

Title	Ekelandの ε -変分原理とその応用II
Sub Title	Ekeland's ε -variational principle and its applications II
Author	立石, 寛
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1989
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.82, No.3 (1989. 10) ,p.581(169)- 602(190)
JaLC DOI	10.14991/001.19891001-0169
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19891001-0169

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

Ekeland の ϵ -変分原理とその応用 II

立 石 寛

序

- I Ekeland の ϵ -変分原理
- II 各種の同系定理
- III Caristi の不動点定理 (以上, 前号)
- IV 非円滑解析における Lagrange の未定乗数法
- V Palais-Smale の条件
- VI 順序集合上の ϵ -変分原理と半群の安定性 (以上, 本号)

IV 非円滑解析における Lagrange の未定乗数法⁽¹⁾

X, Y を Banach 空間, $F: X \rightarrow Y$ を C^1 -級の函数とする。このとき, Ljusternik の定理より, $z \in X$ が F の正則点であるとき, 集合 $Q = \{x \in S: f(x) = f(z)\}$ にたいして,

$$d_Q(x) \leq r \|F(x) - F(z)\| \text{ if } \|x - z\| \leq \epsilon$$

となる $r > 0, \epsilon > 0$ が存在する。そして, この結果は, 無限次元で定義された函数系の未定乗数法を証明するとき威力を発揮する。しかし, 十分に smooth でない函数系を考えるときには, この定理はもちろん用いることができない。そこで, 本章ではまず非円滑解析における Ljusternik の定理に対応した定理を Clarke の generalized gradient を用いて述べ, その後無限次元空間において定義される局所 Lipschitz 函数系の Lagrange の未定乗数法に論及する。まず, この章では, ある点がある函数の正則点であるということを Ljusternik の定理の結論が成り立つという意味で使うことにする。

定義 X を Banach 空間, S を X の部分集合, z を S の一点, f を z のある近傍で定義された実数値函数とする。いま, 集合

$$Q \equiv \{x \in S: f(x) = f(z)\}$$

にたいして,

$$d_Q(x) \leq r |f(x) - f(z)| \text{ if } x \in S, \|x - z\| \leq \epsilon$$

となる $\epsilon > 0, r > 0$ が存在するとき, z を S にたいする f の正則点といい, f は S にたいして z において正則であるという。また, Y が Banach 空間で, F が z のある近傍で定義された Y への写像

注 (1) Ioffe [25, 26] 参照。

のとき、 z が S にたいする F の正則点であるとは、函数 $f(x) \equiv \|F(x) - F(z)\|$ が S にたいして z において正則であることをいう。さらに、 $S = X$ の時には、単に z は f (または F) の正則点であるという。

定義 f を Banach 空間 X のある開部分集合 U で定義された局所 Lipschitz 実数値函数とする。このとき、任意の $x \in U$ にたいして、**generalized directional derivative** $f^0(x; \cdot): X \rightarrow R$ を次のように定義する。

$$f^0(x; v) = \limsup_{y \rightarrow x, t > 0, t \rightarrow 0} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t}$$

f の z における **generalized gradient** とは、集合

$$\{\zeta \in X^*: f^0(x; v) \geq \langle \zeta, v \rangle \text{ for all } v \in X\}$$

のことである。この章ではこの集合を $\partial f(x)$ と表すことにする。

定理 4.1 X をBanach 空間、 U を X の開部分集合、 S を U の閉部分集合、 z を S の一点とする。いま、 U 上で定義された Lipschitz 定数 L の Lipschitz 函数 $f: U \rightarrow R$ が、次の条件 i), ii) を満たすものとする。

i) $f(z) = 0$

ii) $x^* \in \partial |f(x)|, u^* \in (L+1)\partial d_s(x)$ for some $x \in S, \|x - z\| \leq \varepsilon, f(x) \neq 0$
 $\implies \|x^* + u^*\| \geq C$

となる実数 $C > 0, +\infty \geq \varepsilon > 0$ が存在する。

このとき、

$$x \in S, \|x - z\| < \varepsilon / (1 + (L/C)) \implies d_Q(x) \leq (1/C) |f(x)|$$

が成り立つ。特に、 z は S にたいする f の正則点である。

証明 定理の結論が、成り立たないものと仮定する。すると、次の条件を満たす $u \in S$ が存在することになる。

$$\|u - z\| < \varepsilon / (1 + (L/C)), d_Q(u) > (1/C) |f(u)|$$

したがって、適当に $t > 1$ をとると、次の不等式が成り立つ。

1) $\|u - z\| < \varepsilon / (1 + (tL/C))$

2) $d_Q(u) > (t/C) |f(u)| \equiv \gamma$

いま、 S の指標函数を $\delta(\cdot, S): X \rightarrow \{0, +\infty\}$ とし、函数 $g: U \rightarrow R \cup \{+\infty\}$ を次のように定義する。

$$g(x) = |f(x)| + \delta(x, S)$$

すると、 g は下に有界な下半連続函数であり、2)より、

$$g(u) \leq \inf_{v \in S} g(v) + (C/t)\gamma$$

が成り立つ。したがって、定理 1.1 iii) より、次の条件を満たす $x \in S$ が存在することになる。

$$3) \quad \|x-u\| \leq \gamma, \quad |f(v)| + (C/t) \|v-x\| > |f(x)| \quad \text{for all } v \in S/\{x\}$$

したがって、 $\phi(v) \equiv |f(v)| + (C/t) \|v-x\|$ とおくと

$$0 \in \partial\phi(x) + (L+1)\partial d_s(x)$$

となる。さらに、

$$\partial\phi(v) \subset \partial|f(v)| + (C/t)\partial\|v-x\|$$

が成り立ち、 $\partial\|v-x\|$ は、 X の双対空間の閉単位球の部分集合であるから、

$$\|x^*+u^*\| \leq C/t < C$$

となる $x^* \in \partial|f(x)|$ と、 $u^* \in (L+1)\partial d_s(x)$ が存在する。

また、2), 3) より $x \in Q$, すなわち $f(x) \neq 0$ であり、さらに i), 3) より

$$\begin{aligned} \|x-z\| &\leq \|u-z\| + \|x-u\| \\ &\leq \|u-z\| + (t/C)|f(u)| \leq \|u-z\| + (tL/C)\|u-z\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

以上のことは、仮定に矛盾する。

証了

定義 X を Banach 空間、 S をその部分集合、 x を S の一点とする。このとき、 S の x における正則錐 (normal cone) $N_s(x)$ を次のように、定義する。

$$N_s(x) = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda \partial d_s(x)$$

系 4.1 ii) の代わりに $x^* \in \partial|f(x)|$, $u^* \in N_s(x)$ for some $x \in S$, $\|x-z\| \leq \varepsilon$, $f(x) \neq 0$

$$\implies \|x^*+u^*\| \geq C$$

となる実数 $C > 0$, $+\infty \geq \varepsilon > 0$ が存在するものとする。このとき、定理 4.1 が成り立つ。

系 4.1 を用いて、通常の Ljusternik の定理を証明することができることを注意しておく。(詳しくは Ioffe[23])。したがって、上記定理は厳密な意味において Ljusternik の定理の一般化になっている。

さて、 X, Y を Banach 空間、 S を X の閉部分集合、 $f_0, \dots, f_n: X \rightarrow R$, $F: X \rightarrow Y$ を、局所 Lipschitz 関数とし、次の問題を考える。

$$4) \quad \text{minimize } f_0(x)$$

s. t.

$$5) \quad F(x) = 0, \quad f_i(x) \leq 0 \quad i=1, \dots, n.$$

$$6) \quad x \in S$$

ある X の点 x が、この問題の解であるための必要条件を求める方法は、通常、各関数を線形関数あるいは凸関数で近似し、凸解析等の諸理論を援用して求める。この過程において、次に述べる定理は重要な役割を担う。この定理は、ある制約付最小化問題が制約なしの最小化問題に帰着され得る

ことを述べたものである。以下の定理において、 $z \in X$ は、5), 6) の条件を満たす点とし、

$$I = \{i \in \{1, \dots, n\} : f_i(z) = 0\}$$

と定義する。

定理 4.2 z が S にたいする F の正則点とする。このとき、 z が 8)-10) の局所 (局所孤立) 解であるならば、十分大きな $r > 0$ にたいして、函数

$$M_r(x) = \max \{f_0(x) - f_0(z), \max_{i \in I} f_i(x)\} + r(\|F(x)\| + d_s(x))$$

は、 z において局所 (強い局所) 最小値をとる。

逆に、もし、ある $r > 0$ にたいして、 $M_r(x)$ が z において強い局所最小値をとるならば、 z は、4)-6) の局所孤立解になっている。

証明 定理の後半は明らかなので、前半のみ証明する。また、 z が 4)-6) の局所 (局所孤立) 解であるならば、 z は、次の問題の局所 (局所孤立) 解となっていることも明らかであろう。

$$7) \text{ minimize } f(x) \equiv \max \{f_0(x) - f_0(z), \max_{i \in I} f_i(x)\}$$

$$8) \text{ s.t. } F(x) = 0, x \in S.$$

そこで、任意の $x \in V \cap S$ にたいして、

$$9) f(u) \geq f(z)$$

$$10) F(u) = 0, \|x - u\| \leq q \|F(x)\|$$

という条件を満たす $u \in S$ が存在する $q > 0$ と z の近傍 V を選び、 $C > 0$ を F と f の V における共通の Lipschitz 定数とし、 $r_1 \geq qC$ となる r_1 をとる。すると、任意の $x \in V \cap S$ にたいして、 $u \in S$ を 9), 10) を満たすようにとれば、

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x) - f(u) + f(z) \\ &\geq -C \|x - u\| + f(z) \\ &\geq -Cq \|F(x)\| + f(z) \\ &\geq -r_1 \|F(x)\| + f(z) \end{aligned}$$

となり、 z は、次の問題の局所解となることがわかる。

$$11) \text{ minimize } f(x) + r_1 \|F(x)\|$$

$$\text{s. t. } x \in S$$

また、 z が 7)-8) の局所孤立解のときには、 r_1 を十分大きくとれば、 z は 11) の局所孤立解となることも明らかであろう。

次に、 $x \in S$ は、 $d_s(x) = 0$ と同値であるから、 z は S にたいする $d_s(\cdot)$ の正則点であり、

$f(x)+r_1\|F(x)\|$ は Lipschitz 函数であるから、上と同様の議論によって、 z が次の問題の局所解（局所孤立解）となる $r_2>0$ が存在する。

$$\text{minimize } f(x)+r_1\|F(x)\|+r_2d_s(x)$$

ここで、 $r=\max\{r_1, r_2\}$ とおけば、 z が $M_r(x)$ の局所（強い局所）最小点であることがわかる。

証了

次に、 z が 4)-6) の解であるための必要条件を述べるが、その前に新しい概念を一つ導入しておく。

定義 $f(x)$ を z のある近傍で、定義された実数値関数とする。このとき、 $\phi: X \rightarrow R$ が f の z における一次近似（first order approximation）であるとは、 ϕ が次の条件を満たすことをいう。

$$\phi(tx)=t\phi(x) \text{ for all } t \geq 0, x \in X.$$

$$\limsup_{t>0, t \rightarrow 0} t^{-1}(f(z+th)-f(z)-t\phi(h)) \leq 0 \text{ for all } h \in X$$

補題 4.3 ϕ を f の z における一次近似とする。もし、 f が z において局所最小値をとるならば、 ϕ は X の原点において、全域における強い最小値をとる。したがって、 ϕ が凸函数のときには、

$$0 \in \partial\phi(0)$$

が成り立つ。

証明 任意の $h \in X$ にたいして、 ϕ が f の z における一次近似であることから

$$f(z+th)-f(z)=t\phi(h)+r(t)$$

と表すと、 $r(t)$ は

$$\limsup_{t>0, t \rightarrow 0} t^{-1}r(t) \leq 0$$

を満たす。いま、 $\phi(h)<0$ となる $h \in X$ が存在するものと仮定すると、この h にたいして、十分小さい $t>0$ を取ると、

$$t\phi(h)+r(t)<0$$

となる。したがって、十分小さい $t>0$ にたいして、

$$f(z+th)-f(z)<0$$

となるが、これは、 f が z において局所最小値をとることに矛盾する。

証了

定理 4.4 次の a), b) を仮定する。

a) $f_0, \dots, f_n, \|F(\cdot)\|, d_s(\cdot)$ の連続な凸一次近似 $\phi_0, \dots, \phi_n, \phi, \rho$ が存在する。

b) z は S にたいする F の正則点である。

このとき、 z が 4)-6) の局所解であるならば、次の条件を満たす $\lambda_0 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0, r > 0$ が存在する。

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$$

$$\lambda_i f_i(z) = 0 \text{ for } i=1, \dots, n$$

$$0 \in \sum_{i=0}^n \lambda_i \partial \phi_i(0) + r \partial \phi(0) + r \partial \rho(0)$$

証明 定理 4.2, 補題 4.3 より明らか。

次に, 上記定理の特殊な場合として Y の次元が有限 ($\dim Y = m$) である場合について述べる。このとき, F は

$$12) F(x) = (f_{n+1}(x), \dots, f_{n+m}(x))$$

と表すことができる。ここで各 $f_{n+i} (i=1, \dots, m)$ は, z のある近傍で Lipschitz 函数とする。

定理 4.5 F を 12) の形の函数とし, ϕ_0, \dots, ϕ_n を f_0, \dots, f_n に対する凸連続な一次近似とする。このとき, もし z が 4)-6) の局所解であるならば, 次の条件を満たす実数 $\lambda_0, \dots, \lambda_{n+m}$ が存在する。

$$13) \sum_{i=0}^{n+m} |\lambda_i| > 0$$

$$14) \lambda_i \geq 0 \text{ for } i=0, \dots, n$$

$$\lambda_i f_i = 0 \text{ for } i=0, \dots, n$$

$$15) 0 \in \sum_{i=0}^n \lambda_i \partial \phi_i(0) + \sum_{i=n+1}^{n+m} \lambda_i \partial f_i(z) + N_S(z)$$

証明 z が S にたいする F の正則点であるときは, 定理 4.4 より明らか。また, 正則点でないときは, 系 4.1 より,

$$0 \in \lambda_{n+1} \partial f_{n+1}(z) + \dots + \lambda_{n+m} \partial f_{n+m}(z) + N_S(z)$$

となるすべてが 0 でない実数 $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{n+m}$ が存在する。したがって, 定理が成り立つことは明らか。 証了

上記定理における一次近似として, 特に generalized directional derivative を用いると, Clarke [17] で得られた結果になることを注意しておく。

V Palais-Smale の条件

コンパクト集合上で, 定義された連続実数値関数は最大値と最小値が存在することはよく知られている。しかしながら, ある種の変分問題を解くとき, 多くの場合においてその定義域のコンパクト性は保証されない。この章では, そのような場合に大変有効な Palais-Smale の条件について述べる。

定義 X を Banach 空間, $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ を弱微分可能な函数とし, M は X の部分集合とする. F が M 上で Palais-Smale の条件を満たすとは,

- 1) $|F(x_n)| \leq C < +\infty$ for all n .
- 2) $\overset{(2)}{\delta F}(x_n) \rightarrow 0, \delta F(x_n) \neq 0$ for all n

を満たす M の点列 $\{x_n\}$ にたいして,

$$\delta F(x^*) = 0$$

となる $x^* \in cl \{x_1, x_2, \dots\}$ が存在することをいう.

定理 5.1 (Ekeland [20]) X を Banach 空間とし, $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ を次の条件を満たすものとする.

- 3) 連続, 下に有界かつ弱微分可能で, $\delta F(\cdot)$ は任意の線分上で連続.
- 4) Palais-Smale の条件を満たす.

このとき, F は最小値をもつ.

証明 定理 1.3 より,

$$\delta F(x_n) \rightarrow 0.$$

$$F(x_n) \rightarrow \inf F$$

となる点列 $\{x_n\}$ が存在する. 以下, 二つの場合に分けて考える.

Case 1 $\delta F(x_{n'}) \neq 0$ for all n' となる $\{x_n\}$ の部分列 $\{x_{n'}\}$ が存在する場合.

このとき, Palais-Smale の条件より, $\delta F(x^*) = 0$ となる $x^* \in cl \{x_1, x_2, \dots\}$ が存在する. 仮定より, F は連続であるから,

$$F(x^*) = \lim F(x_{n'}) = \inf F.$$

したがって, この x^* において F は最小値をとることがわかる.

Case 2 有限個の n を除いて, $\delta F(x_n) = 0$ の場合.

$$S = \{x \in X: \delta F(x) = 0\}$$

とおく, 一般性を失うことなく,

$$S \neq X, \delta F(x_n) = 0 \text{ for all } n$$

の場合についてのみ考えればよい. そこで, まず $z \in S$ を任意に固定し, 実数 t' を次のように定義する.

$$t' \equiv \inf \{t \in [0, 1]: (1-t)x_n + tz \in S\}$$

$\delta F(\cdot)$ が線分 $[x_n, z]$ 上で, 連続であることから,

$$3) x_n^1 \equiv (1-t_1)x_n + t_1z \in S$$

$$4) x_n^2 \equiv (1-t_2)x_n + t_2z \in S$$

$$5) |F(x_n^2) - F(x_n^1)| \leq 1/n.$$

注 (2) この章では, ある函数 F の弱微分を δF と表すことにする.

$$6) \quad \|\delta F(x_n^2)\| \leq 1/n$$

となるように、 $t_1 \leq t' \leq t_2$ を選ぶことができる。 t' の定義より、

$$\delta F((1-t)x_n + tz) = 0 \quad \text{for all } t \leq t'$$

であるから、

$$F(x_n^1) = F(x_n)$$

である。したがって、5) より、

$$F(x_n^2) \rightarrow \inf F.$$

また、4) より、

$$\delta F(x_n^2) \neq 0 \quad \text{for all } n.$$

さらに、6) より、

$$\delta F(x_n^2) \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow +\infty$$

であるから、Case 1 の場合に帰着する。

証了

次に、峠の補題と呼ばれる定理を述べる。この定理は、ある Banach 空間で定義された実数値関数の鞍点が臨界点として存在することを保証するものである。

定理 5.2 (Ambrosetti, Rabinowitz [1]) X を Banach とし、 $F: X \rightarrow R$ は次の条件を満たすものとする。

7) 連続かつ弱微分可能。

8) $\delta F: X \rightarrow X^*$ は、 X の強位相と X^* の *弱位相について連続。

9) $m(\alpha) \equiv \inf_{\|x\|=\alpha} F(x) > F(0)$

という条件を満たす、ある $\alpha > 0$ が存在する。

10) $\|z\| > \alpha$ となる適当な $z \in X$ について、 $F(z) < m(\alpha)$ 。

11) F は集合 $\{x \in X: F(x) \geq m(\alpha)\}$ 上において、Palais-Smale の条件を満たす。

このとき、

$$F(x^*) \geq m(\alpha), \quad \delta F(x^*) = 0.$$

となる $x^* \in X$ が存在する。

証明 (丸山 [53]) まず、

$$M = \{\gamma \in C([0, 1], X) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = z\}$$

とおけば、 M は一様ノルムの下に完備距離空間になる。さらに、函数 $f: M \rightarrow R$ を

$$f(\gamma) = \max_{t \in [0, 1]} F(\gamma(t))$$

と定義する。この函数 f について、定理 1.3 を適用する。そこで、この f が下半連続で下に有界であることを確かめておく。

i) f が下半連続であること。

$f_t: M \rightarrow R (0 \leq t \leq 1)$ を

$$f_t(\gamma) = F(\gamma(t))$$

とおけば、 F の連続性より、 f_t は連続であり、

$$f(\gamma) = \max_{t \in [0, 1]} f_t(\gamma)$$

であるから、 f は下半連続である。

ii) f が下に有界であること。

γ は、 0 と z を結ぶ連続な曲線であるから、9), 10) より、

$$\|\gamma(t_r)\| = \alpha$$

となる $t_r \in [0, 1]$ が存在する。この t_r にたいして、

$$m(\alpha) \leq F(\gamma(t_r)) \leq f(\gamma) \text{ for all } \gamma \in M$$

が成り立つので、 f は下に有界である。

定理 1.3 より、任意の $\epsilon > 0$ にたいして、

$$12) f(\gamma^*) \leq \inf_{\gamma \in M} f(\gamma) + \epsilon$$

$$13) f(\gamma) > f(\gamma^*) - \epsilon \|\gamma - \gamma^*\| \text{ for all } \gamma \in M \setminus \{\gamma^*\}$$

という条件を満たす $\gamma^* \in M$ が存在する。

次に、 $h(0) = h(1) = 0$ なる $h \in C([0, 1], X)$ を考えると、任意の $s > 0$ にたいして、

$$\gamma^* + sh \in M$$

である。そこで、 f が弱微分可能であることに注意して、 f の γ^* における h 方向の方向微分を計算することにする。まず、13) より、

$$f(\gamma^* + sh) - f(\gamma^*) > -\epsilon \|sh\|$$

となるから、

$$14) s^{-1} \{f(\gamma^* + sh) - f(\gamma^*)\} > -\epsilon \|h\|$$

14) の $\{\dots\}$ の中を計算すると、

$$15) f(\gamma^* + sh) - f(\gamma^*)$$

$$= \max_{t \in [0, 1]} F(\gamma^*(t) + sh(t)) - \max_{t \in [0, 1]} F(\gamma^*(t))$$

$$= \max_{t \in [0, 1]} \{F(\gamma^*(t)) + s \langle \delta F(\gamma^*(t)), h(t) \rangle + o(sh(t))\} - \max_{t \in [0, 1]} F(\gamma^*(t))$$

$$= \max_{t \in [0, 1]} \{F(\gamma^*(t)) + s \langle \delta F(\gamma^*(t)), h(t) \rangle\} + o(s) - \max_{t \in [0, 1]} F(\gamma^*(t))$$

ここで、

$$\theta: t \rightarrow F(\gamma^*(t))$$

$$\eta: t \rightarrow \langle \delta F(\gamma^*(t)), h(t) \rangle$$

とおけば、仮定より、これらは $[0, 1]$ 上で連続である。さらに、 $g: C([0, 1], R) \rightarrow R$ を

$$g(\phi) = \max_{t \in [0, 1]} \phi(t)$$

とすると、この函数は凸、連続である。したがって、劣微分可能であり、 $[0, 1]$ 上の Radon 測度の空間を M と書けば、それは、

$$16) \partial g(\phi) = \{ \mu \in M : \mu \geq 0, \int_0^1 d\mu = 1, \text{supp } \mu \subset T\phi \}$$

と表すことができる。ここで、 $T\phi = \{ t \in [0, 1] : \phi(t) = g(\phi) \}$ 。

14), 15), 16) より、

$$\begin{aligned} 17) \quad & -\varepsilon \max_{t \in [0, 1]} \|h(t)\| \\ & \leq \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} \{ f(r^* + sh) - f(r^*) \} \\ & = \lim_{s \rightarrow 0} s^{-1} \{ g(\theta + s\eta) - g(\theta) \} \\ & = \max_{\mu \in \partial g(\theta)} \langle \mu, \eta \rangle \\ & = \max_{\mu \in \partial g(\theta)} \int_0^1 \langle \delta F(r^*(t)), h(t) \rangle d\mu \end{aligned}$$

ここで、

$$H \equiv \{ h \in C([0, 1], X) : \|h\| \leq 1, h(0) = h(1) = 0 \}$$

として、17) の両辺を H 上で \inf をとると、

$$18) \quad -\varepsilon \leq \inf_{h \in H} \max_{\mu \in \partial g(\theta)} \int_0^1 \langle \delta F(r^*(t)), h(t) \rangle d\mu$$

$\partial g(\theta)$ が $*$ 弱コンパクトかつ凸であることから、Ky Fan の Minimax ⁽³⁾ 定理を適用できて、

$$19) \quad -\varepsilon \leq \max_{\mu \in \partial g(\theta)} \inf_{h \in H} \int_0^1 \langle \delta F(r^*(t)), h(t) \rangle d\mu$$

ここで、19) に現れる積分を $C([0, 1], X)$ 上の作用素とみれば、

$$20) \quad S : h \rightarrow \int_0^1 \langle \delta F(r^*(t)), h(t) \rangle d\mu$$

は有界線形で、

$$\begin{aligned} 21) \quad \|S\| &= \sup_{h \in C, \|h\| \leq 1} \left| \int_0^1 \langle \delta F(r^*(t)), h(t) \rangle d\mu \right| \\ &= \int_0^1 \|\delta F(r^*(t))\| d\mu \end{aligned}$$

となる。しかしながら、仮定より、

$$0, 1 \notin T\theta$$

であり、したがって

$$0, 1 \notin \text{supp } \mu.$$

このことから、21) の \sup は H 上でとれば、十分であり、

注 (3) 高橋 [50] などを参照せよ。

$$\begin{aligned}
22) \quad & \sup_{h \in H} \left| \int_0^1 \langle \delta F(\gamma^*(t)), h(t) \rangle d\mu \right| \\
& = \sup_{h \in H} \pm \int_0^1 \langle \delta F(\gamma^*(t)), h(t) \rangle d\mu \\
& = \int_0^1 \|\delta F(\gamma^*(t))\| d\mu
\end{aligned}$$

を得る。19) と 23) より、

$$\begin{aligned}
23) \quad & -\varepsilon \leq \max_{\mu \in \partial g(\theta)} - \int_0^1 \|\delta F(\gamma^*(t))\| d\mu \\
& = -\min_{\mu \in \partial g(\theta)} \int_0^1 \|\delta F(\gamma^*(t))\| d\mu
\end{aligned}$$

23) の右辺の \min は、

$$\min_{t \in T\theta} \|\delta F(\gamma^*(t))\|$$

を実現する $t^* \in T\theta$ に質量 1 をおく Dirac 測度による $\|\delta F(\gamma^*(t))\|$ の積分に等しいから、

$$-\varepsilon \leq -\min \{ \|\delta F(\gamma^*(t))\| : t \in T\theta \}$$

となる。よって、この t^* においては、

$$F(\gamma^*(t^*)) = g(u, \gamma^*) = \max_{t \in [0, 1]} F(\gamma^*(t)) \|\delta F(\gamma^*(t^*))\| \leq \varepsilon$$

が成り立つ。そこで、 $\varepsilon = 1/n$ ($n=1, 2, \dots$) とし、それにたいして、 $\gamma^*(t^*)$ に対応するものを、 x_n とおく。上記推論より、

$$\begin{aligned}
m(\alpha) & \leq F(x_n) \\
& \leq \inf_{\gamma \in M} f + 1/n \\
& = \inf_{\gamma \in M} \max_{t \in [0, 1]} F(\gamma(t)) + 1/n \\
\delta F(x_n) & \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

ある n について、 $\delta F(x_n) = 0$ ならば既に所望の帰結が得られたことになるので、一般性を失うことなく、

$$\delta F(x_n) \neq 0 \text{ for all } n$$

と仮定してよい。この場合は、仮定より、

$$\delta F(x^*) = 0$$

となる $x^* \in cl\{x_1, x_2, \dots\}$ が存在する。

証了

最後に、上で述べた峠の補題の応用として、次の形の非線形楕円方程式を考えることにする。

$$24) \quad \Delta u + u^p = 0 \quad (D \text{ の内部})$$

$$u = 0 \quad (D \text{ の境界上})$$

ここで、 D は、 R^n ($n \geq 3$) の中の滑らかな境界をもつ有界領域

上記偏微分方程式は恒等的に 0 という解をもつが、それ以外には、解はないであろうかという問題を考える。すなわち、自明でない解の存在することを示すわけである。このことを示すには、峠の補題が決定的な役割を担うのである。

定理 5.3 (増田 [51]) $1 < \delta < (n+2)/(n-2)$ であれば、上の問題は、正の解をもつ。

証明 正の解を求めているのであるから、上の問題の代わりにつぎの問題を考えればよい。

$$25) \Delta u + |u|^{\delta} = 0 \quad (D \text{ の内部})$$

$$u = 0 \quad (D \text{ の境界上})$$

いま、 $H_0^1(D)$ (ノルムは $\|\nabla u\|_{L^2}$) 上の実数値函数 f を次のように定義する。

$$f(u) = \int_D \left[\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - |u|^{\delta} u / (\delta + 1) \right] dx$$

上記問題 25) の解は、上の汎函数の停留点として求められる。したがって、この汎函数に、峠の補題を適用する。まず、任意の $u \in H_0^1$ にたいして、 f が有限値に値をとることを確かめる。

H_0^1 でのノルムのとりかたから、

$$\int_D |\nabla u|^2 dx < +\infty \text{ for all } u \in H_0^1$$

となることは、明らかである。また、ソボレフの補題と仮定より⁽⁴⁾

$$\int_D |u|^{\delta+1} dx \leq M \|u\|^{\delta+1}$$

とすることができる。次に、Palais-Smale の条件を確かめることにする。そこで、

$$|f(u_j)| < M, \quad \delta f(u_j) \rightarrow 0 \quad (\text{強収束})$$

となる $\{u_j\} \subset H_0^1(D)$ をとる。従って、この点列は、

$$26) \sup_{\zeta \in H_0^1, \zeta \neq 0} \left\{ \int_D [\nabla u_j \cdot \nabla \zeta - |u_j|^{\delta} \zeta] dx / \|\zeta\| \right\} \rightarrow 0$$

という条件を満たしている。ここで、特に $\zeta = u_j$ ととり、 $\|u_j\| = c_j$ とおくと、

$$\frac{1}{c_j} \int [|\nabla u_j|^2 - |u_j|^{\delta} u_j] dx \rightarrow 0$$

また、 u_j のとりかたから、積分

$$\int \left[\frac{1}{2} |\nabla u_j|^2 - \frac{1}{\delta+1} |u_j|^{\delta} u_j \right] dx$$

は有界になる。上記二式より、積分

$$\frac{1-\delta}{2c_j} \int |\nabla u_j|^2 dx$$

が有界になることがわかる。この積分は、 $(1-\delta)c_j/2$ に等しいから、仮定より、 $\{c_j\}$ は有界となる。したがって、 $\{u_j\}$ は Hilbert 空間 H_0^1 における有界集合である。他方、 $\delta+1 \leq p < 2n/(n-2)$

注(4) 溝畑 [53] などを参照せよ。

なる任意の p にたいして、ソボレフの補題より、 H_0^1 の有界集合は、 L^p の相対コンパクト集合の中に、埋め込むことができるので、 H_0^1 で弱収束し、 L^p で強収束する $\{u_j\}$ の部分列が存在する。これをまた、 $\{u_j\}$ と書くことにする。26) より、任意の $\varepsilon > 0$ にたいして、十分大きい j をとれば、

$$\left| \int_D [\nabla u_j \nabla \zeta - |u_j| \zeta] dx \right| \leq \varepsilon \|\zeta\| \leq \frac{1}{4} \|\zeta\|^2 + \varepsilon^2$$

となる。他方、Hölder の不等式から、

$$\int_D |u_j|^q |\zeta| dx \leq \|u_j\|_{L^{\delta+1}} \|\zeta\|_{L^{\delta+1}}.$$

上記二不等式において、 $\zeta = u_j - u_k$ とおくと、

$$\begin{aligned} & \int_D |\nabla u_j - \nabla u_k|^2 \\ &= \int_D [\nabla u_j \cdot \nabla (u_j - u_k) - |u_j|^q (u_j - u_k)] dx \\ & - \int_D [\nabla u_k \cdot \nabla (u_j - u_k) - |u_k|^q (u_j - u_k)] dx \\ & + \int_D (|u_j|^q - |u_k|^q) (u_j - u_k) dx \\ & \leq \frac{1}{2} \|u_j - u_k\|^2 + 2\varepsilon^2 + (\|u_j\|_{L^{\delta+1}}^q + \|u_k\|_{L^{\delta+1}}^q) \|u_j - u_k\|_{L^{\delta+1}} \end{aligned}$$

よって、

$$\|u_j - u_k\|^2 \leq 4\varepsilon^2 + 2(\|u_j\|_{L^{\delta+1}}^q + \|u_k\|_{L^{\delta+1}}^q) \|u_j - u_k\|_{L^{\delta+1}}$$

したがって、

$$\lim_{j \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty} \|u_j - u_k\|^2 \leq 4\varepsilon^2.$$

ε は、任意であったから、 $\{u_j\}$ は H_0^1 における Cauchy 点列である。したがって、Palais-Smale の条件は満たされている。次に、峠の補題を用いて、自明でない解を求めることにする。そのためには次の二点を確かめればよいであろう。

i) $\|u\| = r \Rightarrow f(u) \leq c_0$

となる正数 r, c_0 が存在する。

ii) $\|u_0\| > r, f(u_0) \leq 0$ となる $u_0 \in H_0^1(D)$ が存在する。まず、i) から確かめることにする。そこで、 $\|u\| = r$ となる任意の r, u にたいして、ソボレフの補題より、

$$\begin{aligned} f(u) &= r^2/2 \int_D |u|^q u dx / (\delta+1) \\ &\geq r^2/2 - M r^{\delta+1} \end{aligned}$$

したがって、 r を十分小さくとれば、 $c_0 = r^2/4$ として i) が成り立つことがわかる。次に、ii) であるが、まず、 v として、 D の内部で正、 D の境界上で、0 となる任意の十分に滑らかな実数値函数をとる。いま、 $u_0 = \lambda v$ とおくと、十分大きな λ にたいして、

$$\|u_0\| = \lambda \|v\| > r,$$

$$f(u_0) = \frac{1}{2} \lambda^2 \|v\|^2 - \frac{\lambda^{\delta+1}}{\delta+1} \int_D |v|^\delta v dx$$

$$\leq 0$$

となる。したがって、ii) も満たすことがわかる。峠の補題より、

$$f(u) \geq c_0 > 0$$

となる f の停留点 $u \in H_0^1(D)$ が存在する。ゆえに、 $u \neq 0$ 。 u が f の停留点であるから、 u が (25) の一般化された解になっていることがわかる。後は通常の議論によって、 u が (25) の解になっていることがわかる。 証了

VI 順序集合上の ϵ -変分原理と半群の安定性 ⁽⁵⁾

この章では、最初に第 I 章で述べた Ekeland の ϵ -変分原理における基本的な考え方をより抽象的な順序集合上で再現した Brézis-Browder [7] の諸定理について述べ、さらに、この定理の応用として、半群の安定性定理について述べることにする。以下、この章で、ある集合 X が順序集合であるという場合、 X 上に、半順序 \leq が定義されているものとする。また、 $\{x_n\} \subset X$ が増加的であるとは、

$$x_n \leq x_{n+1} \text{ for all } n \in N$$

が成り立つこととする。さらに、この章では、簡単化のために $S(x) \subset X$ を次の条件を満たす集合とする。

$$S(x) = \{y \in X : x \leq y\}.$$

定理 6.1 X を順序集合とし、函数 $F : X \rightarrow R$ が次の条件を満たすものとする。

- 1) $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$
- 2) $F(x_n) < C < +\infty$

となる定数 C が存在する任意の増加点列 $\{x_n\} \subset X$ にたいして、

$$x_n \leq y \text{ for all } n$$

となる $y \in X$ が存在する。

- 3) 任意の $x \in X$ にたいして、 $x \leq u$ 、 $F(x) < F(u)$ となる $u \in X$ が存在する。

このとき、任意の $x \in X$ にたいして、 $F(S(x)) \subset R$ は非有界である。

証明 まず、 $\rho : X \rightarrow R \cup \{+\infty\}$ を、

$$\rho(x) = \sup_{b \in S(x)} F(b)$$

と定義する。いま、上記定理の結論が成り立たないものと仮定すると、 $\rho(x) < +\infty$ となる $x \in X$ 存

注 (5) Brézis Browder [7]

在することになる。そこで、 X 上の点列 $\{x_n\}$ を次の規則によって、帰納的に取り出すことにする。

$$x_1 = x$$

$$x_{n+1} \in S(x_n), \rho(x_n) \leq F(x_{n+1}) + (1/n) \text{ for all } n$$

すると、

$$F(x_{n+1}) \leq \rho(x) < +\infty \text{ for all } n$$

となることと 2) より、

$$4) \ x_n \leq y \text{ for all } n$$

となる $y \in X$ が存在する。さらに、3) より、

$$5) \ y \leq u, F(y) < F(u)$$

となる $u \in X$ が存在することになる。4), 5) より、 $x_n \leq u$ であるから、

$$F(u) \leq \rho(x_n) \text{ for all } n$$

また、4) より、 $x_{n+1} \leq y$ であるから、

$$\begin{aligned} F(u) \leq \rho(x_n) &\leq F(x_{n+1}) + 1/n \\ &\leq F(y) + 1/n \text{ for all } n \end{aligned}$$

となり、 $F(u) \leq F(y)$ が成り立つが、これは、5) に矛盾する。

証了

定理 6.2 X を順序集合とし、 $F : X \rightarrow R$ を次の条件を満たす、上に有界な函数とする。

$$6) \ x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$$

7) 任意の増加点列 $\{x_n\} \subset X$ にたいして、 $x_n \leq y$ for all n となる $y \in X$ が存在する。

このとき任意の $a \in X$ にたいして、次の条件を満たす a' が存在する。

$$a \leq a', F(S(a')) = \{F(a')\}$$

証明 $X = S(a)$ として、定理 3.1 を適用すると、仮定より、(1), (2) は満たされているが、その定理の結論は満たされない。したがって、(3) が成り立たないことになり、これは、定理 6.2 の結論が成り立つことを意味する。

証了

定理 6.3 X を順序集合とし、 $F : X \rightarrow R$ を、次の条件を満たす上に有界な函数とする。

$$8) \ x \leq y, x \neq y \Rightarrow F(x) < F(y)$$

9) 任意の増加点列 $\{x_n\} \subset X$ にたいして、 $x_n \leq y$ for all n となる $y \in X$ が存在する。

このとき、任意の $a \in X$ にたいして、次の条件を満たす $a' \in X$ が存在する。

$$a \leq a', S(a') = \{a'\}.$$

証明 定理 6.2 より明らか。

証了

定理 6.4 X を順序集合とし、函数 $F : X \rightarrow R$ が、次の条件を満たすものとする。

10) $x \leq y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$

11) $F(x_n) \leq C < +\infty$ for all n

となる定数 C が存在する任意の増加点列 $\{x_n\} \subset X$ にたいして、

$$x_n \leq y \text{ for all } n$$

$$F(x_n) \rightarrow F(y) \text{ as } n \rightarrow \infty$$

という条件を満たす $y \in X$ が存在する。

12) 任意の $x \in X$, $\epsilon > 0$ にたいして、

$$x \leq x', F(x) < F(x') < F(x) + \epsilon$$

という条件を満たす $x' \in X$ が存在する。

このとき任意の $x \in X$ にたいして $F(S(x)) = [F(x), +\infty)$ が成り立つ。

証明 任意の $x \in X$, $T > F(x)$ をとり、 $X_0 = \{z \in S(x) : F(z) \leq T\}$ とおく。 $\{x_n\}$ を X_0 における任意の増加点列とすると、11) より、

13) $x_n \leq y$ for all n , $F(x_n) \rightarrow F(y)$ as $n \rightarrow \infty$

となる $y \in X$ が存在する。13) より、 $F(y) \leq T$ となり $y \in X_0$ であるから、定理 6.2 より次の条件を満たす $a' \in X_0$ が存在する。

$$F(S_{X_0}(a')) = \{F(a')\}$$

ここで、もしも、 $F(a') < T$ であるならば、仮定 12) に矛盾するから $F(a') = T$ となる。

証了

定理 6.5 X をその上半順序が定義されている完備距離空間とし、 $F : X \rightarrow R$ をつぎの条件を満たす下に有界な函数とする。

14) 任意の $x \in X$ にたいして、 $S(x)$ は閉。

15) $x \leq y$, $x \neq y \Rightarrow F(x) > F(y)$.

16) $\{x_n\} \subset X$ が増加点列ならば、 $\text{cl}\{x_n\}$ はコンパクト。

このとき、任意の $a \in X$ にたいして、

$$a \leq a', S(a') = \{a'\}$$

となる $a' \in X$ が存在する。

証明 定理 6.3 を適用する。 $\{x_n\}$ を増加点列とすると 16) より、部分列 $\{x_{n'}\}$ と $y \in X$ が存在して

$$x_{n'} \rightarrow y \text{ as } n' \rightarrow +\infty$$

とすることができる。さらに、任意の $n \in N$ にたいして、 $n' \geq n$ となるように n' をとれば、 $x_n \leq x_{n'}$

とすることができるので、14) より

$$y \in S(x_n) \text{ for all } n$$

が成り立つ。

証了

最後に、上記定理より Ekeland の ϵ -変分原理を出す。したがって、いままで述べた定理は、Ekeland の定理の一般化になっていることがわかるであろう。

定理 6.6 X を完備距離空間とし、 $F: X \rightarrow \mathbb{R}$ を下に有界な下半連続関数とする。このとき、つぎの条件を満たす $a \in X$ が存在する。

$$F(x) - F(a) > -d(a, x) \text{ for all } x \neq a.$$

証明 まず、 X 上の半順序 \leq を、次のように定義する。

$$17) \quad x \leq y \Leftrightarrow F(y) - F(x) \leq -d(x, y)$$

任意の増加点列 $\{x_n\}$ にたいして、 $\{F(x_n)\}$ は \mathbb{R} における減少点列で下に有界であるから、収束点列になる。したがって、17) より $\{x_n\}$ は Cauchy 点列となる。よって、定理 6.5 が適用できて所望の結論が得られる。

証了

次に、ある完備距離空間における非線形半群の挙動に関する情報を与えてくれる定理を述べる。半群とは、ある空間の点にたいして時間と共に変化する運動経路を対応させるある特殊な性質を満たす写像のことであり、発展方程式論や偏微分方程式論において、中心的な役割を担うものである。非線形半群の挙動に関する理論としては、エルゴード定理が有名である。その主張するところは、半群の不動点の集合にたいして、半群それ自身はその集合の一点に収束するとは限らないが、その Cesaro の平均をとると不動点の集合のある点に弱収束することを述べたものである。ここではこのような半群の漸近的挙動ではなく、半群が常にある集合上にとどまるという意味での安定性について述べる。まず、非線形半群の正確な定義を与えることから始める。

定義 (X, d) を完備距離空間とする。 X から X への写像の集合

$$\{S(t) : M \rightarrow M : t \geq 0\}$$

が次に述べる諸条件を満たすとき、これは、**非線形半群**をなすという

$$18) \quad S(0) = I, \quad S(t_1 + t_2) = S(t_1) \cdot S(t_2) \text{ for all } t_1, t_2 \geq 0$$

$$19) \quad d(S(t)u, S(t)v) \leq e^{\omega t} d(u, v) \text{ for all } t \geq 0, u, v \in X$$

となる $\omega \in \mathbb{R}$ が存在する。

$$20) \quad \text{任意の } u \in X \text{ にたいして、関数 } t \rightarrow S(t)u \text{ は } [0, +\infty] \text{ において、連続。}$$

定理 6.7 $F \subset X$ を閉集合、 C を 0 以上の任意の実数とし、さらに、

$$21) \liminf_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{d(S(t)u, F)}{t} \leq C \text{ for all } u \in F$$

が成り立つものとする。このとき、任意の $u \in X$ と任意の $t \geq 0$ にたいして

$$d(S(t)u, F) \leq e^{\omega t} d(u, F) + (C/\omega) (e^{\omega t} - 1) \text{ for } \omega \neq 0$$

$$d(S(t)u, F) \leq d(u, F) + Ct \text{ for } \omega = 0.$$

が成り立つ。

$C = 0$ とすれば、条件 21) は、集合 F 内の点を初期値とする任意の運動経路と F との距離の時間 0 における lower-Dini 微分が 0 になることを述べたものである。そして、この定理の結論は、 $u \in F$ という特殊な場合を考えれば、集合 F のある点 u を初期値とする運動経路が F 内にとどまるための十分条件を述べていることがわかる。すなわち、ある半群の初期点の近傍の運動が集合 F に接しているか、あるいは F の内部を、通る場合集合 F は半群 S にたいして、安定であることを述べている。

この定理の証明を述べる前に、補題を一つ用意しておく。以下、 F は、 X の閉部分集合、 $M \equiv F \times [0, +\infty)$ 、 $L \geq 0$ とし、 X 上の二項関係 \leq を次のように定義する。

$x = (u, p)$, $y = (v, q)$ を、 M における二点とする。このとき、

$$x \leq y$$

$$\iff$$

$$p \leq q$$

$$d(S(q-p)u, v) \leq (L/\omega) (e^{\omega(q-p)} - 1) \quad (\omega \neq 0)$$

$$d(S(q-p)u, v) \leq (L/\omega) \quad (\omega = 0)$$

補題 6.8 上記方法により、定義された二項関係は M 上の半順序であり、任意の $x = (u, p) \in M$ にたいして、 $\phi(x) = p$ と函数 $\phi: M \rightarrow R$ を定義すると、この函数は、次の条件を満たす。

$$22) x \leq y \Rightarrow \phi(x) \leq \phi(y)$$

23) $\phi(x_n) \leq C < +\infty$ となる実数 C が存在する任意の増加点列 $\{x_n\} \subset M$ にたいして、

$$x_n \leq y \text{ for all } n$$

$$\phi(x_n) \rightarrow \phi(y) \text{ as } n \rightarrow +\infty$$

という条件を満たす点 $y \in M$ が存在する。

証明 まず、 X 上の二項関係 \leq が半順序であることを確かめるには、それが推移率を満たすことを調べれば十分であろう。そこで、 $x = (u, p)$, $y = (v, q)$, $z = (w, r)$ を

$$x \leq y, y \leq z$$

を満たす M 上の点とする。まず、半順序の定義から、

$$24) d(S(q-p)u, v) \leq (L/w) (e^{\omega(q-p)} - 1)$$

$$25) d(S(r-q)v, w) \leq (L/w) (e^{\omega(r-q)} - 1)$$

となる。24) と半群の定義より

$$\begin{aligned} d(S(r-q) \cdot S(q-p)u, S(r-q)v) \\ &\leq e^{\omega(r-q)} d(S(q-p)u, v) \\ &\leq e^{\omega(r-q)} (L/w) (e^{\omega(q-p)} - 1) \end{aligned}$$

となる。これと 25) より,

$$\begin{aligned} d(S(r-p)u, w) \\ &= d(S(r-q) \cdot S(q-p)u, w) \\ &\leq d(S(r-q) \cdot S(q-p)u, S(r-q)v) + d(S(r-q)v, w) \\ &\leq e^{\omega(r-q)} (L/w) (e^{\omega(q-p)} - 1) + (L/w) (e^{\omega(r-q)} - 1) \\ &= (L/w) (e^{\omega(r-p)} - 1). \end{aligned}$$

次に、22) は自明であるから、23) のみ確かめることにする。まず、

$$\{x_n = (u_n, p_n)\} \subset M$$

を、

$$\phi(x_n) = p_n \leq C < +\infty$$

を満たす任意の増大点列とする。 $\{p_n\}$ は R における上に有界な非減少列であるから、ある点に収束する。その点を p とする。 $x_n \leq x_{n+k}$ であるから、

$$26) d(S(p_{n+k} - p_n)u_n, u_{n+k}) \leq (L/w) (e^{\omega(p_{n+k} - p_n)} - 1) \text{ for all } n, k \in N,$$

が成り立つ。任意の $\varepsilon > 0$ にたいして、 $N(\varepsilon) \in N$ が存在して、

$$(L/w) (e^{\omega(p_{n+k} - p_n)} - 1) < \varepsilon \text{ for all } n > N(\varepsilon), k \geq 0$$

が成り立つから、26) より、

$$27) d(u_{n+k}, u_{n+l}) \leq d(S(p_{n+k} - p_n)u_n, S(p_{n+l} - p_n)u_n) + 2\varepsilon \text{ for all } n \geq N(\varepsilon), k, l \geq 0$$

任意の $n > N(\varepsilon)$ を固定し、 $k \rightarrow +\infty, l \rightarrow +\infty$ とすると、27) の右辺は 2ε に収束する。したがって、

$$d(u_{n+k}, u_{n+l}) \leq 3\varepsilon \text{ for all } k, l, \geq N'(\varepsilon)$$

となる $N'(\varepsilon) \in N$ が存在することになる。したがって、 $\{u_n\}$ は、Cauchy 点列となるので、その極限を u とし、26) において $k \rightarrow +\infty$ とすると、

$$d(S(p - p_n)u_n, u) \leq (L/w) (e^{\omega(p - p_n)} - 1)$$

すなわち、 $(u_n, p_n) \leq (u, p)$ for all $n \geq 0$

となり $y = (u, p)$ とおくと、

$$x_n \leq y \text{ for all } n$$

$$\phi(x_n) \rightarrow \phi(y) \text{ as } n \rightarrow \infty$$

となる。

証了

定理 6.7 の証明 $\omega \neq 0$ の場合のみ確かめることにする。定理 6.4 を上記順序集合 $M \equiv F \times [0, +\infty]$ と、 $\phi(u, p) = p$ に適用する。補題より、定理 6.4 における 12) のみを確かめればよい。まず、任意の $x = (u, p)$ 、 $\varepsilon > 0$ を固定する。すると、21) より、

$$\liminf_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{d(S(t)u, F)}{(e^{\omega t} - 1)/\omega} \leq C$$

が成り立つから、任意の $L > C$ を固定すると、

$$d(S(t)u, F) < (L/\omega)(e^{\omega t} - 1)$$

となる $0 < t < \varepsilon$ が存在する。したがって、

$$d(S(t)u, u') \leq (L/\omega)(e^{\omega t} - 1)$$

となる $u' \in F$ が存在することになる。この u' と $p' \equiv p + t$ にたいして、 $x' \equiv (u', p')$ とおくと、

$$x \leq x'$$

となるから、12) が成り立っていることがわかる。

以下、二つの場合に分けて考える。

Case 1 $u \in F$ の場合。定理 6.4 の結論より、任意の $T > 0$ にたいして、

$$(u, 0) \leq (v, T)$$

となる $v \in F$ が存在する。すなわち

$$d(S(T)u, v) \leq (L/\omega)(e^{\omega T} - 1).$$

この関係が任意の $L > C$ にたいして成り立つから、 $u \in F$ の場合には、定理の主張が成り立つことがわかる。

Case 2 $u \in X \setminus F$ の場合。任意の $f \in F$ にたいして、半群の定義より、

$$d(S(t)u, S(t)f) \leq e^{\omega t} d(u, f)$$

すなわち、

$$d(S(t)u, F) \leq d(S(t)f, F) + e^{\omega t} d(u, f)$$

が成り立つ。さらに、 $f \in F$ であったから、

$$d(S(t)f, F) \leq (C/\omega)(e^{\omega t} - 1)$$

が成り立つから、

$$d(S(t)u, F) \leq (C/\omega)(e^{\omega t} - 1) + e^{\omega t} d(u, f)$$

これが、任意の $f \in F$ にたいして成り立つので、定理の結論が成り立つことがわかる。 証了

参 考 文 献

- [1] A. Ambrosetti and P. Rabinowitz, "Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications", *J. Funct. Anal.* 14 (1973), 349-381.
- [2] J.P. Aubin and I. Ekeland, *Applied Nonlinear Analysis*, 1984, Wiley, New York.
- [3] J.P. Aubin and J. Siegel, "Fixed Points and Stationary Points of Dissipative Multivalued Maps", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 78 (1980), 391-398.

- [4] A. Auslender, "Stability in Mathematical Programming with Nondifferentiable Data", *SIAM J. Control Optim.*, 22 (1984), 239-254.
- [5] E. Bishop and R.R. Phelps, "The Support Functionals of a Convex Set", in *Proc. Symp. Pure Math.*, 7 (1963), 27-35.
- [6] B. Bollobás, "An Extension of the Theorem of Bishop and Phelps", *Bull. London Math. Soc.*, 2 (1970), 181-182.
- [7] H. Brézis and F.E. Browder, "A General Principle on Ordered Sets in Nonlinear Functional Analysis", *Adv. Math.*, 21 (1976), 355-364.
- [8] J.M. Borwein and D. Preiss, "Smooth Variational Principle with Applications to Subdifferentiability and to Differentiability of Convex Functionals", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 303 (1987), 517-527.
- [9] F.E. Browder, "On the Fredholm Alternative for Nonlinear Operators", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 76 (1970), 993-998.
- [10] ———, "Normal Solvability for Nonlinear Mappings into Banach Spaces", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77 (1971), 73-77.
- [11] ———, "Normal Solvability and the Fredholm alternative for Mappings into Infinite Dimensional Manifolds", *J. Funct. Anal.*, 8 (1971), 250-274.
- [12] J. Caristi, "Fixed Point Theorem for Mappings Satisfying Inwardness Conditions", *Amer. Math. Soc.*, 215 (1976), 241-251.
- [13] R.W. Chaney, "Second-order Sufficient Conditions for Nondifferentiable Programming Problems", *SIAM J. Control Optim.*, 20 (1982), 20-33.
- [14] J. Danes, "A Geometric Theorem Useful in Nonlinear Functional Analysis", *Bollettino U. M. I.*, 6 (1972), 369-375.
- [15] ———, "Equivalence of some Geometrical and Related Results of Nonlinear Functional Analysis", *Comment. Math. Univ. Caroline*, 26 (1985), 443-454.
- [16] F.H. Clarke, "Generalized Gradients and Applications", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 205 (1975), 257-262.
- [17] ———, "A new Approach to Lagrange Multipliers", *Math. Oper. Res.*, 1 (1976), 165-174.
- [18] ———, *Optimization and Nonsmooth Analysis* (1983), Wiley, New York.
- [19] I. Ekeland, "On the Variational Principle", *J. Math. Anal. Appl.* 47 (1974), 324-353.
- [20] ———, "Nonconvex Minimization Problems", *J. Math. Anal. Appl.*, 47 (1979), 443-474.
- [21] I. Ekeland and G. Leborg, "Generic Fréchet-differentiability and Perturbed Optimization Problems in Banach Spaces", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 224 (1976), 193-216.
- [22] H. Frankowska, "The First Order Necessary Conditions for Nonsmooth Variational and Control Problems", *SIAM J. Control Optim.*, 22 (1984), 1-11.
- [23] A.D. Ioffe, "Regular Points of Lipschitz Functions", *Amer. Math. Soc.*, 251 (1979), 61-69.
- [24] ———, "Necessary and Sufficient Conditions for a Local Minimum, 1, 2, 3.", *SIAM J. Control Optim.*, 17 (1979), 245-288.
- [25] V.L. Klee, Jr, "Convex Sets in Linear Spaces. I", *Duke Math. J.*, 18 (1951), 443-466.
- [26] ———, "Separation Properties of Convex Cones", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6 (1955), 313-318.
- [27] ———, "Extremal Structure of Convex Sets. I", *Arch. Math.*, 8 (1957), 234-240.
- [28] ———, "Extremal Structure of Convex Sets. II", *Math. Z.*, 69 (1958), 90-104.
- [29] ———, "On a Question of Bishop and Phelps", *Amer. J. Math.*, 85 (1963), 95-98.

- [30] J. Lindenstrauss, "On Reflexive Spaces having the Metric Approximation Property", *Israel J. Math.*, 3 (1965), 199-204.
- [31] ———, "On Nonseparable Reflexive Banach Spaces", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72 (1966), 967-970.
- [32] ———, "On Operators which Attain their Norms", *Israel J. Math.*, 1 (1963), 139-148.
- [33] N. Mizoguchi and W. Takahashi, "Fixed Point Theorems for Multivalued Mappings on Complete Metric Spaces", *J. Math. Anal. Appl.*, 141 (1989), 177-188.
- [34] R. S. Paris and S. Smale, "Generalized Morse Theory", *Bull. Amer. Marth. Soc.*, 70 (1964), 165-171.
- [35] N. T. Peck, "Support Points in Locally Convex Spaces", *Duke Math. J.*, 38 (1971), 271-278.
- [36] J. P. Penot, "The Drop theorem, the Petal Theorem and Ekeland's Variational Principle", *Nonlinear Anal.*, 10 (1986), 813-822.
- [37] R. R. Phelps, "Support Cones and their Generalization", in *Proc. Symp. Pure Math.*, 7 (1963), 393-401.
- [38] R. R. Phelps, "Support Cones in Banach Spaces and their Applications", *Adv. Math.* 13 (1974), 1-19.
- [39] ———, "Weak* Support Points of Convex Sets in E^* ", *Israel J. Math.*, 2 (1964), 177-182.
- [40] W. O. Ray and A. M. Walker, "Mapping Theorems for Gateaux Differentiable and Accretive Operators", *Nonlinear Anal.*, 6 (1982), 423-433.
- [41] S. Rolewicz, "On Drop Properties", *Studia Math.*, LXXXV (1987), 27-35.
- [42] J. Siegel, "A New Proof of Caristi Fixed Point Theorem", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 66 (1977), 54-56.
- [43] M. Studniarski, "Necessary and Sufficient Conditions for Isolated Local Minima of Nonsmooth Function", *SIAM J. Control Optim.*, 24 (1986), 1044-1049.
- [44] J. -B. H. Urruty, "A Short Proof of the Variational Principle for Approximate Solutions of a Minimizations Problem", *Amer. Math. Monthly* 90 (1983), 206-207.
- [45] D. E. Ward and J. M. Borwein, "Nonsmooth Calculus in Finite Dimensions", *SIAM J. Control Optim.*, 25 (1987), 1312-1340.
- [46] P. G. Georgiev, "The Strong Variational Principle, the Strong Drop Theorem and Applications", *J. Math. Anal. Appl.*, 131 (1988), 1-21.
- [47] J. R. Giles, *Convex Analysis with Application in Differentiation of Convex Functions*, Pitman Adv. Publ. Prog., London.
- [48] A. Brønsted and R. T. Rockafellar, "On the Subdifferentiability of Convex Functions", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 16 (1965), 605-611.
- [49] P. H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations* (1986), *Amer. Math. Soc.*, Prov., Rhode Island.
- [50] 高橋 渉『非線形関数解析学』(1988), 近代科学社, 東京。
- [51] 増田 久弥『非線形数学』(1985), 朝倉書店, 東京。
- [52] 丸山 徹『非線形関数解析の基礎』unpublished.
- [53] 溝畑 茂『偏微分方程式論』(1965), 岩波書店, 東京。

(慶應義塾大学大学院経済学研究科博士課程)