Title	扇形作用素とHahn-Banachの定理
Sub Title	Ioffe's fan and Hahn-Banach theorem
Author	立石, 寛
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1989
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.82, No.1 (1989. 4) ,p.118- 136
JaLC DOI	10.14991/001.19890401-0118
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19890401-0118

「三田学会雑誌」82巻1号（1989年4月）

扇形作用素と Hahn-Banach の定理

立石　寛

序

本稿の目的は，いわゆる扇形作用素に関する Hahn-Banach 型の拡張定理を述べ，その応用として，ベクトル束に値をとる線型作用素に関する Hahn-Banach の定理を包括的に論じることにある。扇形作用素（fan）とは，非円滑解析（non-smooth analysis）をすすめるための基礎概念として，A. D. Ioffe が提唱した一種の多価写像で，よく知られている Rockafellar の凸過程を一般化したものである。

非円滑解析は，これを広義に解釈すると，次の二方向の研究がある。すなわち，函数の大局的性状にかかわる研究と，局所的性状にかかわる研究がそれである。前者の範疇に入る代表例は，超函数の理論に現れる微分概念である。これは Newton-Leipnitz の公式により，函数が連続微分可能であるときには通常の微分概念と一致するという意味において，微分概念の拡張になっている。それに対し後者の方向は，Gateâux 微分あるいは Fréchet 微分に現れる基本思想，すなわち，函数をある線型作用素で局所的に近似するという思想に基づき，微分概念を一般化するというものであり，こちらの方向は，近年，特に1970年代に入ってから，最適化理論との関連で盛んに研究され出したものである。そして扇形作用素が関係するのは，後者，すなわち局所的円滑解析の研究である。

通常，経済学に現れる問題は，ある条件付き最大化問題に帰着される場合が多い。そして，この問題に対する最大化の必要条件，あるいは十分条件を微分計算によって求める場合には，そこに現れる函数系が，十分に円滑的であることが要求される。しかし，この仮定は，問題設定によっては成り立たない場合がしばしば起こる。例えば，完全補完的な生産要素をもつ生産函数などを想起されればよいであろう。そこで，この仮定をはずし，なおかつ，円滑な函数の場合に微分計算によって得た情報と同等の情報を得ようとすれば，微分概念自体を一般化しなければならない。円滑であるという仮定をはずし，代わりに，函数が凸かつ下半連続であるという仮定の下では，劣微分の概念が使用可能であるが，この仮定が満たされないケースは多くある。そこで，最近の研究動向は，局所的 Lipschitz 函数に対し微分可能となる微分概念を作り出すことに向けられている。この研究において，現在，最も体系的なものは，F. H. Clarke による微分概念である。しかし，この概念も，その定義上函数の値域が無限次元になると使用することができないという欠点をもつ。そこで，こ

の欠点を克服し，劣微分やClarkeによる微分の概念に現れる，函数を線型作用素の集合で局所的に近似するという思想をさらに一般化し，函数を扇型作用素と呼ばれるある特殊な性質をもつ多価写像で近似しようとするのが，Ioffe の提唱した扇形作用素の理論である。

この理論は，まだ基礎研究の段階であるが，そこにおいてまず何よりも要求されるのは，線型作用素の自然な一般化として，扇形作用素が函数解析学における三つの基本原理，すなわち，一様有界原理，Hahn-Banach の定理，開写像の定理に類似した性質をもつことである。本稿では，このうち，Hahn-Banach の定理との関連において，扇形作用素の理論について現在までわかっていることを解説し，さらにその応用として，ベクトル束に値をとる線型作用素に関する Hahn-Banach の定理について述べることにある。

以下，第I節は，以降の節で使う基礎概念の解説である。第II節は，扇形作用素のいわゆる線型拡張定理と線型選択定理について述べ，第III節では，ベクトル束に値をとる線型作用素に関する Hahn-Banach の定理を述べ，最後に，第IV節でベクトル束における，Hahn-Banach の拡張定理と同値になるいくつかの命題をかかげる。

I 基礎概念

この節では，以降の節で使う諸概念の定義を与える。以下，線型空間というときには，実線型空間を表すものとする。

定義 X, Y を線型空間とする。今，多価写像 $\mathscr{A}: X \twoheadrightarrow Y$ が次に述べる i)～iv) の条件を満たすとき，$\mathscr{A}$ を**扇形作用素**（fan）という。特に v）も満たすとき，$\mathscr{A}$ を**奇扇形作用素**（odd fan）であるという。

i） 任意の $x \in X$ に対して，$\mathscr{A}(x)$ は非空，凸。

ii） $\{0\} \in \mathscr{A}(0)$

iii） $\mathscr{A}(\lambda x) = \lambda\mathscr{A}(x)$ for all $\lambda > 0$, $x \in X$

iv） $\mathscr{A}(x_1 + x_2) \subset \mathscr{A}(x_1) + \mathscr{A}(x_2)$ for all $x_1, x_2 \in X$

v） $\mathscr{A}(-x) = -\mathscr{A}(x)$ for all $x \in X$

上記定義より，任意の線型作用素は奇扇形作用素であり，一価の奇扇形作用素は，線型作用素に限ることがわかる。又，U を X から Y への線型作用素の凸集合とすると，次の多価写像 $\mathscr{A}$：$X \twoheadrightarrow Y$ も奇扇形作用素になることが直ちにわかる。

$$\mathscr{A}(x) = \{y \in Y \mid y = Tx \text{ for some } T \in U\}$$

定義 X, Yを線型位相空間とする。今，多価写像 $\mathscr{A}: X \twoheadrightarrow Y$ が前定義 ii), iii) と次の i'), iv') を満たすとき，$\mathscr{A}$ を**扇形作用素**という。特に，前定義 v）も満たすとき，$\mathscr{A}$ を**奇扇形作用素**

という。

i′）任意の $x \in X$ に対して，$\mathscr{A}(x)$ は非空，閉，凸。

iv′）$\mathscr{A}(x_1+x_2) \subset \overline{\mathscr{A}(x_1)+\mathscr{A}(x_2)}$ for all $x_1, x_2 \in X$

Yを線型空間，KをYにおける点つき凸錐とする。今，KによってYに導入される半順序$\precsim$を次のように定義する。

$$x \precsim y \Longleftrightarrow y-x \in K \text{ for any } x,\ y \in Y$$

Yに上記の方法で半順序が定義されているとき，Yを**順序線型空間**という。以下，順序線型空間Yにおいて，半順序について言及するとき，上記半順序を意味するものとする。さらに，順序線型空間Yにおける理想点“$+\infty$”“$-\infty$”を，次の条件を満たすYにおける極限要素とする。

$$-\infty \precsim y \precsim +\infty \text{ for all } y \in Y$$

又，集合 Y, $y+K$, $y-K$, $(y+K)\cap(v-K)$（ただし，$y \precsim v$），のことを**区間**（**順序区間**）と呼び，以下，これを次のように表わす。

$$[-\infty,\ +\infty],\ [y,\ +\infty],\ [-\infty,\ y],\ [y,\ v]。$$

定義　順序線型空間Yが**ベクトル束**であるとは，Y上の半順序$\precsim$が次に述べる条件を満たすことをいう。

$$\forall y_1 \in Y,\ \forall y_2 \in Y,\ \exists y \in Y,\ y_1 \precsim y,\ y_2 \precsim y$$

注意 1　Y をベクトル束とし，$x_1 \succsim 0$, $x_2 \succsim 0$ をY における任意の要素とする。このとき，次の関数が成立する。

$$[0,\ x_1+x_2]=[0,\ x_1]+[0,\ x_2]$$

証明(1)　Yをベクトル束とし，$x_1 \succsim 0$, $x_2 \succsim 0$ を任意にとる。

$$[0,\ x_1+x_2] \supset [0,\ x_1]+[0,\ x_2]$$

の包含関係は自明なので，逆を証明する。そこで，z を $[0,\ x_1+x_2]$ の任意の一点とし，u, v を次のように定義する。

$$u=\inf(z,\ x_1) \qquad v=z-u$$

$u \in [0,\ x_1]$ は自明であるから，$v \in [0,\ x_2]$ を証明すればよい。しかし

$$\begin{aligned} v &= z-\inf(z,\ x_1) \\ &= z+\sup(-z,\ -x_1) \\ &= \sup(0,\ z-x_1) \\ &\leqq \sup(0,\ x_1+x_2-x_1)=x_2 \end{aligned}$$

注（1） Schaefer〔12〕.

であるから，逆の包含関係も証明されたことになる。　　　　　　　　　　　　　　　証　了

定義　ベクトル束Yが**最小上界性をもつ**とは，Yに導入された半順序で上に有界なYの部分集合Qに対して，

$$y \precsim \sup Q \text{ for all } y \in Q$$

$$y \precsim z \text{ for all } y \in Q \Longrightarrow \sup Q \precsim z$$

という条件を満たす $\sup Q \in Y$ が存在することをいう。

注意 2　Yをベクトル束とすると，次の i)，ii)，iii) は同値である。

i)　Yは最小上界性をもつ。

ii)　Yにおける任意の pairwise に交わる区間の系において，少なくとも一つは上に有界な要素，一つは下に有界な要素が存在するとき，その系の要素の共通部分は非空である。

iii)　Yにおける任意の pairwise に交わる有界区間の系の共通部分は非空である。

証明　ii) $\Longrightarrow$ iii) は自明だから，i) $\Longrightarrow$ ii) と iii) $\Longrightarrow$ i) のみ証明する。

i) $\Longrightarrow$ ii)。i) が満たされているものとし，S を，ii) で述べた性質をもつ区間の系とする。一般性を失うことなく，S の要素を，$[-\infty,\ u]$，$[v,\ +\infty]$ の形の区間としてよい。そこで，Yの部分集合U，Vを次のように定義する。

$$U=\{u\in Y \mid [-\infty,\ u]\in S\}$$

$$V=\{v\in Y \mid [v,\ +\infty]\in S\}$$

仮定より，この U，V は非空であり，任意の $u\in U$ に対して

$$v \precsim u \text{ for all } v\in V$$

となるから，集合Vは上に有界である。よって，次の条件をもつ $\sup V\in Y$ が存在する。

$$v \precsim \sup V \text{ for all } v\in V$$

$$v \precsim z \text{ for all } v\in V \Longrightarrow \sup V \precsim z$$

このことから，この $\sup V$ が S の共通部分に属すことがわかる。

iii) $\Longrightarrow$ i)。iii) が満たされているものとし，Q を上に有界なYの部分集合とする。今，UをQの上界の全体とし，Yにおける有界区間の系Sを次のように定める。

$$S=\{[q,\ u] \mid q\in Q,\ u\in U\}$$

iii) より，このSには共通部分があり，それがQの最小上界になっていることは明らか。

証　了

定義　Xを線型空間，Yを順序線型空間とする。函数 $F: X\to Y\cup\{+\infty\}$ が**凸**であるとは，

$$F(tx+(1-t)y) \precsim tF(x)+(1-t)F(y) \quad \text{for all } x,\ y\in X,\ t\in[0,\ 1]$$

が成立することをいう。さらに，この函数が

$$F(\lambda x)=\lambda F(x) \text{ for all } \lambda>0,\ x\in X$$

という条件も満たすとき，Fは**劣線型**であるという。

凸函数 $F: X\to Y\cup\{+\infty\}$ に対して，Fの有効定義域 Dom F を次のように定義する。

$$\mathrm{Dom}\ F=\{x\in X|\ F(x)\neq+\infty\}$$

又，函数$F: X\to Y\cup\{-\infty\}$ が**凹**（**優線型**）であるとは，$-F: X\to Y\cup\{+\infty\}$ が凸（劣線型）であることをいう。

注意 3　多価写像 $\mathscr{A}: X\twoheadrightarrow Y$ が，$\mathscr{A}(x)=[Q(x),\ P(x)]$ と表わされるとき，次の i), ii) は同値である。

i）$\mathscr{A}$は扇形作用素である。

ii）$P: X\to Y\cup\{+\infty\}$ 劣線型

$Q: X\to Y\cup\{-\infty\}$ 優線型

$Q(x)\precsim P(x)$ for all $x\in X$

扇形作用素 $\mathscr{A}: X\twoheadrightarrow Y$ が，順序区間に値をとるとき，$\mathscr{A}$ の有効定義域 $\mathrm{Dom}^+\ \mathscr{A}$ を次のように定義する。$\mathrm{Dom}^+\ \mathscr{A}\equiv\mathrm{Dom}\ P$.（ここで，$P$は，上記注意3に現れる劣線型作用素。）又，$\mathrm{Dom}^-\ \mathscr{A}$は，$\mathrm{Dom}^-\ \mathscr{A}\equiv\mathrm{Dom}\ Q$ と定義する。

注意 4　Yをベクトル束とすると，次の i), ii) は同値である。

i）$\mathscr{A}: X\twoheadrightarrow Y$ は有界区間値扇形作用素。

ii）$\mathscr{A}(x)=[-P(-x),\ P(x)]$ for all $x\in X$

となる劣線型作用素 $P: X\to Y$ が存在する。

証明(2)　i) $\Longrightarrow$ ii) は注意1より明らか。ii) $\Longrightarrow$ i) も明らか。

定義　線型空間Xの部分集合Cの点xが，Cの**相対内点**であるとは，C の affine hull に属する任意の点uに対して，$x+t(u-x)\in C$ となる $t>0$ が存在することをいう。以下 C の相対内点の全体を ri C と表す。

注意 5　X が線型位相空間のときには，この定義は，通常の相対内点（すなわち位相論における）に一致する。

注（2） Ioffe〔4〕.

証明　Klee〔9〕を見よ。

定義　Xを線型空間とする。今，Xにおける二つの錐 K_1, K_2 が $K_1-K_2=K_2-K_1$ という性質をもつとき，K_1 と K_2 は，**一般の位置にある**という。

注意 6　錐 K_1, K_2 は，$\mathrm{ri}(K_1)\cap\mathrm{ri}(K_2)\neq\emptyset$ のとき，特に，K_1, K_2 が部分空間のとき，又，K_1 がの代数的内点を含むとき，一般の位置にある。又，K_1, K_2 が次のように定義されているときは，一般の位置にないことも明らかであろう。

$$K_1=\{(t,\ t)\in\mathbb{R}^2 \mid t\geqq 0\}$$
$$K_2=\{(-t,\ t)\in\mathbb{R}^2 \mid t\geqq 0\}$$

定義　Xを線型空間とし，CをXの凸部分集合とする。今，xをCの一点とするとき，Cのxにおける**許容方向の錐**とは，集合 $\{C-x\}$ の錐包のことである。これを以降，$\mathrm{Ad}(C,\ x)$ と表す。

II　線型拡張定理，線型選択定理

この節では，扇形作用素が，線型拡張性をもつ条件と，線型選択性をもつ条件について述べる。

定義　X, Yを線型空間とする。線型作用素 $T:X\to Y$が扇形作用素$\mathscr{A}:X\twoheadrightarrow Y$の**線型選択**であるとは，

$$Tx\in\mathscr{A}(x)\ \text{for all}\ x\in X$$

が成立することをいう。又，少なくとも一つ線型選択が存在するとき，扇形作用素$\mathscr{A}$は**線型選択性をもつ**という。

定義　X, Yを線型空間とし，LをXの部分空間とする。扇形作用素 $\mathscr{A}:X\twoheadrightarrow Y$ が **Lに関して線型拡張性をもつ**とは，$\mathscr{A}$をLに制限したときの任意の線型選択$T:L\to Y$に対して，次の条件を満たす線型作用素 $T^*:X\to Y$ が存在することをいう。

$$T^*x\in\mathscr{A}(x)\ \text{for all}\ x\in X$$
$$T^*x=Tx\ \text{for all}\ x\in L$$

このとき，T^*をTの$\mathscr{A}$に関する**線型拡張**と呼ぶ。又，扇型作用素$\mathscr{A}$が，Xの任意の部分空間に対して線型拡張性をもつとき，$\mathscr{A}$は，**線型拡張性をもつ**という。

次の定理は，余次元１の部分空間に対し，ある奇扇形作用素をその部分空間に制限したときの線型選択が，線型選択として全域に拡張できるための条件を述べたものである。

定理 2.1　X, Yを線型空間とし，Lを余次元1のXの部分空間とする。今，線型作用素$T: L \to Y$が奇扇形作用素 $\mathscr{A}: X \twoheadrightarrow Y$を$L$に制限したときの線型選択であるとき，次の i), ii) は同値である。

i)　Tは$\mathscr{A}$の線型選択として，全域に拡張される。

ii)　任意の $e \notin L$ に対して，$\bigcap_{x \in L} (\mathscr{A}(x+e) - Tx) \neq \emptyset$

証明(3)　i) $\Longrightarrow$ ii)。まず，i) が成立しているものとし，$T^*: X \to Y$をTの$\mathscr{A}$に関する線型拡張とする。このとき，任意の $e \notin L$, $x \in L$ に対して，

$$\mathscr{A}(x+e) - Tx \ni T^*(x+e) - Tx = T^*e$$

よって，

$$\mathscr{A}(x+e) - Tx \ni T^*e \text{ for all } x \in L$$

となるから

$$\bigcap_{x \in L} (\mathscr{A}(x+e) - Tx) \neq \emptyset$$

ii) $\Longrightarrow$ i)。ii) が成立しているものとすると，任意の $e \notin L$ に対して，

$$\bigcap (\mathscr{A}(x+e) - Tx) \neq \emptyset$$

であるから，この集合に属する一点yをとり，$T^*: X \to Y$ を次のように定義する。

$$T^*(x+te) = Tx + ty \text{ for all } x \in L,\ t \in \mathbb{R}$$

T^* は，明らかに線型であり，L上でTに一致する。又，任意の $x \in L$, $t \neq 0$ に対して，

$$T^*(x+te) = t(T(x/t) + y) \subset t(T(x/t) + \mathscr{A}(x/t+e) - T(x/t)) = \mathscr{A}(x+te)$$

証　了

次の定理は，扇形作用素が，ある部分空間に対して，線型拡張性をもつための条件を述べたものである。

定理 2.2　Xを線型空間，LをXの部分空間，Yを最小上界性をもつベクトル束とする。今，順序区間値奇扇形作用素 $\mathscr{A}: X \twoheadrightarrow Y$が，次の性質をもつとき，$\mathscr{A}$は$L$に関して線型拡張性をもつ。

$$L \cap \mathrm{ri}\,(\mathrm{dom}^+ \mathscr{A}) \neq \emptyset.$$

証明(4)　$T: L \to Y$を，$\mathscr{A}$をLに制限したときの任意の線型選択とする。この定理を証明するには，任意の $e \notin L$ に対して，

$$T^*x \in \mathscr{A}(x) \text{ for all } x \in \text{linear hull}\{L \cup \{e\}\}$$

$$T^*x = Tx \text{ for all } x \in L$$

注 (3)　Ioffe [7].

(4)　Ioffe [7].

を満たす線型作用素 T^* : linear hull $\{L\cup\{e\}\}\to Y$ が存在することを示せば十分である。さらに，定理 2.1 より，上記条件を満たすT^*が存在する必要十分条件は，任意の $e\notin L$ に対して，

$$\bigcap_{x\in L}[\mathscr{A}(x+e)-Tx]\neq\emptyset \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

の成立することである。よって，以下この（＊）が成立することを確かめることにする。まず，$\mathscr{A}$ は奇であるから，任意の $x,\ u\in L$ に対して，

$$\begin{aligned}0&\in\mathscr{A}(x-u)-T(x-u)\\&\subset\mathscr{A}(x+e)-\mathscr{A}(u+e)-T(x-u)\\&=[\mathscr{A}(x+e)-Tx]-[\mathscr{A}(u+e)-Tu]\end{aligned}$$

すなわち

$$[\mathscr{A}(x+e)-Tx]\cap[\mathscr{A}(u+e)-Tu]\neq\emptyset$$

さらに，$\mathscr{A}$が奇であることから

$$\mathrm{Dom}^+\mathscr{A}=-\mathrm{Dom}^-\mathscr{A}$$

となり，Xの部分空間Sを

$$S=\mathrm{Dom}^+\mathscr{A}+\mathrm{Dom}^-\mathscr{A}$$

と定義すれば

$$S=\text{affine hull}\{\mathrm{Dom}^+\mathscr{A}\}=\text{affine hull}\{\mathrm{Dom}^-\mathscr{A}\}$$

という関係が成立する。以下，二つの場合に分けて考えることにする。

i） $S\cap(L+e)=\emptyset$ の場合。

$$\mathscr{A}(x+e)=Y \text{ for all } x\in L$$

となるから，(*) は成立する。

ii） $S\cap(L+e)\neq\emptyset$ の場合。

$x\in L\cap\mathrm{ri}(\mathrm{Dom}^+\mathscr{A})$，$w\in L$，$t^+>0$，$t^->0$ を適当に選べば，

$$x+t^+(w+e)\in\mathrm{Dom}^+\mathscr{A}$$
$$-x+t^-(w+e)\in\mathrm{Dom}^-\mathscr{A}$$

とすることができる。すなわち，

$$\frac{x+t^+w}{t^+}+e\in\mathrm{Dom}^+\mathscr{A}$$

$$\frac{-x+t^-w}{t^-}+e\in\mathrm{Dom}^-\mathscr{A}$$

このことから，集合系 $\{\mathscr{A}(x+e)-Tx\,|\,x\in L\}$ には，上に有界な要素と下に有界な要素がそれぞれ少なくとも一つ存在することになる。仮定より Y は最小上界性をもつから，第 I 節注意 2 より，(*) が成り立つ。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　証　了

系 2.2.1 Xを線型空間，Yを最小上界性をもつベクトル束とする。今，順序区間値奇扇形作用素 $\mathscr{A}: X \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Y$ において，$\mathrm{Dom}^+\ \mathscr{A}$が$X$の部分空間になっているとき，$X$から$Y$への線型作用

素の集合Uが存在して，

$$\mathscr{A}(x)=\{y\in Y|\, y=Tx \text{ for some } T\in U\}$$

と$\mathscr{A}$を表すことができる。

証明 $\mathrm{Dom}^+\mathscr{A}$ がXの部分空間であるから，$\mathrm{ri}\,(\mathrm{Dom}^+\mathscr{A})=\mathrm{Dom}^+\mathscr{A}$ となることにまず注意する。以下，二つの場合に分けて考える。

i） $x\in\mathrm{Dom}^+\mathscr{A}$ の場合。$L=\{tx\,|\,t\in\mathbb{R}\}$，$T(tx)\equiv ty$ とし，定理 2.2 を適用すればよい。

ii） $x\notin\mathrm{Dom}^+\mathscr{A}$ の場合。$B:X\to Y$ を$\mathscr{A}$の任意の線型選択とし，

$$L=\text{linear hull }\{(\mathrm{Dom}^+\mathscr{A})\cup\{x\}\}$$

$$T(u+tx)=Bu+ty \text{ for } u\in\mathrm{Dom}^+\mathscr{A},\ t\in\mathbb{R}$$

とし，定理 2.2 を適用すればよい。　証　了

特に，有界区間値の扇形作用素のときには，定理 2.2 が強化されて，扇形作用素が任意の部分空間に対して線型拡張性をもつことと，Yが最小上界性をもつことが同値になる。次の定理は，このことを述べたものである。

定理 2.3 Xを線型空間，Yをベクトル束とする。このとき，次の i)，ii) は同値である。

i） Yは最小上界性をもつ。

ii） 任意の有界区間値奇扇形作用素$\mathscr{A}:X\twoheadrightarrow Y$ は，線型拡張性をもつ。

証明(5) i) $\Longrightarrow$ ii) は，定理 2.2 より明らかなので，以下，ii) $\Longrightarrow$ i) を証明する。そこで，まず，ii) が成立しているものとし，$\{C_i\}\,i\in I$ を，

$$C_i\cap C_j\neq\emptyset \quad \text{for all } i,\ j\in I$$

なる条件を満たす，Yにおける任意の有界区間の系とする。第 I 節注意 3 より，この系の共通部分が非空であれば，Yは最小上界性をもつことになる。まず，線型空間X，余次元 1 のXの部分空間L，有界区間値奇扇形作用素 $\mathscr{A}:X\twoheadrightarrow Y$ を次のように定義する。

$$X=\{x(\cdot)\,|\,x:I\to\mathbb{R},\ \#\{i\in I|\,x(i)\neq 0\}:\text{finite}\}$$

$$L=\{x(\cdot)\in X|\,\sum_i x(i)=0\}$$

$$\mathscr{A}[x(\cdot)]=\sum_i x(i)\,C_i$$

又，函数 $e_j:I\to\mathbb{R}(j\in I)$ を次のように定義する。

$$e_j(i)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$$

注（5） Ioffe〔7〕.

すると，Lの任意の点xは次の形に表わすことができる。

$$x=\sum_n t_n e_{i_n}-\sum_m s_m e_{j_m} \quad (i_n \neq j_m)$$

$$\text{ここで，} t_n>0,\ s_m>0,\ \sum t_n=\sum s_m$$

さらに，$q_{nm}=t_n s_m/\sum t_n$ とおくと，$q_{nm}>0$ であり，区間は凸集合であるから，任意の $x\in L$ に対して，

$$\mathscr{A}(x)=\sum_{nm} q_{nm}(C_{i_n}-C_{j_m})$$

と$\mathscr{A}$を表すことができる。従って，

$$0\in\mathscr{A}(x) \text{ for all } x\in L$$

が成立する。このことと，ii）より，次の条件を満たす線型作用素 $T: X\to Y$ が存在する。

$$Tx\in\mathscr{A}(x) \qquad \text{for all } x\in X$$

$$Tx=0 \qquad \text{for all } x\in L$$

定理 2.1 より，このことは次のことと同値である。

任意の $e\notin L$ に対して，　$\bigcap_{x\in L}\mathscr{A}(x+e)\neq\emptyset$

$e_i-e_j\in L$ for all $i, j\in I$ であるから，

$$\begin{aligned}\bigcap_{i\in I} C_i &= \bigcap_{i\in I}\mathscr{A}(e_i)\\ &= \bigcap_{i\in I}\mathscr{A}((e_i-e_j)+e_j)\\ &\supset \bigcap_{x\in L}\mathscr{A}(x+e_j)\neq\emptyset\end{aligned}$$

よって，i）が示されたことになる。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　証　了

次に，ある扇形作用素の線型選択が存在する条件について述べる。系 2.2.1 より，区間値奇扇形作用素 $\mathscr{A}$ において，$\mathrm{Dom}^+\mathscr{A}$ が部分空間になれば，線型選択はもちろん存在する。次の定理は，これをより一般化したものである。

定理 2.4　Xを線型空間，Yを最小上界性をもつベクトル束とする。今，区間値扇形作用素$\mathscr{A}$: $X \twoheadrightarrow Y$ において，$\mathrm{Dom}^+\mathscr{A}$ と $\mathrm{Dom}^-\mathscr{A}$ が一般の位置にあるとき，次の条件を満たす区間値奇扇形作用素 $\mathscr{B}: X \twoheadrightarrow Y$ が存在する。

$$\mathscr{B}(x)\subset\mathscr{A}(x) \text{ for all } x\in X$$

特に，同じ条件の下に，$\mathscr{A}$は線型選択をもつ。

証明(6)　多価写像 $\mathscr{B}: X \twoheadrightarrow Y$ を次のように定義する。

$$\mathscr{B}(x)=\cap\left[\sum t_i\,\mathscr{A}(x_i)\right] \quad \left(\sum t_i x_i=x\right)$$

この$\mathscr{B}$が区間値奇扇形作用となることを確かめれば，定理の前半が示されたことになる。まず，

注（6） Ioffe〔7〕.

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(-x)&=\cap[\sum t_i\mathscr{A}(x_i)]\ (\sum t_ix_i=-x)\\&=-\cap[\sum(-t_i)\mathscr{A}(x_i)]\ (\sum(-t_i)x_i=x)\\&=-\cap[\sum t_i\mathscr{A}(x_i)]\ (\sum t_ix_i=x)\\&=-\mathscr{B}(x)\end{aligned}$$

より，$\mathscr{B}$が扇形作用素ならば，奇となることがわかる。さらに，次の等式も明らかであろう。

$$\mathscr{B}(\lambda x)=\lambda\mathscr{B}(x)\ \text{for all}\ \lambda\in\mathbb{R},\ x\in X$$

又，

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(u+v)&=\cap[\sum t_i\mathscr{A}(x_i)]\ (\sum t_ix_i=u+v)\\&\subset\cap[\sum(s_i+r_i)\mathscr{A}(x_i)]\ (\sum s_it_i=u,\ \sum r_ix_i=v)\\&\subset\mathscr{B}(u)+\mathscr{B}(v)\end{aligned}$$

$\mathscr{B}$が区間値であることも明らかなので，後は

$$\mathscr{B}(x)\neq\emptyset\ \text{for all}\ x\in X$$

を確かめればよい。まず，$\mathrm{Dom}^+\mathscr{A}$ と $\mathrm{Dom}^-\mathscr{A}$ は一般の位置にあるから，$L\equiv\mathrm{Dom}^+\mathscr{A}-\mathrm{Dom}^-\mathscr{A}$ はXの部分空間になる。そこで，$x\in L$ の場合と $x\notin L$ の場合に分けて考えることにする。

i） $x\in L$ の場合。

$$\sum t_ix_i=x,\ t_i>0\ \text{for all}\ i$$

とxを表すと，少なくとも一つのiについて，$x_i\notin L$ となる。この x_i について，$\mathscr{A}(x_i)=Y$ となるので，$\mathscr{B}(x)=Y$ for all $x\notin L$ が成立する。

ii） $x\in L$ の場合。

仮定より，Yは最小上界性をもつので，集合 $\{\sum t_i\mathscr{A}(x_i)|\sum t_i x_i=x\}$ の各要素が pairwise に交わり，上に有界な要素と，下に有界な要素が少なくとも一つずつ存在すれば，$\mathscr{B}(x)$ は非空となる。よって，この二点を確かめればよい。

各要素が pairwise に交わること。$x=\sum t_i u_i=\sum s_j v_j$ とおく。今，

$$\begin{aligned}&t^+=\max(t,0),\ t^-=\max(-t,0)\\&w^+=\sum t_i^+u_i,\quad w_i^-=\sum t_i^-u_i\\&z^+=\sum s_j^+v_j,\quad z_i^-=\sum s_j^-v_j\end{aligned}$$

とおくと，

$$w^++z^-=w^-+z^+$$

という関係が成立する。従って，

$$\begin{aligned}0&\in\mathscr{A}(w^++z^-)-\mathscr{A}(w^-+z^+)\\&\subset\mathscr{A}(w^+)+\mathscr{A}(z^-)-\mathscr{A}(w^-)-\mathscr{A}(z^+)\\&\subset\sum t_i^+\mathscr{A}(u_i)+\sum s_j^-\mathscr{A}(v_j)\\&\quad-\sum t_i^-\mathscr{A}(u_i)-\sum s_j^+\mathscr{A}(v_j)\\&=\sum t_i\mathscr{A}(u_i)-\sum s_j\mathscr{A}(v_j)\end{aligned}$$

従って,

$$[\sum t_i \mathscr{A}(u_i)] \cap [\sum s_j \mathscr{A}(v_j)] \neq \emptyset$$

上に有界な要素と下に有界な要素が存在すること。

$$x \in L = \mathrm{Dom}^+ \mathscr{A} - \mathrm{Dom}^- \mathscr{A} = \mathrm{Dom}^- \mathscr{A} - \mathrm{Dom}^+ \mathscr{A}$$

であるから,

$$x = u' - v' = v'' - u''$$

となる $u', u'' \in \mathrm{Dom}^+ \mathscr{A}$, $v', v'' \in \mathrm{Dom}^- \mathscr{A}$ が存在する。$u', u'', v'\ v''$ に対して,

$$\mathscr{A}(u') - \mathscr{A}(v') \text{ は上に有界}$$

$$\mathscr{A}(v'') - \mathscr{A}(u'') \text{ は下に有界}$$

になることがわかる。

定理の後半は, $\mathrm{ri}(\mathrm{Dom}^+ \mathscr{B}) = \mathrm{Dom}^+ \mathscr{B} = L$ となることと, 系 3.2.1 より明らか。 証　了

III　扇形作用素と Hahn-Banach の定理

この節では, 扇形作用素に関する Hahn-Banach 型の拡張定理を述べ, 扇形作用素の理論の応用として, ベクトル束に値をとる線型作用素に関する, Hahn-Banach の定理について考察する。

次の定理は, 線型空間における扇形作用素の拡張定理を述べたものである。

定理 3.1　Xを線型空間, LをXの部分空間, Yを最小上界性をもつベクトル束とする。今, L 上の区間値奇扇形作用素 $\mathscr{A} : L \twoheadrightarrow Y$ と劣線型作用素 $p : X \to Y$ があって,

$$\mathscr{A}(x) \subset [-\infty,\ p(x)] \text{ for all } x \in L$$

という関係を満たしているものとする。このとき, 次の性質をもつ区間値奇扇形作用素 $\mathscr{A}^* : X \twoheadrightarrow Y$ が存在する。

$$\mathscr{A}^*(x) = \mathscr{A}(x) \text{ for all } x \in L$$

$$\mathscr{A}^*(x) \subset [-\infty,\ p(x)] \text{ for all } x \in X$$

証明　系 2.2.1 より, LからYへの線型作用素の集合Uが存在して,

$$\mathscr{A}(x) = \{y \in Y \mid y = Tx \text{ for some } T \in U\}$$

と$\mathscr{A}$を表すことができる。このUに属する任意の線型作用素Tに対して,

$$Tx \in [-p(-x),\ p(x)] \text{ for all } x \in L$$

が成立するから, 定理 3.2 より,

$$T^*x \in [-p(-x),\ p(x)] \text{ for all } x \in X$$

$$T^*x = Tx \qquad\qquad \text{for all } x \in L$$

を満たす線型作用素 $T^* : X \to Y$ が存在する。この T^* の集合を U^* とし, $\mathscr{A}^* : X \twoheadrightarrow Y$ を,

$$\mathscr{A}^*(x)=\{y\in Y \mid y=T^*x \text{ for some } T\in U^*\}$$

と定義すれば，これが所望の性質を満たす。　　証　了

次に，局所凸線型位相空間における連続線型作用素の拡張定理を述べる。

定理 4.2　X，Y を局所凸線型位相空間とし，Y はさらに，内点をもつ normal cone K によって順序づけられた最小上界性をもつベクトル束とする。又，LをXの部分空間，$T: L\to Y$を連続線型作用素とする。このとき，次の i)，ii) は同値である。

i)　$T(U\cap L)$ が上に有界となるXにおける 0 の近傍Uが存在する。

ii)　$T^*x=Tx$ for all $x\in L$

という条件を満たす連続線型作用素 $T^*: X\to Y$ が存在する。

証明(7)　i) $\Longrightarrow$ ii)。Uを$T(U\cap L)$ が上に有界となるXにおける 0 の近傍とし，$b\in Y$ を，$T(U\cap L)$ の上界とする。ここで，一般性を失うことなく，U を凸かつ円形とする。今，$q: X\to\mathbb{R}$ を U の Minkowski 汎函数とすると，

$$Tx\in[-q(-x)b,\ q(x)b] \text{ for all } x\in L$$

という関係が成り立つ。そこで，劣線型作用素 $p: X\to Y$ を $p(x)=q(x)b$ と定義すると，定理 2.3 より，次の条件を満たす線型作用素 $T^*: X\to Y$ が存在する。

$$T^*x=Tx \text{ for all } x\in L$$

$$T^*x\in[-q(-x)b,\ q(x)b] \text{ for all } x\in X$$

又，W を K-saturated で円形なYにおける 0 の近傍とし，$\mu>0$ を $\mu b\in W$ となるようにとる。すると，$T^*(\mu U)\subset[-\mu b,\ \mu b]\subset W$ となるから，T^* は連続になる。

ii) $\Longrightarrow$ i)。$T^*: X\to Y$ を ii) の条件を満たす連続線型作用素とする。uをKの内点とし，

$$U=\{x\in X \mid T^*x\precsim u\}$$

とUを定義すると，U は x における 0 の近傍になり，さらに，任意の $x\in U\cap L$ に対し，$u\succsim T^*x=Tx$ となるから，$T(U\cap L)$ は上に有界である。　　証　了

次に，自明でない連続線型作用素の存在定理を述べる。

定理 3.3　X，Yを局所凸線型位相空間とし，Yは，内点をもつ normal cone K によって順序づけられた最小上界性をもつベクトル束とする。このとき，XからYへの自明でない連続線型作用素が存在する。

注（7） Peressini〔11〕参照。

証明　uをKの内点とし，任意の $x\in X\setminus\{0\}$ に対して，$L=\{tx\mid t\in\mathbb{R}\}$，$T(tx)=tu$ とし，定理 3.2 を適用すればよい。　　証　了

次に，Banach 空間における同様の定理を述べるが，その前に，新しい概念をいくつか導入しておく。

定義　X，Y をノルム空間とし，$\mathscr{A}:X\twoheadrightarrow Y$ を扇形作用素とする。このとき，$\mathscr{A}$**の作用素ノルム**を次のように定義する。

$$\|\mathscr{A}\|=\sup\{\|y\|\mid y\in\mathscr{A}(x),\ \|x\|\leqq 1\}$$

定義　S をコンパクト，Hausdorff, extremally disconnected な集合とし，$C(S)$ を S 上の連続実数値函数の空間とする。

注意　$C(S)$ に次の錐Kで半順序を定めると最小上界性をもつ Banach 束になる。

$$K=\{x(\cdot)\in C(S)\mid x(s)\geq 0\ \text{ for all } s\in S\}$$

証明　Day〔2〕を見よ。

定理 3.4　Xをノルム空間，L をX の部分空間とする。今，有界区間値奇扇形作用素$\mathscr{A}:L\twoheadrightarrow C(S)$ が $\|\mathscr{A}\|=1$ となるとき，次の条件を満たす有界区間値奇扇形作用素 $\mathscr{A}^*:X\twoheadrightarrow C(S)$ が存在する。

$$\mathscr{A}^*(x)=\mathscr{A}(x)\ \text{for all}\ x\in L$$

$$\|\mathscr{A}^*\|=1$$

証明　B を $C(S)$ の単位球とすると，

$$\mathscr{A}(x)\subset\|x\|B\ \text{ for all }\ x\in L$$

となるから，後は通常の議論による。　　証　了

定理 3.5　Xをノルム空間，LをXの部分空間とする。今，線型作用素 $T:L\to C(S)$ が $\|T\|=1$ となるとき，次の条件を満たす線型作用素 $T^*:X\to C(S)$ が存在する。

$$T^*x=Tx\ \text{ for all }\ x\in L$$

$$\|T^*\|=1$$

証明　通常の議論による。　　証　了

定理 3.6 Xをノルム空間とし，$x_0 \neq 0$ をXの任意の要素とする。このとき，次の条件を満たす線型作用素 $T: X \to C(S)$ が存在する。

$$\|T^*\|=1$$

$$T(x_0)=b\|x_0\| \text{（ここで，} b \text{は} C(S) \text{の単位球の一点）}$$

証明 通常の議論による。

Ⅳ 同値定理

この節では，ベクトル束Yにおけるいくつかの性質の同値性を述べる。

定理 4.1 ベクトル束Yにおいて，次の i)～iv) は同値である。

i）（Hahn-Banach の拡張定理）Xを線型空間LをXの部分空間とし，$p: X \to Y$ を劣線型作用素，$T: L \to Y$を線型作用素とし，

$$Tx \precsim p(x) \text{ for all } x \in L$$

という関係が成り立つとき，次の条件を満たす線型作用素 $T^*: X \to Y$ が存在する。

$$T^*x = Tx \text{ for all } x \in L$$

$$T^*x \precsim p(x) \text{ for all } x \in X$$

ii） Yは最小上界性をもつ。

iii）（サンドウィッチ性） Xを線型空間，$F: X \to Y \cup \{+\infty\}$ を凸函数，$G: X \to Y \cup \{-\infty\}$ を凹函数とし，

$$G(x) \precsim F(x) \text{ for all } x \in X$$

が成り立ち，$Ad(\text{Dom } F, u)$ と $Ad(\text{Dom } G, u)$ が一般の位置にある $u \in X$ が存在するとき，次の条件を満たす線型作用素$T: X \to Y$とYの一点yが存在する。

$$G(x) \precsim Tx + y \precsim F(x) \text{ for all } x \in X$$

iv）（一般化された Hahn-Banach の定理）X を線型空間，$F: X \to Y$ を劣線型作用素，$G: X \to Y \cup \{-\infty\}$ を凹函数とし，次の条件を満たすものとする。

$$G(x) \precsim F(x) \text{ for all } x \in X$$

このとき，次の条件を満たす線型作用素 $T: X \to Y$ が存在する。

$$G(x) \precsim Tx \precsim F(x) \text{ for all } x \in X$$

証明 i) $\overset{(8)}{\Longrightarrow}$ ii)。定理 2.3 より明らか。

ii) $\overset{(9)}{\Longrightarrow}$ iii)。ii) が満たされているものとし，$F: X \to Y \cup \{+\infty\}$，$G: X \to Y \cup \{-\infty\}$ をそれ

注（8）（9） Ioffe [7].

それ iii) において述べた性質をもつ凸函数と凹函数とする。今，劣線型作用素 H_F: $R\times X\to Y\cup\{+\infty\}$ を次のように定義する。

$$H_F(t,\ x)\equiv\begin{cases} tF(x/t) & \text{if } t>0 \\ 0 & \text{if } t=0,\ x=0 \\ +\infty & \text{if otherwise} \end{cases}$$

すると，

$$\mathrm{Dom}\ H_F=\{(t,\ x)\,|\,t>0,\ x/t\in\mathrm{Dom}\ F\}\cup\{(0,\ 0)\}$$

となる。又優線型作用素 $H_G:\mathbb{R}\times X\to Y\cup\{-\infty\}$ も同様に定義する。最初に，Dom H_F と Dom H_G が一般の位置にあることを示すが，そのためには，次の二式を示せば十分である。

(＊) $\mathrm{Dom}\ H_F-\mathrm{Dom}\ H_G=\mathbb{R}\,[Ad(\mathrm{Dom}\ F,\ 0)-Ad(\mathrm{Dom}\ G,\ 0)]$

(＊＊) $\mathrm{Dom}\ H_G-\mathrm{Dom}\ H_F=\mathbb{R}\,[Ad(\mathrm{Dom}\ G,\ 0)-Ad(\mathrm{Dom}\ F,\ 0)]$

ここで，一般性を失うことなく，$u=0$ としている。まず，$0\in\mathrm{Dom}\ F\cap\mathrm{Dom}\ G$ であるから，

$$K\equiv\mathrm{Dom}\ H_F-\mathrm{Dom}\ H_G>\mathrm{Dom}\ H_F-(1,\ 0)$$

が成り立つ。Kは凸錐なので，

$$(t,\ 0)\in K \text{ for all } t\in\mathbb{R}$$

$$(0,\ x)\in K \text{ for all } x\in Ad(\mathrm{Dom}\ F,\ 0)$$

従って，

$$\mathbb{R}\times Ad(\mathrm{Dom}\ F,\ 0)\subset K$$

が成り立つ。同様にして，

$$-[\mathbb{R}\times Ad(\mathrm{Dom}\ G,\ 0)]\subset K$$

も成り立つことがわかる。従って，

$$\mathrm{Dom}\ H_F-\mathrm{Dom}\ H_G\supset\mathbb{R}\times[Ad(\mathrm{Dom}\ F,\ 0)-Ad(\mathrm{Dom}\ G,\ 0)]$$

が成り立つ。一方，$(t,\ x)\in\mathrm{Dom}\ H_F$, $x\neq 0$ とすると，

$$x/t\in\mathrm{Dom}\ F\subset Ad(\mathrm{Dom}\ F,\ 0)$$

となり，

$$\mathrm{Dom}\ H_F\subset\mathbb{R}\times Ad(\mathrm{Dom}\ F,\ 0)$$

が成り立つ。以下同様にして，(＊)(＊＊) が示される。次に，扇形作用素 $\mathscr{A}:\mathbb{R}\times X\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$ を次のように定義する。

$$\mathscr{A}(t,\ x)=[H_G(t,\ x),\ H_F(t,\ x)]$$

すると，定理 2. 4 より，$\mathscr{A}$は線型選択をもつ。それを $T:\mathbb{R}\times X\to Y$ とする。今，

$$T^*(\cdot)\equiv T(0,\ \cdot),\ y=T(1,\ 0)$$

とすれば，

$$G(x)\precsim T^*x+y\precsim F(x) \text{ for all } x\in X$$

を満たすことがわかる。

iii) $\Longrightarrow$ iv)。iii)が満たされているものとし，$F: X \to Y$ を劣線型作用素，$G: X \to Y \cup \{-\infty\}$ を凹函数とする。すると，iii) より，次の条件を満たす線型作用素 $T: X \to Y$ と Y の一点 y が存在する。

$$G(x) \precsim Tx + y \precsim F(x) \text{ for all } x \in X \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

この T が iv) を満たさないものとし，K を Y に半順序を定める錐とすると，次の条件を満たす x^* $\in X$ が存在することになる。

$$F(x^*) - Tx^* \notin K \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(**)$$

(*) より，この x^* に対して，

$$t\{F(x^*) - Tx^*\} + y \in K \text{ for all } t > 0$$

が成り立つ。従って，

$$F(x^*) - T(x^*) + y/t \in 1/t\,K \subset K$$

ここで $1/t = k$ とおくと，

$$F(x^*) - Tx^* + ky \in K \text{ for all } k > 0$$

ここで，K は linearly closed であるから，

$$F(x^*) - Tx^* \in K$$

これは，(**) に矛盾する。

iv) $\to$ i)(10)。iv) が満たされているものとし，L を，X の部分空間，$p: X \to Y$ を劣線型作用素，$T: L \to Y$ を線型作用素とし，

$$Tx \precsim p(x) \text{ for all } x \in L$$

が満たされているものとする。今，凹函数，$G: X \to Y \cup \{-\infty\}$ を次のように定義する。

$$G(x) = \begin{cases} Tx & \text{if } x \in L \\ -\infty & \text{if } x \notin L \end{cases}$$

すると，iv) より，次の条件をみたす線型作用素 $T^*: X \to Y$ が存在する。

$$G(x) \precsim T^*x \precsim p(x) \text{ for all } x \in X$$

ここで，L は X の部分空間であったから，

$$T^*x = Tx \text{ for all } x \in L$$

証　了

注意 1　i) と ii) の同値性は，wedge K によって順序づけられた順序線空間というより一般的な空間においても成り立つ。このことについては，たとえば，Ioffe〔4〕，To〔15〕などを見よ。

注意 2　iii) において，Ad(Dom F, u) と Ad(Dom G, u) が一般の位置にある $u \in X$ が存在するという仮定を置いた。実際，この仮定が落ちると，Y が実数の場合にも，iii) が成り立たないことが次の例によってわかる。

注 (10)　Hirano, Komiya, Takahashi〔3〕.

例[11] 集合 X, Y, Y_p を次のように定義する。

$$X=\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\in\mathbb{R}^{\infty}\mid\exists\, n_0,\ x_n=0 \text{ for all } n\geq n_0\}$$

$$Y=\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\in X\mid\exists\, n\in\mathbb{N},\ x_n>0\}$$

$$Y_p=\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\in X\mid x_p<0,\ x_m\leq 0 \text{ for } 1\leq m<p,\ x_m=0 \text{ for } m>p\}$$

今，X上の凸函数 $F:X\to\mathbb{R}$ を次のように定義する。

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{if } x=0 \\ +\infty & \text{if } x\in Y \\ p(x_1+\cdots\cdots+x_p) & \text{if } x\in Y_p,\ p\geq 1 \end{cases}$$

ここで，$\{0\}$，Y，Y_p $(p\geq 1)$ は，互いに素であり，$\{0\}\cup Y\cup(\bigcup_p Y_p)=X$ となるから，Fは well-defined である。又，凹函数 $G:X\to Y\cup\{-\infty\}$ を次のように定義する。

$$G(x)=\begin{cases} 0 & \text{if } x=0 \\ -\infty & \text{if otherwise} \end{cases}$$

すると，このF，Gは明らかに上記仮定を満たさない。今，

$$G(x)\leqq T(x)\leqq F(x) \text{ for all } x\in X$$

となる線型作用素 $T:X\to\mathbb{R}$ が存在すると仮定し，$e_p=(0,\cdots\cdots 0,\overset{p}{1},0\cdots\cdots)$，と表し，$\varepsilon>0$ を任意にとると，$-e_1-\varepsilon e_p\in Y_p$ だから，

$$\begin{aligned}-T(e_1)-\varepsilon T(e_p)&=T(-e_1-\varepsilon e_p)\\ &\leqq F(-e_1-\varepsilon e_p)\\ &\leqq -p-p\varepsilon\end{aligned}$$

となる。ここで，$\varepsilon\to 0$ とすると，

$$-T(e_1)\leq -p$$

となるが，これは，$T(e_1)$ が有限値だから不可能。

参考文献

〔1〕 Clarke, F.H.: *Optimization and Nonsmooth Analysis.*, Canad. Math. Soc. Series, Wiley, New York. (1983).

〔2〕 Day, M.M.: *Normed Linear Spaces.*, Springer-Verlag, Berlin. (1958).

〔3〕 Hirano, Norimichi, Hidetoshi Komiya and Wataru Takahashi: "A generalization of the Hahn-Banach Theorem." *J. Math. Anal. Appl.* 88 (1982) 333–340.

〔4〕 Ioffe, A.D.: "A new proof of the equivalence of the Hahn-Banach extension and least upper bound properties." *Proc. Amer. Math. Soc.* 87 (1981) 385–389.

〔5〕 ――――: "Nonsmooth analysis: differential calculus of nondifferential mappings." Trans. Amer. Math. Soc. 266, (1981), 1–56.

〔6〕 ――――: "Non-smooth analysis and the theory of fans." in *Convex Analysis and Optimiza-*

注 (11) Simon〔13〕.

tion. J. P. Aubin and R. B. Vinter ed. Pitman Advanced Publishing Program, Boston. (1982).

〔7〕 ―――――: "On foundation of convex analysis." *Math. Oper. Res.*, 9 (1984), 156–189.

〔8〕 ―――――: "Necessary conditions in nonsmooth optimization." *Math. Oper. Res.*, 9 (1984), 159–189.

〔9〕 Klee, Jr. V. L.: "Convex sets in linear spaces," *Duke Math. J.*, 18, (1951), 443–466.

〔10〕 丸山 徹『函数解析学』慶應通信, 1975.

〔11〕 Peressini, A. L.: *Ordered Topological Vector Spaces.*, Harper and Row Pub., New York. (1967).

〔12〕 Schaefer, H. H.: *Topological Vector Spaces.*, Springer-Verlag New-York. (1970).

〔13〕 Simon, S.: "Extended sandwich versions of the Hahn-Banach Theorems." *J. Math. Anal. Appl.* 21, (1968), 112–122.

〔14〕 高橋 渉:『非線型関数解析学』近代科学社, 東京, 1988.

〔15〕 To T-o: "The equivalence of the least upper bound property and the Hahn-Banach extension property in order vector spaces." *Proc. Amer. Math. Soc.* 30, (1971), 287–296.

（慶應義塾大学大学院経済学研究科博士課程）