *Exploring Data Tables, Trends, and Shapes*, Hoaglin, D. C., Mosteller, F., and Tukey, J. W. (eds.), John Wiley & Sons, 1985.

〔31〕 Myers, R. H.: *Classical and Modern Regression with Applications*, Duxbury Press, 1986.

〔32〕 Pearson, E. S., D'Agostino, R. B. and Bowman, K. O.: Test for departure from normality: comparison of powers, *Biometrika*, 64, 1977, 231–246.

〔33〕 Royston, J. P.: Expected normal order statistics (exact and approximations), Algorithm AS 177, *Applied Statistics*, 31, 1982, 115–124.

〔34〕 Sall, J. P.: *Regression Analysis*, SAS Institute Inc. 1981. 新村秀一訳『SAS による回帰分析の実際』, 朝倉書店, 1986.

〔35〕 Shapiro, S. S. and Wilk, M. B.: An analysis of variance test for normality, *Biometrika*, 52, 1965, 591–611.

〔36〕 Weisberg, S.: *Applied Linear Regression*, 2nd ed., John Wiley & Sons, 1985.

〔37〕 Welsch, R. E.: Regression sensitivity analysis and bounded-influence estimation, in *Evaluation of Econometric Models*, Kmenta, J. and Ramsey, J. B. (ed.), Academic Press, 1980.

〔38〕 Wetherill, G. B.: *Regression Analysis with Applications*, Chapman and Hall, 1986.

(経済学部教授)