

Title	ミニマックス定理に関する考察
Sub Title	On some minimax theorems
Author	小宮, 英敏
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1989
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.82, No.3 (1989. 10) ,p.575(163)- 580(168)
JaLC DOI	10.14991/001.19891001-0163
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19891001-0163

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

ミニマックス定理に関する考察

小 宮 英 敏

1928年 von Neumann [4] により初めて単体上の線形な利得関数に関するミニマックス定理が証明されて以来様々な形のミニマックス定理が様々な数学的道具を使い証明されてきた。von Neumann の最初のミニマックス定理の証明法は利得関数の定義域が単体であることの特徴を使った数学的帰納法によるものであった。また、この初等的なミニマックス定理は線形計画法の双対定理（従って、線形不等式系に関する Minkowski-Farkas の定理）を使い証明されることも知られている[6]。1941年 Kakutani [1] は Brouwer の不動点定理より有名な多価写像の不動点定理を導き、それを使い一般の凸集合を定義域とする連続擬凸-擬凹利得関数に対するミニマックス定理を証明した。その後、ミニマックス定理の証明に不動点定理を使う手法は大きな流れとなり、Nikaido [5] のミニマックス定理も不動点定理を使い証明されている。また、ミニマックス定理の他に、 n 人非協力ゲームの均衡の存在証明、一般均衡の存在証明などに不動点定理の威力が発揮されてきた。1958年 Sion [8] は、不動点定理を使わずに、Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz の定理を使った独自の証明法により対称性の美しいミニマックス定理を証明したが、この Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz の定理は位相幾何学的には Brouwer の不動点定理と同等の場所に位置すると考えられる。その後不動点定理を使った Sion のミニマックス定理の証明法も Takahashi [9] により得られている。しかしながら、ミニマックス定理の証明の道具としては不動点定理は大きすぎ必ずしも使う必要がないことが分かっている。このことを実際に Sion のミニマックス定理を数学的帰納法と位相数学の初歩的な概念のみを使って証明することにより示す（定理1）。この証明法は初等的であるが故にその適用範囲が広がり、定理の条件にある種々の凸性を取り除く可能性を秘めている（定理1の後の注意を参照）。

後半の定理3は利得関数の定義域からコンパクト性を取り除くための一つの試みである。このため利得関数の凸性を仮定しなくてはならなかったが、その定義域に関する条件は有界性のみでなんと位相的な性質を仮定する必要がなくなった。

定理 1 (Sion) m 次元ユークリッド空間内の有界凸閉集合 X と l 次元ユークリッド空間内の凸集合 Y に対し、その直積 $X \times Y$ の上で定義された実数値関数 f が次の条件を満たすとする：

- (i) すべての $x \in X$ に対し、 $f(x, \cdot)$ は Y 上で擬凹上半連続である。
- (ii) すべての $y \in Y$ に対し、 $f(\cdot, y)$ は X 上で擬凸下半連続である。

このとき等式

$$\min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y) = \sup_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y)$$

が成立する。

補題 1 定理 1 と同じ仮定の下で、 $\alpha < \min_{x \in X} \max(f(x, y_1), f(x, y_2))$ を満たす $y_1, y_2 \in Y$ と定数 α に対し、 $\alpha < \min_{x \in X} f(x, y_0)$ を満たす $y_0 \in Y$ が存在する。

証明 背理法で証明する。 $\alpha < \min_{x \in X} \max(f(x, y_1), f(x, y_2))$ で、 $\alpha \geq \min_{x \in X} f(x, y)$ がすべての $y \in Y$ に対して成立するような Y の元 y_1 と y_2 があったとする。

$$\alpha < \beta < \min_{x \in X} \max(f(x, y_1), f(x, y_2))$$

なる β をとる。任意の $s \in [0, 1]$ に対して、 $C(s) = \{x \in X: f(x, (1-s)y_1 + sy_2) \leq \beta\}$ と定義する。このとき、 $C(s)$ は空ではない凸閉集合である。さらに、 $C(0) \cap C(1) = \emptyset$ が成立している。

閉区間 $[0, 1]$ 内の二つの数列 $\{s_n\}$ と $\{t_n\}$ を次のようにして生成する。まず、 $s_1 = 0, t_1 = 1$ とおく。 n ステップ後に、 $C(s_n) \cap C(t_n) = \emptyset$ である二つの数列 $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ と $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ が得られたとする。関数 $f(x, \cdot) (x \in X)$ の擬凹性より

$$C((s_n + t_n)/2) \subset C(s_n) \cup C(t_n)$$

が成立し、 $C(s) (s \in [0, 1])$ は凸集合だから連結である。したがって、

$$C\left(\frac{s_n + t_n}{2}\right) \subset C(s_n) \quad \text{または} \quad C\left(\frac{s_n + t_n}{2}\right) \subset C(t_n)$$

が成立する。ここで、 $C((s_n + t_n)/2) \subset C(s_n)$ のときは $s_{n+1} = (s_n + t_n)/2, t_{n+1} = t_n$ とおき、 $C((s_n + t_n)/2) \subset C(t_n)$ のときは $s_{n+1} = s_n, t_{n+1} = (s_n + t_n)/2$ とおく。この過程を繰返すことにより、単調増加数列 $\{s_n\}$ と単調減少数列 $\{t_n\}$ を作り出すことができ、これらは共通の極限 $u = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ を持つことが分かる。さらに、

$$C(s_1) \supset C(s_2) \supset C(s_3) \supset \dots \quad \text{かつ} \quad C(t_1) \supset C(t_2) \supset C(t_3) \supset \dots$$

が成立している。

$f(x_0, (1-u)y_1 + uy_2) \leq \alpha < \beta$ を満たす X の点 x_0 をとる。このとき、

$\limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_0, (1-s_n)y_1 + s_n y_2) < \beta$ だから $f(x_0, (1-s_p)y_1 + s_p y_2) < \beta$ なる s_p がある。即ち、 x_0 は $C(s_p)$ に属する。同様に、 $x_0 \in C(t_q)$ となる t_q が存在するから、これは $C(0) \cap C(1) = \emptyset$ に矛盾する。

補題 2 定理 1 と同じ仮定の下で、 $\alpha < \min_{x \in X} \max_{1 \leq i \leq n} f(x, y_i)$ を満たす有限個の Y の元 $y_1, \dots, y_n$ と実数 α に対し、 $\alpha < \min_{x \in X} f(x, y_0)$ を満たす Y の元 y_0 が存在する。

証明 n に関する数学的帰納法で証明する。 $n=1$ のときは明らかに補題 2 は成立する。 $\alpha < \min_{x \in X} \max_{1 \leq i \leq n} f(x, y_i)$ を満たす実数とし、 X' を集合 $\{x \in X: f(x, y_n) \leq \alpha\}$ とする。 X' が空のときは、 $y_0 = y_n$ とすればよいから、空ではないと仮定することができる。

$\alpha < \min_{x \in X} \max_{1 \leq i \leq n} f(x, y_i)$ なので、 $\alpha < \min_{x \in X'} \max_{1 \leq i \leq n-1} f(x, y_i)$ が成立する。帰納法の仮定を f の $X' \times Y$ への制限に適用すると、 $\alpha < \min_{x \in X} f(x, y_0')$ なる y_0' が Y に存在することになる。従って、 $\alpha < \min_{x \in X} \max(f(x, y_0'), f(x, y_n))$ となり、補題 1 より $\alpha < \min_{x \in X} f(x, y_0)$ なる y_0 が Y に存在する。

定理 1 の証明 不等式

$$\sup_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y) \leq \min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y)$$

が成立するのは明らかなので、 $\sup_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y) < \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} f(x, y)$ と仮定して、背理法で証明する。

$$\sup_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y) < \alpha < \min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y)$$

なる α をとると、 X のコンパクト性より、 $\alpha < \min_{x \in X} \max_{1 \leq i \leq n} f(x, y_i)$ を満たす Y の有限個の元 $y_1, \dots, y_n$ が存在する。従って、補題 2 より $\alpha < \min_{x \in X} f(x, y_0)$ を満たす y_0 が Y に存在する。これは不等式 $\alpha > \sup_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y)$ に矛盾する。

注意 定理 1 は、その証明法を踏襲することにより、次の形に一般化することができる ([3] を参照)。

定理 2 コンパクト位相空間 X と位相空間 Y に対し、その直積空間 $X \times Y$ の上で定義された実数値関数 f が次の条件を満たすとする：

- (i) すべての $x \in X$ に対し、 $f(x, \cdot)$ は Y 上で上半連続である。
- (ii) すべての $y \in Y$ に対し、 $f(\cdot, y)$ は X 上で下半連続である。
- (iii) α を任意の実数とし、 $\{x \in X: f(x, y) \leq \alpha\}$ なる形の集合の任意の有限個の共通部分は空か連結である。

さらに、 Y の任意の 2 点 y_0, y_1 に対し、次の性質を持つ連続関数 $y: [0, 1] \rightarrow Y$ が存在するとする。

- (i) $y(0) = y_0, y(1) = y_1$
- (ii) $[0, 1]$ 内の $s < w < t$ を満たす任意の s, t, w に対して、

$$f(x, y(w)) \geq \min \{f(x, y(s)), f(x, y(t))\}, x \in X$$

このとき等式

$$\min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y) = \sup_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y)$$

が成立する。

定理 1 の集合 X に関する閉性の仮定を取り除くことは一般にはできないが、利得関数 f に関する仮定を強めることによってこれが可能になる。下の定理 3 はこのことを明らかにしている。

凸集合 X 上の下半連続凸関数 f を X の閉包 $\bar{X}$ まで下半連続凸のまま拡張する方法として、 f の閉包 $\bar{f}$ をとる操作が知られている。具体的には、 $\bar{f}$ は

$$\bar{f}(x) = \sup_{V_x} \inf_{y \in V_x \cap X} f(y), \quad x \in \bar{X}$$

で定義する。ここで、 V_x は x のあらゆる近傍を動くものとする。

補題 3 X を m 次元ユークリッド空間内の凸集合、 f を X で定義された $(-\infty, \infty]$ に値をとる凸関数とし、 $f(x_0) < \infty$ なる X の相対的内部 X^{ri} の点 x_0 が存在すると仮定する。このとき、 f の X^{ri} への制限の閉包を g とすると、すべての $x \in \bar{X}$ に対し、

$$g(x) = \lim_{\lambda \uparrow 1} f((1-\lambda)x_0 + \lambda x)$$

であり、

$$\inf_{x \in \bar{X}} g(x) = \inf_{x \in X} f(x)$$

が成立する。

証明 $\bar{X}$ の任意の元 x と、任意の $\lambda \in (0, 1)$ に対して、 $(1-\lambda)x_0 + \lambda x$ は X 相対的内点となっており、 g は $\bar{X}$ 上で凸だから、

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x_0 + \lambda x) &= g((1-\lambda)x_0 + \lambda x) \\ &\leq (1-\lambda)g(x_0) + \lambda g(x) \\ &= (1-\lambda)f(x_0) + \lambda g(x) \end{aligned}$$

ここで、 $f(x_0) < \infty$ だから、

$$\limsup_{\lambda \uparrow 1} f((1-\lambda)x_0 + \lambda x) \leq g(x)。$$

また、 $g(x)$ の定義より、 $g(x) \leq \liminf_{\lambda \uparrow 1} f((1-\lambda)x_0 + \lambda x)$ となるから、

$g(x) = \lim_{\lambda \uparrow 1} f((1-\lambda)x_0 + \lambda x)$ である。

$x \in X$ に対して、先の議論と同様にして、

$$\limsup_{\lambda \uparrow 1} f((1-\lambda)x_0 + \lambda x) \leq f(x)$$

が導かれるから、 $g(x) \leq f(x)$ である。従って、 $\inf_{x \in \bar{X}} g(x) \leq \inf_{x \in X} f(x)$ はよい。逆の不等式は、 g が下半連続で $\bar{X}$ がコンパクトであることにより、 $g(x_1) = \inf_{x \in \bar{X}} g(x)$ なる $x_1 \in \bar{X}$ が存在する。従って、

$$g(x_1) = \lim_{\lambda \uparrow 1} f((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) \geq \inf_{x \in X} f(x)$$

となり、求める不等式が得られた。

定理 3 m 次元ユークリッド空間内の有界凸集合 X と l 次元ユークリッド空間内の凸集合 Y に対し、その直積 $X \times Y$ の上で定義された実数値関数 f が次の条件を満たすとする：

(i) すべての $x \in X$ に対し、 $f(x, \cdot)$ は Y 上で凹である。

(ii) すべての $y \in Y$ に対し, $f(\cdot, y)$ は X 上で凸である。

(iii) $\sup_{y \in Y} f(x_0, y) < \infty$ を満たす X の相対的内点 x_0 が存在する。

このとき等式

$$\min_{x \in \bar{X}} \sup_{y \in Y} f(x, y) = \sup_{y \in Y} \min_{x \in \bar{X}} f(x, y)$$

が成立する。

証明 各 $y \in Y$ に対し, $f_y(x) = f(x, y)$ とおき, X 上の凸関数 f_y を定義し, f_y の X の相対的内部 X^{ri} への制限の閉包 g_y を考える。 $\alpha = \sup_{y \in Y} \min_{x \in \bar{X}} g_y(x)$ とおくと仮定より $\alpha < \infty$ であり,

$$A_y = \{x \in \bar{X} : g_y(x) \leq \alpha\}, \quad y \in Y$$

とおくと, A_y は閉集合である。任意の有限個の $y_1, \dots, y_n \in Y$ と $\sum_{i=1}^n \mu_i = 1$ なる $\mu_i \geq 0$ に対し, $g_{\sum_{i=1}^n \mu_i y_i}(x_1) \leq \alpha$ なる $x_1 \in \bar{X}$ が存在することが α の定義より分かる。補題 3 より,

$$\begin{aligned} g_{\sum_{i=1}^n \mu_i y_i}(x_1) &= \lim_{\lambda \uparrow 1} f_{\sum_{i=1}^n \mu_i y_i}((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) \\ &\geq \sum_{i=1}^n \mu_i \lim_{\lambda \uparrow 1} f_{y_i}((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1) \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_i g_{y_i}(x_1). \end{aligned}$$

従って, $\sum_{i=1}^n \mu_i g_{y_i}(x_1) \leq \alpha$ を得る。[7, Theorem 1] を使うと, $\bar{X}$ の元 x_2 が存在して, $g_{y_i}(x_2) \leq \alpha$ がすべての $i = 1, \dots, n$ に対し成立することになる。即ち, $x_2 \in \bigcap_{i=1}^n A_{y_i}$ であり, 集合族 $\{A_y\}$ は有限交叉性をもつから $\bar{X}$ のコンパクト性から $\bigcap_{y \in Y} A_y$ は空ではなく,

$\min_{x \in \bar{X}} \sup_{y \in Y} g_y(x) \leq \alpha$ が成立し, 等式

$$\min_{x \in \bar{X}} \sup_{y \in Y} g_y(x) = \sup_{y \in Y} \min_{x \in \bar{X}} g_y(x)$$

を得る。

また, $\sup_{y \in Y} g_y$ は $\bar{X}$ 上の下半連続凸関数であるから, その X^{ri} への制限の閉包はそれ自身に等しいことに注意すると, 任意の $x \in \bar{X}$ に対し,

$$\begin{aligned} \sup_{y \in Y} g_y(x) &= \lim_{\lambda \uparrow 1} \sup_{y \in Y} g_y((1-\lambda)x_0 + \lambda x) \\ &= \lim_{\lambda \uparrow 1} \sup_{y \in Y} f_y((1-\lambda)x_0 + \lambda x) \end{aligned}$$

が成立するから, h で $\sup_{y \in Y} f_y$ の X^{ri} への制限の閉包を表すことにすると,

$$h(x) = \sup_{y \in Y} g_y(x), \quad x \in \bar{X}$$

が得られる。

以上得られた二つの等式と補題 3 を考え合わせると,

$$\begin{aligned} \inf_{x \in \bar{X}} \sup_{y \in Y} f(x, y) &= \inf_{x \in \bar{X}} \sup_{y \in Y} f_y(x) \\ &= \min_{x \in \bar{X}} h(x) \\ &= \min_{x \in \bar{X}} \sup_{y \in Y} g_y(x) \end{aligned}$$

$$=\sup_{y \in Y} \min_{x \in X} g_y(x)$$

$$=\sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} f_y(x)$$

$$=\sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} f(x, y)$$

が得られ、求める等式が証明された。

参 考 文 献

- [1] S. Kakutani, *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*, Duke Math. J. 8 (1941), 457-459.
- [2] H. Komiya, *Elementary proof for Sion's minimax theorem*, Kodai Math. J. 11 (1988), 5-7.
- [3] H. Komiya, *On minimax theorems*, Bull. Inst. Math. Academia Sinica 17 (1989), 121-128.
- [4] J. von Neumann, *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Math. Ann. 100 (1928), 132-137.
- [5] H. Nikaido, *On von Neumann's minimax theorem*, Pacific J. Math. 4 (1954), 65-72.
- [6] 二階堂副包, 経済のための線型数学, 1961, 培風館。
- [7] N. Shioji and W. Takahashi, *Fan's theorem concerning systems of convex inequalities and its applications*, J. Math. Anal. Appl. 135 (1988), 383-398.
- [8] M. Sion, *On general minimax theorems*, Pacific J. Math. 8 (1958), 171-176.
- [9] W. Takahashi, *Nonlinear variational inequalities and fixed point theorems*, J. Math. Soc. Japan 28 (1976), 168-181.

(商学部助教授)