

Title	Ekelandの ε -変分原理とその応用
Sub Title	Ekeland's ε -variational principle and its applications
Author	立石, 寛
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1989
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.82, No.2 (1989. 7) ,p.297(109)- 318(130)
JaLC DOI	10.14991/001.19890701-0109
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19890701-0109

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the Keio Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

Ekeland の ϵ -変分原理とその応用^{*}

立 石 寛

序

- I Ekeland の ϵ -変分原理
- II 各種の同系定理
- III Caristi の不動点定理（以上，本号）
- IV 非円滑解析における Lagrange の未定乗数法
- V Palais-Smale の条件
- VI 順序集合上の Ekeland の定理（以上，次号）

序

Ekeland の ϵ -変分原理とは、ある完備距離空間で定義された下に有界な下半連続実数値函数、したがってその空間上では必ずしも最小値の存在が保証されていない函数にたいして、それを ϵ 変形することにより大域的な最小値が存在する函数にできることを述べたものであり、非線形解析学 (nonlinear analysis)、非円滑解析学 (nonsmooth analysis)、最適化理論 (optimization theory) など種々の分野において重要な役割を担うものである。本稿は以下のような構想により、この Ekeland の ϵ -変分原理の論理構造を明らかにし、またいくつかの重要な応用を示す総合的報告であり、従来既に知られている結果とここで新たに得られた結果とを共に一貫した脈絡の下に整理する試みである。

Bishop-phelps によって、Banach 空間上の有界閉凸集合の支持汎函数が双対空間において稠密であることが証明されて以来、その証明に使われた補題の基本的考え方は種々の方面で利用され、幾つかの関連ある有名な定理が生み出された。Brønsted-Rockafellar の定理、Browder の補題、そして、Ekeland の ϵ -変分原理などがその代表例である。これらの定理はすべて同じ原理、すなわち考えられている集合上にある凸錐による半順序を定め、その極大元を求めるという方法によって証明される。そしてこれらの定理においては、考えられている距離空間が完備であるという性質が重要な役割を担う。そこでまず、従来は別々の場面で主張され使用されてきたこれらの定理を空間の完備性を媒介として、整理し直すことにより、相互の論理的関連とその共通の論理構造を明らかにすることが本稿の第一の目的である（第 I、II 章）。また、第 III 章ではあらためて Caristi の不動点定理との関連にも言及する。

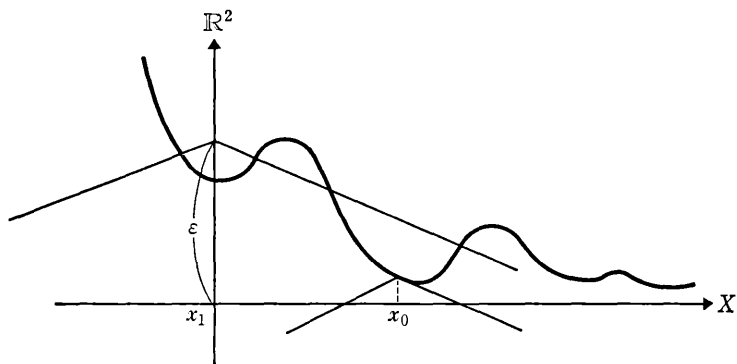
^{*} 本稿の作成にあたり福岡正夫教授、川又邦雄教授から有益なコメントを頂いたのでここに謝意を表す。

次に, Ekeland の ε -変分原理の応用として, 最適化理論を中心に述べる。一般にコンパクト集合上で定義された連続な実数値関数は極値をもつことが知られているが, このコンパクト性がはずされたときこの主張は勿論一般には主張されえない。そして, このような場合に極値が存在するための必要条件や十分条件を求める場合, Ekeland の ε -変分原理は大変有用である。その方法は, 極小化すべき関数に Ekeland の ε -変分原理を適用しその変形された関数の大域的な最適点を求め, 次に ε を 0 に収束させ, それに対応する最適点の点列の極限としてもとの関数の最適点を求めるという手法が用いられる。本稿では, この構想に基づいて必ずしも微分可能性を仮定しない関数を対象に Lagrange の未定乗数法を定式化し, またいわゆる, Palais-Smale の条件による極値の存在に関する問題を究明する (第IV, V章)。

最後にVI章において, Ekeland の ε -変分原理の基本的な考え方を一般的な順序集合上で再現することにより得られる諸定理について述べる。ここで述べられる定理は, Ekeland の ε -変分原理を含意するという意味において, Ekeland の ε -変分原理の一般化になっている。また, その応用として半群の安定性に関する定理を述べる。

I Ekeland の ε -変分原理

まず本章では, Ekeland に負う ε -変分原理のいくつかの version を空間の完備性を媒介にして整理する。よく知られているように, ある実数値関数が下半連続, 下に有界であっても定義域がコンパクトでなければ一般には最小値の存在は保証されない。しかしこのような場合においても関数を “ ε 分だけ変形する” ことにより大域的な最小値が存在するようになれることを主張するのが, Ekeland の ε -変分原理である。次の図は直感的にこの間の事情を示すものである。



上図は定理 1.1 iii) の主張を図示したものであり原点を座標 $(x_1, \inf F)$ にとった関数 F のグラフが描かれている。 $(x_0, F(x_0))$ を頂点とする錐は函数

$$\phi(x) = -(\varepsilon/\lambda)d(x_0, x) + F(x_0)$$

のグラフを表す。したがって, 函数

$$F^*(x) = F(x) + (\varepsilon/\lambda)d(x_0, x)$$

の値は、函数 F と ϕ との差に $F(x_0)$ をたしたものであり、函数 F^* の変動は F と ϕ との差で表される。上図においては、これが常に正であり、 x_0 においてのみ 0 となっている。したがって、 F^* は x_0 において最小値 $F(x_0)$ をとる。Ekeland の ε -変分原理はこのように最小値が存在しない函数でもそれを少し変形することにより最小値が存在する函数にすることができることを主張するものである。また、 $(x_1, \varepsilon + \inf F)$ を頂点とする錐は函数

$$\phi(x) = -(\varepsilon/\lambda)d(x_1, x) + \varepsilon + \inf F$$

のグラフを表しており、 $(x_0, F(x_0))$ の点がこの錐の中に入っていることは $d(x_1, x_0) \leq \lambda$ が成り立つことを表す。

次の定理において $i) \implies ii)$ の証明 (Giles [48] による) をみるとわかるように、Ekeland の変分原理においては、函数の定義域の完備性という条件が本質的に重要な役割を担っている。しかし実はある距離空間において任意の proper, 下半連続, 下に有界な函数が ε -変分原理の主張するところの $x_0 \in X$ をもつこととその空間が完備であることは同値である。次にかかげる定理により、この同値性に厳密な論証が与えられる。

定理 1.1 (X, d) を距離空間とすると、次の i), ii), iii), iv) は同値である。

i) (X, d) は完備である。

ii) $F: X \rightarrow R \cup \{+\infty\}$ を proper, 下半連続, 下に有界な函数とする。

このとき、任意の $\varepsilon > 0$, $x_1 \in X$ にたいして、

$$F(x_0) + \varepsilon d(x_0, x_1) \leq F(x_1)$$

$$F(x) > F(x_0) - \varepsilon d(x_0, x) \text{ for all } x \neq x_0$$

となる $x_0 \in X$ が存在する。

iii) $F: X \rightarrow R \cup \{+\infty\}$ を proper, 下半連続, 下に有界な函数とする。このとき、

$$F(x_1) \leq \inf_x F + \varepsilon$$

を満たす任意の $\varepsilon > 0$, $x_1 \in X$ と任意の $\lambda > 0$ にたいして、次の条件を満たす $x_0 \in X$ が存在する。

$$F(x_0) \leq F(x_1)$$

$$d(x_1, x_0) \leq \lambda$$

$$F(x) > F(x_0) - (\varepsilon/\lambda)d(x_0, x) \text{ for all } x \neq x_0$$

iv) $F: X \rightarrow R \cup \{+\infty\}$ を proper, 下半連続, 下に有界な函数とする。このとき、任意の $\varepsilon > 0$ にたいして、

$$F(x_0) \leq \inf_x F + \varepsilon$$

$$F(x) \geq F(x_0) - \varepsilon d(x_0, x) \text{ for all } x \in X$$

を満たす $x_0 \in X$ が存在する。

証明 $iii) \implies iv)$ の包含関係は明らかなので、以下、 $i) \implies ii) \implies iii)$ と、 $iv) \implies i)$ の包含関係

を示す。

i) \implies ii) (Giles [47]). 距離空間 X を完備とし, 点列 $\{x_n\}$ を帰納的に次のようにとる。

x_1 より始め, x_n が定義されたものとして, x_{n+1} を次の Case 1, Case 2 によって定義する。

Case 1 $F(x) > F(x_n) - \varepsilon d(x_n, x)$ for all $x \neq x_n$

のとき, このときは, $x_{n+1} = x_n$ とおく。

Case 2 $F(y) \leq F(x_n) - \varepsilon d(x_n, y)$ となる $y \neq x_n$ が存在するとき, このときには, まず

$$S_n \equiv \{y \in X : F(y) \leq F(x_n) - \varepsilon d(x_n, y)\}$$

とおき, $x_{n+1} \in S_n$ を次の条件を満たすようにとる。

$$1) F(x_{n+1}) \leq \frac{1}{2} [F(x_n) + \inf \{F(x) : x \in S_n\}]$$

以下, このようにして定義された $\{x_n\}$ について考察する。

まず, ある n に関して, Case 1 が起これば, それ以降は, 同じ点が繰り返される。次に, 任意の n に関して Case 2 が成り立てば,

$$\varepsilon d(x_n, x_{n+1}) \leq F(x_n) - F(x_{n+1}) \text{ for all } n \in \mathbb{N}$$

となるから, これをたし合わせるにより,

$$2) \varepsilon d(x_n, x_m) \leq F(x_n) - F(x_m) \text{ for all } m > n$$

となる。ここで, $\{F(x_n)\}$ は R における減少点列であり下に有界であるから収束点列である。したがって, 2) より $\{x_n\}$ は X における Cauchy 点列となる。仮定より, X は完備であるから $\{x_n\}$ は X のある点 x_0 に収束する。この x_0 が定理の主張を満たす点であることを確かめることにする。まず, 仮定より F は x_0 において下半連続であるから,

$$F(x_0) \leq \liminf F(x_n) = \lim F(x_n)$$

となる。2) より,

$$\varepsilon d(x_1, x_n) \leq F(x_1) - F(x_n) \text{ for all } n.$$

であるから,

$$\begin{aligned} \varepsilon d(x_1, x_0) &\leq F(x_1) - \lim F(x_n) \\ &\leq F(x_1) - F(x_0) \end{aligned}$$

となる。したがって,

$$F(x_0) + \varepsilon d(x_1, x_0) \leq F(x_1)$$

が成り立つ。

次に,

$$F(y) \leq F(x_0) - \varepsilon d(x_0, y)$$

となる $y \neq x_0$ が存在するものと仮定する。このとき, 2) より,

$$\begin{aligned} \varepsilon d(x_n, x_0) &\leq F(x_n) - \lim F(x_m) \\ &\leq F(x_n) - F(x_0) \text{ for all } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} F(y) &\leq F(x_n) - \varepsilon(d(x_n, x_0) + d(x_0, y)) \\ &\leq F(x_n) - \varepsilon d(x_n, y) \end{aligned}$$

となる。すなわち、

$$y \in S_n \text{ for all } n.$$

となる。しかしながら、1)より、

$$2F(x_{n+1}) - F(x_n) \leq \inf \{F(x) : x \in S_n\} \leq F(y)$$

したがって、

$$\lim F(x_n) \leq F(y)$$

となる。再び、 F が x_0 において下半連続であることから、

$$F(x_0) \leq \lim F(x_n)$$

であるから、

$$F(x_0) \leq F(y)$$

となる。これは、 y の定義に矛盾する。

ii) \implies iii) (Giles [47]). $X^* = \{x \in X : F(x) \leq \inf F + \varepsilon\}$ とおくと、 F は下半連続であるから、 X^* は X の閉部分集合、したがって完備である。そこで、ii)より、

$$3) \quad F(x_1) + (\varepsilon/\lambda)d(x_1, x_0) \leq F(x_0)$$

$$4) \quad F(x) > F(x_0) - (\varepsilon/\lambda)d(x_0, x) \text{ for all } x \in X^* \setminus \{x_0\}$$

となる $x_0 \in X^*$ が存在する。3)より、

$$(\varepsilon/\lambda)d(x_1, x_0) \leq F(x_1) - F(x_0) \leq \varepsilon$$

すなわち

$$d(x_1, x_0) \leq \lambda$$

となる。さらに、任意の $x \in X \setminus X^*$ にたいして、

$$F(x) > F(x_0) - (\varepsilon/\lambda)d(x_0, x)$$

となることは明らかであるから、iii)が証明されたことになる。'

iv) \implies i) 距離空間 (X, d) が完備でないを仮定し、 $\{x_n\}$ を X において収束しない Cauchy 点列とする。さらに、 X' を X の完備化空間とすると、 $\{x_n\}$ は X' における Cauchy 点列であるから、収束点 $x' \in X' \setminus X$ が存在する。そこで、函数 F を次のように構成する。

$$F(x) = \begin{cases} d(x', x_n) & \text{if } x = x_n \\ +\infty & \text{if otherwise} \end{cases}$$

この函数 $F: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ が、proper, 下半連続、下に有界な函数であることは明らかであろう。この F が、 X 上で iv) の主張を満たしているとするれば、次の条件をみたす $x_0 \in X$ が存在することになる。

$$d(x', x_n) \geq d(x', x_0) - \frac{1}{2}d(x', x_0) \text{ for all } n \in \mathbb{N}$$

ここで、 $n \rightarrow +\infty$ とすると

$$0 \geq d(x', x_0) - \frac{1}{2}d(x', x_0)$$

すなわち, $x_0 = x'$ となるが, $x_0 \in X, x' \in X \setminus X$ であったから矛盾。

証了

次に, 条件を強めて, 考えられている関数が Gâteaux 微分可能な場合に関する ε -変分原理について述べる。次の定理は proper, 下半連続, 下に有界, 有効定義域で Gâteaux 微分可能な関数 F にたいしては,

$$\begin{aligned} F(x_n) &\rightarrow \inf F \\ \partial F(x_n) &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

という収束が成り立つように点列 $\{x_n\} \subset X$ をとり出すことができることを主張するものである。

定理 1.2 X を Banach 空間, $F: X \rightarrow R \cup \{+\infty\}$ を proper, 下半連続, 下に有界で, 有効定義域で Gâteaux 微分可能な関数とする。このとき,

$$F(x_1) \leq \inf F + \varepsilon$$

を満たす任意の $\varepsilon > 0$ と $x_1 \in X$ と任意の $\lambda > 0$ にたいして, 次の条件を満たす $x_0 \in X$ が存在する。

$$\begin{aligned} F(x_0) &\leq F(x_1) \\ \|x_1 - x_0\| &\leq \lambda \\ \|\partial F(x_0)\| &\leq \varepsilon/\lambda \end{aligned}$$

証明 (Ekeland [19]) 定理 1.1 iii) より,

$$\begin{aligned} F(x_0) &\leq F(x_1) \\ \|x_0 - x_1\| &\leq \lambda \end{aligned}$$

で, さらに任意の $w \in X$ にたいして,

$$F(x_0 + tw) \geq F(x_0) - (\varepsilon/\lambda)t \|w\| \text{ for all } t \in R$$

となる $x_0 \in X$ が存在する。ここで, $t \rightarrow 0$ とすると,

$$(d/dt)F(x_0 + tw)|_{t=0} \geq -(\varepsilon/\lambda) \|w\|$$

となる。したがって,

$$\langle \partial F(x_0), w \rangle \geq -(\varepsilon/\lambda) \|w\|$$

この不等式が, 任意の $w \in X$ にたいして, 成り立つから,

$$\|\partial F(x_0)\| \leq (\varepsilon/\lambda)$$

が成り立つ。

証了

特に, 上記定理において, $\varepsilon = \varepsilon^2, \lambda = \varepsilon$ とおけば, 次の定理を得る。

定理 1.3 X を Banach 空間, $F: X \rightarrow R \cup \{+\infty\}$ を proper, 下半連続, 下に有界な関数で有

効定義域で Gâteaux 微分可能な函数とする。このとき、任意の $\varepsilon > 0$ にたいして、次の条件を満たす $x \in X$ が存在する。

$$F(x) - \inf F \leq \varepsilon^2$$

$$\|\partial F(x)\| \leq \varepsilon$$

II 各種の同系定理

Bishop-Phelps [5] によって、Banach 空間における有界閉凸集合の支持汎函数が、双対空間において稠密であるというよく知られている定理が証明されて以来、その定理はその主張ばかりでなくその証明方法の有用性によって多くの同系定理をもつにいたった。その代表例として、凸函数の劣微分可能性に関する Brønsted-Rockafellar の定理、局所的にある集合を support する錐の存在を述べた Browder の補題、そして前章で述べた Ekeland の ε -変分原理などがあげられる。これらの定理は全て同じ着想のもとに証明されており Ekeland の ε -変分原理と同様、考えられている空間の完備性という条件が本質的に重要な役割を担っている。したがって、ある空間においてこれらの定理が成り立つこととその空間が完備であることは同値になるであろうと推測される。この章では、この推測に基づきこれら今までは別々の場で論じられてきた諸定理を空間の完備性を媒介として整理する。

2.1. Bishop-Phelps の補題, Phelps の補題と完備性

まず、上記幾つかの定理の端緒ともいうことができる、Bishop-Phelps の補題として知られている定理から述べることにする。この定理は、Banach 空間のある有界閉部分集合においてある錐によって support される点の存在を主張するものである。ここでは、この錐として、次の二つのものを考えることにする。

定義 X をノルム空間とする。このとき任意の $f \in X^*$, $\|f\|=1$, $k > 0$ にたいして、 f, k によって定まる錐 $K(f, k)$ を次のように、定義する。

$$K(f, k) = \{y \in X : k \|y\| \leq f(y)\}$$

定義 X を線形位相空間、 B を X の有界閉凸部分集合で、 $0 \notin B$ とする。このとき、 B によって、生成される錐 R^+B を次のように定義する。

$$R^+B = \{\lambda y : \lambda \geq 0, y \in B\}$$

定理 2.1 X をノルム空間とする。このとき、次の i), ii), iii) は同値である。

i) X は完備である。

ii) (Bishop-Phelps の補題) S を X の閉部分集合とする。このとき

$$\|f\|=1, \sup f(S) < +\infty$$

を満たす任意の $f \in X^*$ と $k > 0$ をとると、任意の $b \in S$ にたいして、

$$S \cap (K(f, k) + a) = \{a\}$$

を満たす $a \in K(f, k) + b$ が存在する。

iii) (Phelps 補題) S を X の閉部分集合、 B を X の有界閉凸部分集合で、 $0 \in B$ が成り立つものとする。このとき、 $S \cap (R^+B + b)$ が有界となる任意の $b \in S$ にたいして、

$$S \cap (R^+B + a) = \{a\}$$

となる $a \in S \cap (R^+B + b)$ が存在する。

証明 i) \implies ii). $F: S \rightarrow R$ を $F(x) = -f(x)$ とし、定理 1.1 の ii) を適用すればよい。

ii) \implies iii) (Phelps [38]). ii) が成り立っているものとする。このとき、iii) を示すためには、 $R^+B \subset K(f, k)$ となる $f \in X^*$, $\|f\|=1$, $k > 0$ が存在することを示せば十分である。まず、 $0 \in B$ であることから $B(0: \varepsilon) \cap B = \emptyset$ となる $\varepsilon > 0$ が存在する。この $B(0: \varepsilon)$ と B にたいして Hahn-Banach の分離定理を適用することにより、

$$\varepsilon = \sup f(B(0, \varepsilon)) \leq \inf f(B)$$

となる $f \in X^*$, $\|f\|=1$ が存在することがわかる。さらに、

$$\|y\| \leq M \text{ for all } y \in B$$

となるように $M > 0$ を選べば、

$$(\varepsilon/M) \|y\| \leq \varepsilon \leq f(y) \text{ for all } y \in B$$

となり、 $k \equiv \varepsilon/M$ とおけば、

$$R^+B \subset K(f, k)$$

であることがわかる。

iii) \implies i). X を完備でないノルム空間とし、この X 上で iii) が成り立たない有界閉部分集合 S と有界閉凸部分集合 B を構成することにする。

いま、 X をある完備空間 X^* の稠密部分集合として埋め込み、 $x \in X^* \setminus X$ を任意にとる。一般性を失うことなく $\|x\| > 1$ としてよい。そこで、

$$S \equiv \text{conv.}[\text{cl } B(0: \frac{1}{2}) \cup \{x\}],$$

$$B \equiv \text{cl } B(x: \frac{1}{2})$$

とおく。ここで、任意の $a \in S \setminus \{x\}$ にたいして

$$x - a \in x - S \subset \text{int } R^+B$$

すなわち、 $x \in S \cap \text{int } (R^+B + a)$ となることに注意しておく。いま、

$$S^* \equiv S \cap X, B^* \equiv B \cap X$$

にたいして、iii) の主張が成り立つものとする、

$$S^* \cap (R^+B^* + a^*) = \{a^*\}$$

となる $a^* \in S^* \cap (R^+B^*)$ が存在することになる。ここで、

$$a^* \in X, x \in X^* \setminus X$$

であるから $a^* \in S \setminus \{x\}$ である。従って、上記注意より

$$\text{int}\{S \cap (R^+B + a^*)\} \neq \emptyset$$

となり、

$$y \in X \cap \{S \cap (R^+B + a^*)\} = S^* \cap (R^+B^* + a^*)$$

となる $y \neq a^*$ が存在することになり矛盾。

証了

2.2. 花卉の定理, 水滴の定理と完備性

Bishop-Phelps の補題は、ある錐で考えられている集合を support する点の存在を述べているわけであるが、ほかにも水滴の形をした集合や花卉の形をした集合による support が考えられる。次に、これらの集合による Bishop-Phelps の補題と同形の定理を述べる。

定義 (X, d) を距離空間, a, b を X の二点, r を正の実数とする。このとき集合

$$P_r(a, b) = \{x \in X : r d(x, a) + d(x, b) \leq d(a, b)\}$$

を, a, b, r によって定まる花卉 (petal) と呼ぶ。

注意 $r < r'$ ならば, $P_r(a, b) \supset P_{r'}(a, b)$ である。¹

定義 X を線形ノルム空間, A をその凸部分集合, a を X の一点とする。このとき集合

$$D(a, A) = \text{co}(\{a\} \cup A)$$

を, a と A によって定まる水滴 (drop) と呼ぶ。

注意 X を線形ノルム空間とし, a, b は X の二点, 中心 b , 半径 r の閉球を B と書く。ここで、

$$r < \|a - b\| \equiv t$$

とする。いま, 正数 r を

$$r \leq \frac{t-r}{t+r}$$

とすれば、

$$D(a, B) \subset P_r(a, b)$$

が成り立つ。

定理 2.2 X をノルム空間とする。このとき, 次の i), ii), iii) は同値である。

i) X は完備である。

ii) (花卉の定理) C を X の閉部分集合, x_0 を C の一点, b を $X \setminus C$ の一点とする。このとき, 任意の $r > 0$ にたいして,

$$P_r(a, b) \cap C = \{a\}$$

となる $a \in X \cap P_r(x_0, b)$ が存在する。

iii) (水滴の定理) E を X の閉部分集合, b を $X \setminus E$ の一点, B を中心 b , 半径 $r < d(b, E)$ の閉球とする。このとき,

$$D(a, B) \cap C = \{a\}$$

となる $a \in C \cap D(x_0, B)$ が存在する。

証明 iii) \implies i) は定理 2.1 における iii) \implies i) と同様にして証明できるので, 以下 i) \implies ii) \implies iii) の包含関係を示すことにする。

i) \implies ii) (Penot[36]). 函数 $F: C \rightarrow R$ を次のように定義する。

$$F(x) = d(x, b)$$

このようにして定義された函数 F は, 連続かつ下に有界である。したがって, 定理 1.1 の ii) より,

$$F(a) < F(x) + r d(a, x) \text{ for all } x \neq a$$

$$F(a) \leq F(x_0) - r d(a, x_0)$$

となる $a \in X$ が存在する。このことから, 定理の主張が満たされることは明らかであろう。

ii) \implies iii) (Penot[36]). ii) において,

$$C = E \cap D(x_0, B), \quad r = (d-r)/(d+r)$$

とおく。ここで, $d \equiv d(b, E)$ すると

$$P_r(a, b) \cap C = \{a\}$$

となる $a \in P_r(x_0, b)$ が存在することになる。さらに, $t \equiv d(a, b) > d$ であるから

$$(d-r)/(d+r) \leq (t-r)/(t+r)$$

となる。したがって

$$D(a, B) \subset P_r(a, b)$$

である。また, $a \in D(x_0, B)$ であるから

$$D(a, B) \subset D(x_0, B)$$

である。したがって

$$a \in D(x_0, B) \cap E$$

が成り立ち, さらに

$$D(a, B) \cap E \subset D(a, B) \cap (D(x_0, B) \cap E) \subset P_r(a, b) \cap C = \{a\}$$

証了

2.3. Browder の補題

次に, Browder の補題について述べる。上記諸定理は, 錐あるいは錐と似た形をもつ集合をひとつ固定し, その集合によって support する点が存在することを述べたものであるが, 今度は錐自体は固定しないで, 局所的にある集合を support する錐が存在するかどうかを考える。この問題に肯定的に答えるのがいわゆる Browder の補題とよばれる定理である。彼は, この補題を無限次元に値をとるある函数が onto であるための十分条件を求めるのに用いている [9, 10, 11]。

定理2.3 (Browder の補題) X を Banach 空間とし, S を X の閉部分集合とする。このとき, 任意の $x \in \text{bdry } S$ と任意の $\epsilon > 0$ にたいして,

$$\|x - a\| < \epsilon, S \cap (K + a) \cap B(a; \delta) = \{a\}$$

となる $\delta > 0$ と $a \in S$ と内点をもつ錐 K が存在する。

証明 (Browder[11]) $y \in X \setminus S$ と $w \in S$ を

$$\|y - x\| < \epsilon/4, \|y - w\| < 5d/4$$

となるようにとる。ここで,

$$d \equiv \text{dist}(y, S)$$

一般性を失うことなく $w = 0$ としてよい。また,

$$d \leq \|y - x\| < \epsilon/4$$

であるから,

$$\|y - w\| = \|y\| < \epsilon/3$$

であることに注意しておく。まず, $d \leq \|y\|$ であることから,

$$B(y; d/4) \neq \emptyset$$

となる。そこで,

$$K \equiv R^+ B(y; d/4), r \equiv \|y\|/2$$

として, 定理 2.1 iii) を集合

$$S_1 \equiv B(0; r) \cap S$$

に適用すると,

$$(K + a) \cap S_1 = \{a\}$$

となる $a \in S_1 \cap K$ が存在することがわかる。また, $a \in K$ であることから,

$$a = \lambda u, \lambda \geq 0, u \in B(y; d/4)$$

と表すことができる。ここで

$$a \in B(0; r)$$

であり,

$$B(0; r) \cap [1, +\infty]u = \emptyset$$

であるから、 $\lambda < 1$ となる。したがって、

$$\begin{aligned}
 *) \quad \|a-y\| &= \|\lambda u-y\| \\
 &= \|\lambda(u-y)-(1-\lambda)y\| \\
 &\leq \lambda \cdot d/4 + (1-\lambda)\|y\| \\
 &\leq \lambda \cdot d/4 + (1-\lambda) \cdot 5d/4 \\
 &= (5-4\lambda) \cdot d/4
 \end{aligned}$$

$d \leq \varepsilon/4$ であったから、

$$\|a-y\| \leq 5d/4 \leq 5\varepsilon/16$$

となり、

$$\begin{aligned}
 \|a-x\| &\leq \|a-y\| + \|y-x\| \\
 &< 5\varepsilon/16 + \varepsilon/4 \\
 &< \varepsilon
 \end{aligned}$$

定理の証明を完了するためには、 $\|a\| < r$ であることを確かめればよい。実際、 $\delta \equiv r - \|a\|$ とおくと、

$$\|v\| \leq \|v-a\| + \|a\| < r \text{ for all } v \in B(a; \delta)$$

となり、

$$B(a; \delta) \subset B(0, r)$$

であることがわかる。したがって、

$$\begin{aligned}
 a \in S \cap B(a; \delta) \cap (K+a) &\subset (K+a) \cap S \cap B(0; r) \\
 &\subset (K+a) \cap S_1 \\
 &= \{a\}
 \end{aligned}$$

そこで、以降

$$\|a\| < \|y\|/2 \equiv r$$

となることを示す。まず、 $a \in S$ であることから、 $\|a-y\| \geq d$ であり、これと *) より、

$$d \leq \|a-y\| \leq (5-4\lambda)d/4$$

となり、 $\lambda \leq 1/4$ であることがわかる。さらに、

$$\|u\| \leq \|u-y\| + \|y\| \leq d/4 + 5d/4 = 3d/2$$

であるから、

$$\|x\| = \lambda \|u\| \leq (1/4)3d/2 < d/2 < \|y\|/2 = r$$

証了

この Browder の補題の系として、次の Bishop-Phelps の定理の一つの version である Banach 空間における有界閉凸集合の support point はその集合の境界で稠密であるという主張を証明することができる。

系2.3 (Bishop-Phelps の定理[5]) X を Banach 空間, B をその有界閉凸部分集合とする。このとき B の support point は B の境界で稠密である。

この系 2.3 の形での Bishop-Phelps の定理と空間の完備性, したがって Browder の補題と空間の完備性との関係については, まだはっきりしたことはわかっていない。しかし, Klee [29] は l^2 空間における pre-Hilbert 部分空間において support point が存在しない pre-compact 部分集合を構成している。

2.4. Brønsted-Rockafellar の定理, Bishop-Phelps の定理と完備性

次に, Brønsted-Rockafellar の定理と Bishop-Phelps の定理について述べる。一般に定義域が内点をもつ下半連続凸関数は, その内点において劣微分が可能であることはよく知られているが, 定義域が内点を含まない関数においてはどうか? この問題に答える定理がここで述べる Brønsted-Rockafellar の定理である。それによると, そのような関数においても劣微分可能な点は定義域において稠密に存在するという結果が得られる。また, Bishop-Phelps の定理は, Banach 空間の有界閉凸部分集合の support functional が双対空間で稠密であること, 特に, Banach 空間が subreflexive であることを述べたものである。まず, 新しい概念をひとつ導入しておく。

定義 X を線形空間, A を X の凸部分集合とし, $F: A \rightarrow R$ を凸関数とする。このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ にたいして, F の a における ε -approximate subgradient を次の条件を満たす線形汎関数 f とする。

$$f(x-a) \leq F(x) - F(a) + \varepsilon \text{ for all } x \in A$$

以下, 上記性質をもつ線形汎関数の全体を $\partial_\varepsilon F(a)$ と表す。

注意 X をノルム空間, A をその凸部分集合とし, $F: A \rightarrow R$ を下半連続な関数とする。このとき, 任意の $\varepsilon > 0$, $a \in A$ にたいして

$$\partial_\varepsilon F(a) \neq \emptyset$$

である。

証明 (Giles[47]) F が下半連続であることから, 集合

$$K = \{(x, \lambda) : \lambda \geq F(x) - F(a) + \varepsilon\}$$

は閉集合である。さらに, $K \ni (a, 0)$ であるから, Hahn-Banach の分離定理により

$$f(x-a) \leq F(x) - F(a) + \varepsilon \text{ for all } x \in A$$

となる $f \in X^*$ が存在する。この f にたいして,

$$f \in \partial_\varepsilon F(a)$$

証了

となる。

定理2.4 X をノルム空間とする。このとき、次の i), ii), iii) は同値である。

i) X は完備である。

ii) (**Brønsted-Rockafellar の定理**) A を X の閉凸部分集合とする。今、函数 $F: A \rightarrow R$ が下半連続、凸であるとすると、任意の $\varepsilon > 0$, $x_1 \in A$, $f \in \partial_\varepsilon F(x_1)$ と任意の $\lambda > 0$ にたいして、

$$\|x_0 - x_1\| \leq \lambda, \|f - f_{x_0}\| \leq \varepsilon/\lambda$$

となる $x_0 \in A$, $f_{x_0} \in \partial F(x_0)$ が存在する。(ここで ∂ は劣微分を表す。)

iii) (**Bishop-Phelps の定理**) A を X の閉凸部分集合とする。このとき、

$$\sup\{f(y) : y \in A\} \leq f(x_1) + \varepsilon$$

となる任意の $f \in X^* \setminus \{0\}$ と $\varepsilon > 0$ と x_1 をとると、任意の λ にたいして、

$$f_0(x_0) = \sup\{f_0(y) : y \in A\}$$

$$\|x_1 - x_0\| \leq \lambda, \|f - f_0\| \leq \varepsilon/\lambda$$

となる $x_0 \in A$ と $f_0 \in X^*$ が存在する。

iv) (**Bishop-Phelps の定理**) A を X の有界閉凸部分集合とする。このとき、 A の support functional は X の双対空間において稠密である。

証明 iii) \implies iv) は明らかなので、以下、i) \implies ii) \implies iii) と iv) \implies i) を示す。

i) \implies ii) (Giles [47]) $\phi: X \rightarrow R$ を

$$\phi(x) = F(x) - f(x) + \sup\{f(x) - F(x) : x \in A\}$$

と定義すると、これは下半連続、凸、下に有界となる。ここで、

$$\phi^*(x) = \begin{cases} \phi(x) & \text{if } x \in A \\ +\infty & \text{if } x \in X \setminus A \end{cases}$$

と定義すると、 $\phi^*: X \rightarrow R \cup \{+\infty\}$ も下半連続、凸、下に有界な函数になるから、定理 1.1 iii) より

$$\|x_0 - x_1\| \leq \lambda$$

$$\phi^*(x) - \phi^*(x_0) > -\varepsilon \|x - x_0\|/\lambda \text{ for all } x \in X \setminus \{x_0\}$$

となる $x_0 \in A$ が存在する。すなわち、

$$\phi^*(x_0 + y) - \phi^*(x_0) > -\varepsilon \|y\|/\lambda \text{ for all } y \in X \setminus \{0\}$$

したがって、集合

$$E \equiv \{(y, \lambda) : \lambda \geq \phi^*(x_0 + y) - \phi^*(x_0)\}$$

と

$$F \equiv \{(y, \lambda) : \lambda < -(\varepsilon/\lambda)\|y\|\}$$

は、凸、 $\text{int } F \neq \emptyset$, $E \cap F = \emptyset$ となる。この集合に Hahn-Banach の分離定理を適用することにより

$$\begin{aligned}\phi^*(x_0+y) - \phi^*(x_0) &\geq g(y) \\ &\geq -(\varepsilon/\lambda) \|y\| \text{ for all } y \in X\end{aligned}$$

となる $g \in X^*$ が存在することがわかる。この g にたいして、まず、

$$g(y) \geq -(\varepsilon/\lambda) \|y\| \text{ for all } y \in X$$

となることより、

$$\|g\| \leq \varepsilon/\lambda$$

となる。次に、

$$\phi^*(x_0+y) - \phi^*(x_0) \geq g(y) \text{ for all } y \in X$$

より、

$$\phi(x) - \phi(x_0) \geq g(x-x_0) \text{ for all } x \in A$$

となり、 $g \in \partial\phi(x_0)$ であることがわかる。また、

$$\begin{aligned}\phi(x) - \phi(x_0) &= F(x) - F(x_0) - f(x-x_0) \\ &\geq g(x-x_0) \text{ for all } x \in A\end{aligned}$$

であるから、

$$F(x) - F(x_0) \geq (f+g)(x-x_0) \text{ for all } x \in A$$

となる。したがって、

$$f+g \in \partial F(x_0)$$

であるから、 $f_{x_0} \equiv f+g$ とおけば、

$$\|f_{x_0} - f\| = \|g\| \leq \varepsilon/\lambda$$

となる。

ii) \implies iii) (Giles[47]). $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}$ を、 $\phi(x) \equiv 0$ と定義すると、 ϕ は明らかに A において下半連続、凸関数である。さらに、 $f \in \partial\phi(x_1)$ となることから、ii) より

$$\|x_1 - x_0\| \leq \lambda \|f - f_{x_0}\| \leq \varepsilon/\lambda$$

となる $x_0 \in A$ と $f_{x_0} \in \partial\phi(x_0)$ が存在することがわかる。ここで、

$$f_{x_0} \in \partial\phi(x_0)$$

となることから、

$$f_{x_0}(x_0) = \sup \{f_{x_0}(y) : y \in A\}$$

となる。

iv) \implies i) (Bishop-Phelps[5]). X を完備でないノルム空間とし、support functional が双対空間で稠密でない有界閉凸部分集合を構成する。

まず、 X を X の完備化空間 X_0 の稠密部分集合として X_0 の中に埋め込み、 X と X_0 の双対空間を同一視する。 $X \neq X_0$ であるから、 $\|x\|=1$ となる $x \in X_0 \setminus X$ が存在する。この x と X_0 に Hahn-Banach の定理を適用することにより、 $\|f\|=1=f(x)$ となる $f \in X_0^*$ が存在することがわかる。そこで、

$$D = \{y \in X_0 : \|y\| \leq 1, f(y) = 0\}$$

$$C_0 = \text{co}\{DU\{x\}\}$$

$$C = C_0 \cap X$$

とおくと、この C_0 は明らかに閉で内点をもつから、 C も内点をもつ閉凸集合であり、 x を含まない。以降、 $g \in X^*$ が C のある点 z における support functional であるならば、

$$\|f - g\| \geq \frac{1}{2}$$

という条件を満たさなければならないことを示す。まず、

$$z = \lambda x + (1 - \lambda)y, y \in D$$

と表すと、 $z \in C$ であるから $z \neq x$ であり、従って、 $\lambda < 1$ になる。よって、

$$g(x) \leq g(z) = (1 - \lambda)g(y - x) + g(x)$$

より、 $g(y - x) \geq 0$ となることがわかる。さらに、

$$2 \geq \|x\| + \|y\| \geq \|x - y\| \geq f(x - y) = f(x) = 1$$

となることから、

$$1 \leq (g - f)(y - x) \leq \|f - g\| \|y - x\| \leq 2 \|f - g\|.$$

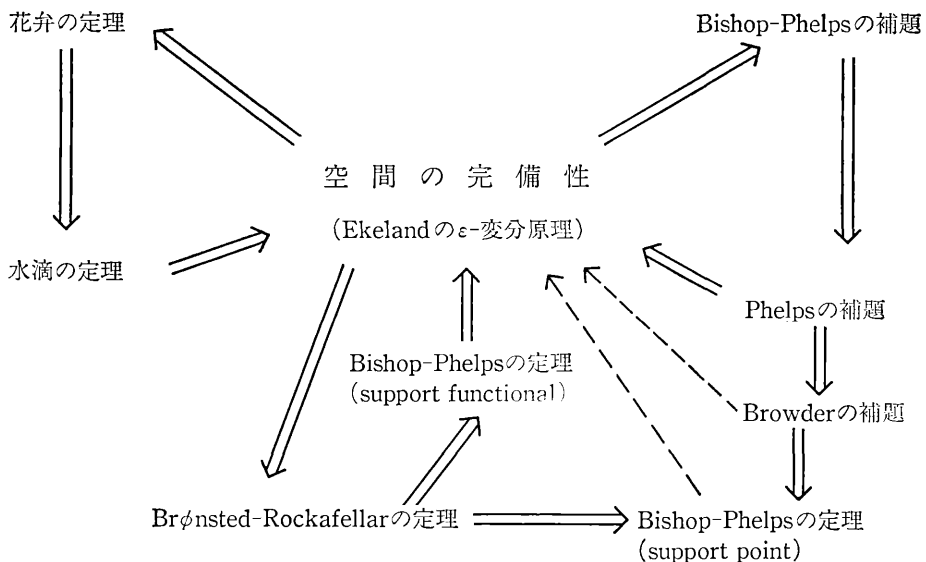
したがって、

$$\|f - g\| \geq \frac{1}{2}.$$

このことは、 f を中心とし、半径 $\frac{1}{2}$ の開球の中には C の support functional が含まれないことを意味する。 証了

最後に、いままでに述べられた各定理間の関係を図で示すことにする。

ノルム空間における定理間の関係



III Caristi の不動点定理*

この章では、Caristi に負う不動点定理について記す。この定理は、考えられている函数の連続性を何ら必要としないこと、また Ekeland の ε -変分原理と同値になることから興味ある結果である。

定理3.1 (Caristi) (X, d) を完備距離空間, $F: X \rightarrow X$ をある函数とし, さらに次の条件を満たす proper, 下半連続, 下に有界な函数

$$\phi: X \rightarrow R \cup \{+\infty\}$$

が存在するものとする。

$$d(x, F(x)) + \phi(F(x)) \leq \phi(x) \text{ for all } x \in X$$

このとき,

$$x_0 = F(x_0)$$

となる $x_0 \in X$ が存在する。

証明 まず,

$$\phi(x) < +\infty \text{ for all } x \in X$$

の場合を考える。

この場合, 定理 1.1 iv) より, 次の条件を満たす $x_0 \in X$ が存在する。

$$\phi(x) \geq \phi(x_0) - \frac{1}{2}d(x_0, x) \text{ for all } x \in X$$

ここで, $x = F(x_0)$ とおくと,

$$\phi(x_0) - \phi(F(x_0)) \leq \frac{1}{2}d(x_0, F(x_0))$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned} d(x_0, F(x_0)) &\leq \phi(x_0) - \phi(F(x_0)) \\ &\leq \frac{1}{2}d(x_0, F(x_0)) \end{aligned}$$

よって, $x_0 = F(x_0)$ 。

次に, $\phi(x) = +\infty$ となる $x \in X$ が存在する場合は, ϕ が proper であることから, $\phi(x_1) < +\infty$ となる $x_1 \in X$ が存在する。いま, 集合 X^* を

$$X^* \equiv \{x \in X : d(x, x_1) + \phi(x) \leq \phi(x_1)\}$$

と定義するとこの集合は非空であり, また ϕ が下半連続であることから閉, すなわち完備である。

さらに, 任意の $x \in X$ にたいして,

$$d(F(x), x_1) + \phi(F(x))$$

*) Aubin, Siegel [3], Caristi [12], Mizoguchi, Takahasi [33] 参照。

$$\begin{aligned} &\leq d(F(x), x) + d(x, x_1) + \phi(F(x)) \\ &\leq \phi(x) + d(x, x_1) \\ &\leq \phi(x_1) \end{aligned}$$

となるから、 F は、 X^* から X^* への函数と考えることができる。 X^* 上では、 $\phi < +\infty$ となるから、最初の場合に帰着する。 証了

この定理の解釈は、次のように、考えればよい。いま、ある X の点 a を初期値とする F によって定まる軌跡 $\{x_n\}$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} x_0 &= a \\ x_{n+1} &= F(x_n). \end{aligned}$$

また、 ϕ を X 上の entropy と解釈する。このようにして定まる X 上の entropy をもった dynamical system の定常点の存在を保証するのが上記定理である。

次に、この定理を、 F が多価写像の場合に拡張する。この場合は、entropy の条件により次の二つの場合が存在する。

i) $\forall x \in X, \exists y \in F(x)$

$$d(x, y) + \phi(y) \leq \phi(x)$$

ii) $\forall x \in X, \forall y \in F(x)$

$$d(x, y) + \phi(y) \leq \phi(x)$$

まず、i) の場合の拡張を述べる。

定理3.2 (X, d) を完備距離空間、 $F: X \rightarrow X$ をある多価写像とし、上記 i) の条件を満たす下に有界な proper 下半連続函数

$$\phi: X \rightarrow R \cup \{+\infty\}$$

が存在するものとする。このとき、

$$x_0 \in F(x_0)$$

となる $x_0 \in X$ が存在する。

証明 仮定より、任意の $x \in X$ にたいして

$$d(x, y) + \phi(y) \leq \phi(x)$$

となる $y \in F(x)$ が存在するから、この x から y への対応を新しく $f: X \rightarrow X$ とし、定理3.1を適用すればよい。 証了

次は、ii) の場合である。

定理3.3 (X, d) を完備距離空間, $F: X \rightarrow X$ を多価写像とし, ii) の条件を満たす下に有界な proper 下半連続函数 $\phi: X \rightarrow R \cup \{+\infty\}$ が存在するものとする。このとき,

$$\{x_0\} = F(x_0)$$

となる $x_0 \in X$ が存在する。

証明 $x = F(x)$ となる $x \in X$ が存在しないものと仮定する。今, 多価写像 $F^*: X \rightarrow X$ を

$$F^*(x) = F(x) \setminus \{x\} \text{ for all } x \in X$$

と定義する。すると, 上で仮定したことから, この写像の値は非空である。さらに, 定理3.3の仮定が満たされているから,

$$x_0 \in F^*(x_0)$$

となる $x_0 \in X$ が存在する。これは, F^* の定義に矛盾する。 証了

最後に, 上記諸定理が, Ekeland の ϵ -変分原理と同値となる事を証明する。上記証明より, Ekeland の定理1.1 iv) \implies 定理3.1 \implies 定理3.2 \implies 定理3.3 の implication が成り立つから, 定理3.3 \implies Ekeland の定理1.1 ii) の implication がわかればよい。

定理3.4 定理3.3 \implies 定理1.1 ii)

証明 (X, d) を完備距離空間, $F: X \rightarrow R \cup \{+\infty\}$ を, proper 下半連続, 下に有界な函数とする。いま, 任意の $\epsilon > 0$, $x_1 \in X$ を固定して考える。まず, X の部分集合 X^* を次のように定義する。

$$X^* \equiv \{x \in X : F(x) + \epsilon d(x, x_1) \leq F(x_1)\}$$

F は下半連続であるから, この集合は完備であり勿論非空である。そこで, 写像 $F^*: X^* \rightarrow X^*$ を次のように定義する。

$$F^*(x) = \{y \in X^* : F(y) \leq F(x) - \epsilon d(x, y)\}$$

ここで, F を定理3.3における ϕ と考えれば, 定理3.3における仮定を満たしていることは明らかであろう。したがって, F^* は不動点をもつ。この点を x_0 とすると, F^* の定義よりこの x_0 は次の条件を満たしている。

$$\begin{aligned} F(x_0) + \epsilon d(x_0, x_1) &\leq F(x_1) \\ F(x) &> F(x_0) - \epsilon d(x_0, x) \text{ for all } x \in X^* \setminus \{x_0\} \end{aligned}$$

今,

$$F(x^*) \leq F(x_0) - \epsilon d(x_0, x^*)$$

となる $x^* \in X \setminus X^*$ が存在するものと仮定すると,

$$\begin{aligned} F(x_1) &< F(x^*) + \epsilon d(x^*, x_1) \\ &\leq F(x_0) - \epsilon d(x_0, x^*) + \epsilon d(x^*, x_1) \end{aligned}$$

$$\leq F(x_0) + \varepsilon d(x_0, x_1)$$

これは、 $x_0 \in X^*$ であることに矛盾する。

証了

参 考 文 献

- [1] A. Ambrosetti and P. Rabinowitz, "Dual Variational Methods in Critical Point Theory and Applications", *J. Funct. Anal.* 14 (1973), 349-381.
- [2] J. P. Aubin and I. Ekeland, *Applied Nonlinear Analysis*, 1984, Wiley, New York.
- [3] J. P. Aubin and J. Siegel, "Fixed Points and Stationary Points of Dissipative Multivalued Maps", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 78 (1980), 391-398.
- [4] A. Auslender, "Stability in Mathematical Programming with Nondifferentiable Data", *SIAM J. Control Optim.*, 22 (1984), 239-254.
- [5] E. Bishop and R. R. Phelps, "The Support Functionals of a Convex Set", in *Proc. Symp. Pure Math.*, 7 (1963), 27-35.
- [6] B. Bollobás, "An Extension of the Theorem of Bishop and Phelps", *Bull. London Math. Soc.*, 2 (1970), 181-182.
- [7] H. Brézis and F. E. Browder, "A General Principle on Ordered Sets in Nonlinear Functional Analysis", *Adv. Math.*, 21 (1976), 355-364.
- [8] J. M. Borwein and D. Preiss, "A Smooth Variational Principle with Applications to Subdifferentiability and to Differentiability of Convex Functionals", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 303 (1987), 517-527.
- [9] F. E. Browder, "On the Fredholm Alternative for Nonlinear Operators", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 76 (1970), 993-998.
- [10] ———, "Normal Solvability for Nonlinear Mappings into Banach Spaces", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77 (1971), 73-77.
- [11] ———, "Normal Solvability and the Fredholm alternative for Mappings into Infinite Dimensional Manifolds", *J. Funct. Anal.*, 8 (1971), 250-274.
- [12] J. Caristi, "Fixed Point Theorem for Mappings Satisfying Inwardness Conditions", *Amer. Math. Soc.*, 215 (1976), 241-251.
- [13] R. W. Chaney, "Second-order Sufficient Conditions for Nondifferentiable Programming Problems", *SIAM J. Control Optim.*, 20 (1982), 20-33.
- [14] J. Danes, "A Geometric Theorem Useful in Nonlinear Functional Analysis", *Bollettino U. M. I.*, 6 (1972), 369-375,
- [15] ———, "Equivalence of some Geometrical and Related Results of Nonlinear Functional Analysis", *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 26 (1985), 443-454.
- [16] F. H. Clarke, "Generalized Gradients and Applications", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 205 (1975), 257-262.
- [17] ———, "A New Approach to Lagrange Multipliers", *Math. Oper. Res.*, 1 (1976), 165-174.
- [18] ———, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, (1983), Wiley, New York.
- [19] I. Ekeland, "On the Variational Principle", *J. Math. Anal. Appl.* 47 (1974), 324-353.
- [20] ———, "Nonconvex Minimization Problems", *J. Math. Anal. Appl.*, 47 (1979), 443-474.
- [21] I. Ekeland and G. Leborg, "Generic Fréchet-differentiability and Perturbed Optimization Problems in Banach Spaces", *Trans. Amer. Math. Soc.*, 224 (1976), 193-216.

- [22] H. Frankowska, "The First Order Necessary Conditions for Nonsmooth Variational and Control Problems", *SIAM J. Control Optim.*, 22 (1984), 1-11.
- [23] A. D. Ioffe, "Regular Points of Lipschitz Functions", *Amer. Math. Soc.*, 251 (1979), 61-69.
- [24] ———, "Necessary and Sufficient Conditions for a Local Minimum. 1, 2, 3.", *SIAM J. Control Optim.*, 17 (1979), 245-288.
- [25] V. L. Klee, Jr, "Convex Sets in Linear Spaces. I", *Duke Math. J.*, 18 (1951), 443-466.
- [26] ———, "Separation Properties of Convex Cones", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6 (1955), 313-318.
- [27] ———, "Extremal Structure of Convex Sets. I", *Arch. Math.*, 8 (1957), 234-240.
- [28] ———, "Extremal Structure of Convex Sets. II", *Math. Z.*, 69 (1958), 90-104.
- [29] ———, "On a Question of Bishop and Phelps", *Amer. J. Math.*, 85 (1963), 95-98.
- [30] J. Lindenstrauss, "On Reflexive Spaces having the Metric Approximation Property", *Israel J. Math.*, 3 (1965), 199-204.
- [31] ———, "On Nonseparable Reflexive Banach Spaces", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72 (1966), 967-970.
- [32] ———, "On Operators which Attain their Norms", *Israel J. Math.*, 1 (1963), 139-148.
- [33] N. Mizoguchi and W. Takahashi, "Fixed Point Theorems for Multivalued Mappings on Complete Metric Spaces", unpublished.
- [34] R. S. Palais and S. Smale, "Generalized Morse Theory", *Bull. Amer. Math. Soc.*, 70 (1964), 165-171.
- [35] N. T. Peck, "Support Points in Locally Convex Spaces", *Duke Math. J.*, 38 (1971), 271-278.
- [36] J. P. Penot, "The Drop theorem, the Petal Theorem and Ekeland's Variational Principle", *Nonlinear Anal.*, 10 (1986), 813-822.
- [37] R. R. Phelps, "Support Cones and their Generalization", in *Proc. Symp. Pure Math.*, 7 (1963), 393-401.
- [38] R. R. Phelps, "Support Cones in Banach Spaces and their Applications", *Adv. Math.* 13 (1974), 1-19.
- [39] ———, "Weak* Support Points of Convex Sets in E^* ", *Israel J. Math.*, 2 (1964), 177-182.
- [40] W. O. Ray and A. M. Walker, "Mapping Theorems for Gateaux Differentiable and Accretive Operators", *Nonlinear Anal.*, 6 (1982), 423-433.
- [41] S. Rolewicz, "On Drop Properties", *Studia Math.*, LXXXV (1987), 27-35.
- [42] J. Siegel, "A New Proof of Caristi Fixed Point Theorem", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 66 (1977), 54-56.
- [43] M. Studniarski, "Necessary and Sufficient Conditions for Isolated Local Minima of Nonsmooth Functions", *SIAM J. Control Optim.*, 24 (1986), 1044-1049.
- [44] J. -B. H. Urruty, "A Short Proof of the Variational Principle for Approximate Solutions of a Minimizations Problem", *Amer. Math. Monthly* 90 (1983), 206-207.
- [45] D. E. Ward and J. M. Borwein, "Nonsmooth Calculus in Finite Dimensions", *SIAM J. Control Optim.*, 25 (1987), 1312-1340.
- [46] P. G. Georgiev, "The Strong Variational Principle, the Strong Drop Theorem and Applications", *J. Math. Anal. Appl.*, 131 (1988), 1-21.
- [47] J. R. Giles, *Convex Analysis with Application in Differentiation of Convex Functions*, Pitman Adv. Publ. Prog., London.
- [48] A. Brønsted and R. T. Rockafellar, "On the Subdifferentiability of Convex Functions", *Proc.*

Amer. Math. Soc., 16 (1965), 605-611.

- [49] P. H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, (1986), *Amer. Math. Soc.*, Prov., Rhode Island.
- [50] 高橋 渉『非線形関数解析学』(1988), 近代科学社, 東京。
- [51] 増田 久弥『非線形数学』(1985), 朝倉書店, 東京。
- [52] 丸山 徹『非線形関数解析の基礎』unpublished.
- [53] 溝畑 茂『偏微分方程式論』(1965), 岩波書店, 東京。

(慶應義塾大学大学院経済学研究科博士課程)