

Title	変分不等式による競争均衡の存在証明
Sub Title	Variational approach to existence problem of competitive equilibria
Author	丸山, 徹
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1989
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.82, No.1 (1989. 4) ,p.55- 64
JaLC DOI	10.14991/001.19890401-0055
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19890401-0055

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

変分不等式による競争均衡の存在証明

丸 山 徹

序

今日知られている標準的な競争均衡の存在証明において、最も核心となるのは、ある価格の下における超過需要の集合の中に非正のベクトルが含まれることを主張する、いわゆる Gale=二階堂の補題であろう。

この補題の証明は、たとえば価格調整函数と超過需要函数の直積として定義される多価写像の不動点を見出すことに帰着することも周知のとおりである。この証明法は価格が超過需要を定め、超過需要の大きさによって価格が再調整されるという、価格と超過需要の相互作用に巧みな数学的表現を与えることをつうじてその目的を達するものであり、スミス以来の経済学者のヴィジョンに素直にアッピールするところがあった。

しかし、Gale=二階堂の補題自体は、専ら超過需要函数の性質だけに依拠するものであり、価格の調整方式の如何には本質的に無縁であると言わねばならない。存在証明における価格調整函数は、いわば証明の便法のために導入された、甚だ技巧的なトリックなのである。そこで本稿では、Gale=二階堂の補題を、価格調整函数を一切用いることなく、超過需要函数の性質だけから証明する方法を示そうと思う。

本稿においてあらたに得られた Browder の変分不等式の証明法と、それが Gale=二階堂の補題を含意するという注意は第IV節で論じられる。第I～III節は、専らそのための準備に費され、とくに新しい内容は含んでいない。

以下の理論は、より一般的な空間上でも展開することができるが、ここでは主として経済学への応用に関心を有する読者を想定して、すべて有限次元空間上で論ずることとする。ただし、そのような制約を課すかわりに、すべての命題に、殆ど自足的な証明を与えることとした。

これらの理論の周辺には、数学的にも経済学的にも、まだまだ論ずべき重要な話題が数多く見出されるのであるが、ここでは一切わき道にそれず、我々の目標である Gale=二階堂の補題に直進することにした。^(*)

(*) 私は慶應義塾大学経済学部で講座「数理経済学」(昭和63年度)において、この間の事情を詳しく論じたのであるが、本稿はその折の講義録に基づくものである。より一般的な展開および多くの関連のある話題については、筆者の慶應義塾大学大学院における昭和63年度の講義録『非線形函数解析学の基礎』(本塾大学図書館蔵)を参照していただきたい。

I 1 の分解

M を $\mathbb{R}^l$ の (非空) 部分集合とし, M における有限個の開集合 $U_1, U_2, \dots, U_n$ は

$$\bigcup_{j=1}^n U_j = M \quad (1)$$

を満たすものとする。すなわち $\{U_j\}$ は M の開被覆 (open covering) である。

さて, $\mathbb{R}^l$ 上の Euclid の距離を ρ とし, 各 $j=1, 2, \dots, n$ に対して, 函数 $\alpha_j: M \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\alpha_j(x) = \rho(x, M \setminus U_j) \quad (2)$$

と定義すれば, これは連続でしかも

$$\alpha_j(x) \begin{cases} > 0 & \text{if } x \in U_j \\ = 0 & \text{if } x \notin U_j \end{cases} \quad (3)$$

である。さらに(1)により, どの $x \in M$ に対しても, これを含む U_j が存在し, この U_j に対応する α_j については $\alpha_j(x) > 0$ となる。したがって

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j(x) > 0 \quad \text{for all } x \in M. \quad (4)$$

そこで函数 $\beta_j: M \rightarrow [0, 1]$ ($j=1, 2, \dots, n$) を次のように定義する。

$$\beta_j(x) = \frac{\alpha_j(x)}{\sum_{k=1}^n \alpha_k(x)}. \quad (5)$$

すると, β_j については以下の基本的性質がすぐに判明する。

1° β_j は連続。

$$2^\circ \quad \beta_j(x) \begin{cases} > 0 & \text{if } x \in U_j \\ = 0 & \text{if } x \notin U_j \end{cases}$$

$$3^\circ \quad \sum_{j=1}^n \beta_j(x) = 1 \quad \text{for all } x \in M.$$

この $\{\beta_j\}$ のことを, $\{U_j\}$ に従属する **1 の分解** (partition of unity subordinate to $\{U_j\}$) と呼ぶのである。

II Ky Fan の不等式

定理 A (Fan) K を $\mathbb{R}^l$ の非空・コンパクト・凸集合とし, 函数 $f: K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ は次の三条件を満足するものとしよう。

- (i) すべての $y \in K$ について, $x \mapsto f(x, y)$ は上半連続。
- (ii) すべての $x \in K$ について, $y \mapsto f(x, y)$ は凸。
- (iii) ある $c \in \mathbb{R}$ について, $f(x, x) \geq c$ for all $x \in K$ 。

このとき,

$$f(x^*, y) \geq c \quad \text{for all } y \in K$$

を満たす $x^* \in K$ が存在する。

証明 (Takahashi [4]) 背理法による。仮にどの $x \in K$ についても、それに応じて $f(x, y) < c$ となる $y \in K$ が存在するものとしてみよう。

各 $y \in K$ に対して

$$U_y = \{x \in K \mid f(x, y) < c\}$$

とおけば、条件(i)によって、 U_y は K における開集合である。また背理法の仮定から

$$K = \bigcup_{y \in K} U_y$$

となる。しかも K はコンパクトなので、 K の開被覆 $\{U_y \mid y \in K\}$ は有限部分開被覆

$$U_{y_1}, U_{y_2}, \dots, U_{y_n}$$

を有する。そこで $\{U_{y_1}, U_{y_2}, \dots, U_{y_n}\}$ に従属する 1 の分解を

$$\beta_j : K \longrightarrow [0, 1]; j=1, 2, \dots, n$$

としよう。ここで

$$\beta_j(x) \neq 0 \implies x \in U_{y_j} \implies f(x, y_j) < c \quad (6)$$

であることに留意する。

さて、写像 $p : K \longrightarrow K$ を

$$p(x) = \sum_{j=1}^n \beta_j(x) y_j$$

と定義すれば、明らかにこれは連続である。したがって Brouwer の不動点定理により、 p は不動点 $x^* \in K$ を有する。すなわち

$$x^* = p(x^*) = \sum_{j=1}^n \beta_j(x^*) y_j. \quad (7)$$

この x^* を用いて $f(x^*, x^*)$ を評価すると、

$$c \underset{(iii)}{\leq} f(x^*, x^*) \underset{(7)}{=} f(x^*, \sum_{j=1}^n \beta_j(x^*) y_j) \underset{(ii)}{\leq} \sum_{j=1}^n \beta_j(x^*) f(x^*, y_j) \underset{(6)}{<} c.$$

これは明らかに矛盾である。

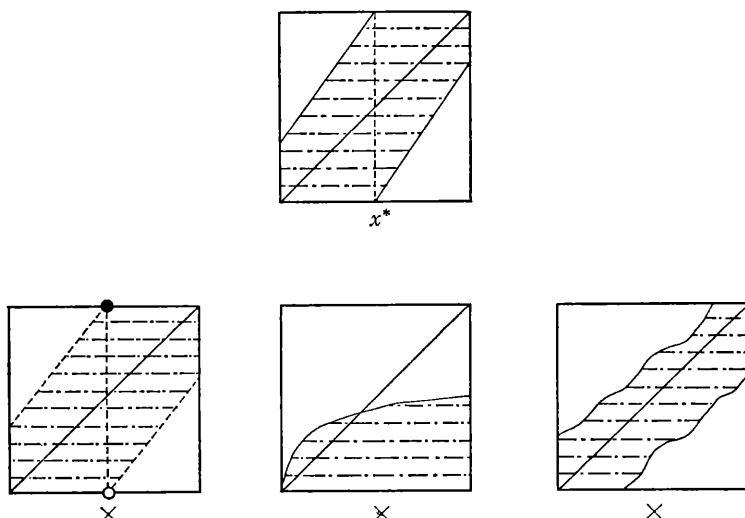
(証了)

Ky Fan の定理をより直感的に把握するために、いま集合 $A \subset K$ が次のような諸条件を満たしているものとしてみよう。

(イ) すべての $y \in K$ について、 $\{x \in K \mid (x, y) \in A\}$ は閉。

(ロ) すべての $x \in K$ について、 $(x, x) \in A$ 。

(ハ) すべての $x \in K$ について、 $\{y \in K \mid (x, y) \in A\}$ は凸。



第1図

上の図のうち最初の1枚は (イ) (ロ) (ハ) をすべて満たしているが、残りの3枚は、いずれかの条件が満たされていない例を示している。この図をよく眺めてみると、集合 A が (イ) (ロ) (ハ) の条件を満たす場合は、ある $x^* \in K$ に対して

$$\{x^*\} \times K \subset A$$

の成り立つことが推測されるであろう。下3枚の図では、これが成り立たない。

そこで Ky Fan の定理に戻って

$$A = \{(x, y) \in K \times K \mid f(x, y) \geq c\}$$

とおけば、この A については (イ) (ロ) (ハ) がすべて満たされ、Ky Fan の不等式の成り立つことが直感されるであろう。

III 角谷の不動点定理

角谷の不動点定理についてはさまざまな証明法が知られているが、ここでは Ky Fan の不等式を援用する方法を示そう。

定理B (角谷) K を $\mathbb{R}^l$ の非空・コンパクト・凸集合とし、また多価写像 $T: K \rightrightarrows K$ はコンパクト・凸値かつ優半連続とする。このとき $x^* \in \Gamma(x^*)$ となる $x^* \in K$ が存在する。

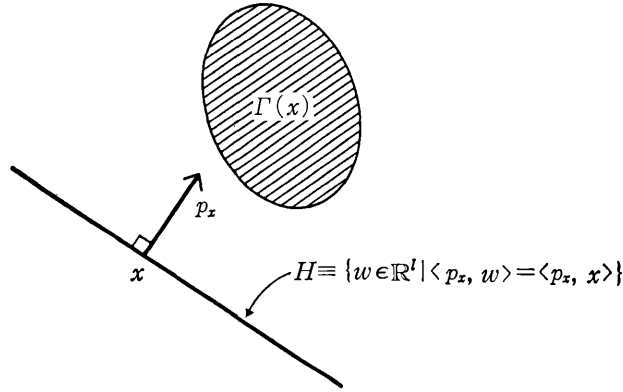
証明 背理法による。いま仮に

$$x \notin \Gamma(x) \text{ for all } x \in K$$

としてみよう。 $\Gamma(x)$ がコンパクト・凸であることに注意して、凸集合の分理定理を用いると、

$$\langle p_x, x \rangle < r_x < \inf_{z \in \Gamma(x)} \langle p_x, z \rangle \quad (8)$$

を満たす $0 \neq p_x \in \mathbb{R}^l$ と $r_x \in \mathbb{R}$ とが存在する。



第2図

函数 $\langle p_x, \cdot \rangle$ を $A(\cdot)$ と書くと、これはもちろん連続。したがって合成写像 $A \circ \Gamma : K \longrightarrow \mathbb{R}$ は優半連続となる。そこで

$$\{\langle p_x, z \rangle \mid z \in \Gamma(x)\} = (A \circ \Gamma)(x) \quad (9)$$

$$(A \circ \Gamma)(x) \subset (r_x, \infty) \quad (10)$$

であることに注意すると、 x の十分小さな (K における) 近傍 W について

$$\{\langle p_x, z \rangle \mid z \in \Gamma(w)\} = (A \circ \Gamma)(w) \subset (r_x, \infty) \quad \text{for all } w \in W \quad (11)$$

が成り立つ。また A の連続性と $\langle p_x, x \rangle = A(x) < r_x$ であることにより、 x の十分小さな (K における) 近傍 V について

$$\langle p_x, w \rangle = A(w) < r_x \quad \text{for all } w \in V. \quad (12)$$

さらに $U_x = W \cap V$ とすれば、 U_x 内の点については(11)と(12)とが同時に成り立つので、

$$\langle p_x, w \rangle < r_x < \inf_{z \in \Gamma(w)} \langle p_x, z \rangle \quad \text{for all } w \in U_x. \quad (13)$$

さて、各 $x \in K$ ごとに上記のように U_x をつくれば、

$$K = \bigcup_{x \in K} U_x$$

であり、 K はコンパクトであるから、 $\{U_x \mid x \in K\}$ は有限部分開被覆

$$U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}$$

を有する。そこで $\{U_{x_j}\}$ に従属する1の分解を

$$\beta_j : K \longrightarrow [0, 1]; \quad j=1, 2, \dots, n$$

とする。さらに $f : K \times K \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^n \beta_j(x) \langle p_{x_j}, x - y \rangle \quad (14)$$

と定義すれば、($c = 0$ として) f は定理 A の条件 (i) (ii) (iii) を満たす。ゆえに同定理により、

$$f(x^*, y) = \sum_{j=1}^n \beta_j(x^*) \langle p_{x_j}, x^* - y \rangle \geq 0 \quad \text{for all } y \in K \quad (15)$$

となる $x^* \in K$ が存在する。

ここで $\beta_j(x^*) \neq 0 \implies x^* \in U_{x_j}$ であるから、(13)により

$$\langle p_{x_j}, x^* \rangle < r_{x_j} < \inf_{z \in \Gamma(x^*)} \langle p_{x_j}, z \rangle \quad (16)$$

である。(15)(16) からすべての $y \in K$ について

$$\sum_{j=1}^n \beta_j(x^*) \langle p_{x_j}, y \rangle \leq \sum_{j=1}^n \beta_j(x^*) \langle p_{x_j}, x^* \rangle < \sum_{j=1}^n \beta_j(x^*) \langle p_{x_j}, z \rangle \quad \text{for all } z \in \Gamma(x^*) \quad (17)$$

とならねばならない。 $\Gamma(x^*) \subset K$ だから、とくに $y = z \in \Gamma(x^*)$ とすることもでき、そうすると

$$\sum_{j=1}^n \beta_j(x^*) \langle p_{x_j}, z \rangle < \sum_{j=1}^n \beta_j(x^*) \langle p_{x_j}, z \rangle$$

となる。矛盾。

(証了)

IV 変分不等式と Gale = 二階堂の補題

定理 C (Browder [1]) K を $\mathbb{R}^l$ の非空・コンパクト・凸集合とし、写像 $T: K \longrightarrow \mathbb{R}^l$ は連続とする。このとき

$$\langle T(x^*), x^* - y \rangle \geq 0 \quad \text{for all } y \in K \quad (18)$$

を満たす $x^* \in K$ が存在する。

証明 まず函数 $f: K \times K \longrightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x, y) = \langle T(x), x - y \rangle$$

と定義する。すると f は x について連続、 y について affine、しかも $f(x, x) = 0$ (for all $x \in K$) である。ゆえに Ky Fan の不等式 (定理 A) により、

$$f(x^*, y) \geq 0 \quad \text{for all } y \in K$$

を満たす $x^* \in K$ が存在する。この x^* が所望の性質を有することは明白であろう。(証了)

不等式 (18) を変分不等式 (variational inequality) と呼び、とくに最近の非線形函数解析学において、その有用性が立証されている。

例 1 $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ が滑らかな函数で、 $x^* \in [a, b]$ において

$$f(x^*) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$$

が成り立つものとする。このとき

$$(\text{Case 1}) \quad a < x^* < b \implies Df(x^*) = 0$$

$$(\text{Case 2}) \quad x^* = a \implies Df(x^*) \geq 0$$

$$(\text{Case 3}) \quad x^* = b \implies Df(x^*) \leq 0$$

の三つの可能性がある。これを要約すれば

$$Df(x^*) (x - x^*) \geq 0 \quad \text{for all } x \in [a, b] \quad (19)$$

が成り立たねばならない。そこで $T(\cdot) = -Df(\cdot)$ とおけば、(19)はちょうど変分不等式の形を成している。

例 2 C は $\mathbb{R}^l$ の閉・凸集合とし、 $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ は滑らかな函数で、 $x^* \in C$ において

$$f(x^*) = \min_{x \in C} f(x)$$

が成り立っているものとする。任意の $x \in C$ を固定して考えると、 $x^* + t(x - x^*) \in C$ ($0 \leq t \leq 1$) であるから、

$$f(x^*) \leq f(x^* + t(x - x^*)) \quad \text{for all } t \in [0, 1].$$

したがって、いま $g(t) = f(x^* + t(x - x^*))$ とおけば、 $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ は $t=0$ において極小値をとることになる。例 1 と同様にして

$$Dg(0) = Df(x^*)(x - x^*) \geq 0$$

とならねばならない。これが任意の $x \in C$ について成り立つのだから

$$Df(x^*)(x - x^*) \geq 0 \quad \text{for all } x \in C. \quad (20)$$

ここでまた $T(\cdot) = -Df(\cdot)$ とおけば、(20)は変分不等式の形を成す。

次に定理 C を多価写像の場合に拡張しよう。まず Berge の最大値定理と定理 A の帰結として、次の補題を得る。

補題 A K を $\mathbb{R}^l$ の非空・コンパクト・凸集合、 $\Gamma: K \rightarrow \mathbb{R}^l$ はコンパクト・凸値で優半連続とする。このとき

$$\max_{z \in \Gamma(x^*)} \langle z, x^* - y \rangle \geq 0 \quad \text{for all } y \in K$$

を満たす $x^* \in K$ が存在する。

証明 函数 $f: K \times K \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(x, y) = \max_{z \in \Gamma(x)} \langle z, x - y \rangle$$

と定義する。(ここで $\Gamma(x) \subset \mathbb{R}^l$ がコンパクトであることに留意せよ。) Berge の最大値定理により、 f は x について上半連続である。また y についての凸函数であることも次のようにして容易に知られる。実際、 $0 \leq t \leq 1$ について

$$\begin{aligned} & f(x, (1-t)y' + ty'') \\ &= \max_{z \in \Gamma(x)} \langle z, x - \{(1-t)y' + ty''\} \rangle \\ &= \max_{z \in \Gamma(x)} \{(1-t)\langle z, x - y' \rangle + t\langle z, x - y'' \rangle\} \\ &\leq (1-t) \max_{z \in \Gamma(x)} \langle z, x - y' \rangle + t \max_{z \in \Gamma(x)} \langle z, x - y'' \rangle \\ &= (1-t)f(x, y') + tf(x, y'') \quad \text{for any } x, y', y'' \in K. \end{aligned}$$

さらに $f(x, x) = 0$ (for all $x \in K$) である。ゆえに定理 A によれば、次の条件を満たす $x^* \in K$ が存在する。

$$f(x^*, y) = \max_{z \in \Gamma(x^*)} \langle z, x^* - y \rangle \geq 0 \quad \text{for all } y \in K. \quad (\text{証了})$$

しかし、この補題はさらに強化されて、同じ設定の下に

$$\langle z^*, x^* - y \rangle \geq 0 \quad \text{for all } y \in K$$

を満たす $x^* \in K$ と $z^* \in \Gamma(x^*)$ との存在が示されるのである (定理 D)。この強い結果と補題 A との gap を埋めるためには次の補題を用意すれば十分であろう。

補題 B (Browder [1]) H と H' を $\mathbb{R}^l$ の非空・コンパクト・凸集合とする。任意の $z \in H'$ に応じて $\langle z, x \rangle < 0$ となる $x \in H$ が存在するならば、

$$\langle z, x_0 \rangle < 0 \quad \text{for all } z \in H'$$

を満たす $x_0 \in H$ が存在する。

証明 背理法による。もしこの補題が正しくないとすれば、どの $x \in H$ に対しても $\langle z, x \rangle \geq 0$ となる $z \in H'$ が存在するはずである。そこで多価写像 $\Sigma: H \rightarrow H'$ を

$$\Sigma(x) = \{z \in H' \mid \langle z, x \rangle \geq 0\}$$

と定義すると、 Σ はコンパクト・凸値で優半連続である。いま各 $x \in H$ に対して集合 U_x を

$$U_x = \{z \in H' \mid \langle z, x \rangle < 0\}$$

と定義すれば、これは H' の開集合で、しかも仮定により、どの $z \in H'$ に対しても、 $\langle z, x \rangle < 0$ となる $x \in H$ が存在するのであるから、

$$H' = \bigcup_{x \in H} U_x.$$

つまり $\{U_x \mid x \in H\}$ は H' の開被覆である。 H' のコンパクト性から、 $\{U_x\}$ は有限部分開被覆 $\{U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}\}$ を有する。そこでこの部分開被覆に従属する 1 の分解を β_j ($j=1, 2, \dots, n$) としよう。さらに写像 $p: H' \rightarrow H$ を

$$p(z) = \sum_{j=1}^n \beta_j(z) x_j$$

(H の凸性から、確かに $p(z) \in H$) と定義する。ここで

$$\beta_j(z) \neq 0 \implies z \in U_{x_j} \implies \langle z, x_j \rangle < 0$$

に注意すれば、

$$\langle z, p(z) \rangle = \sum_{j=1}^n \beta_j(z) \langle z, x_j \rangle < 0 \quad \text{for all } z \in H'. \quad (2)$$

次に多価写像 $\Phi: H' \rightarrow H'$ を

$$\Phi(z) = (\Sigma \circ p)(z)$$

と定義すると、 Φ はコンパクト・凸値で優半連続である。したがって角谷の不動点定理 (定理 B) により、 Φ は不動点 $z_0 \in \Phi(z_0)$ を有する。すなわち

$$z_0 \in \Sigma(p(z_0)).$$

Σ の定義から

$$\langle z_0, p(z_0) \rangle \geq 0. \quad (22)$$

だが (22) は (21) に矛盾である。

(証了)

補題Bを(補題Aの証明中の記号で) $H=x^*-K$, $H'=\Gamma(x^*)$ として適用してみよう。

もし

$$\langle z^*, x^*-y \rangle \geq 0 \quad \text{for all } y \in K$$

を満たす $z^* \in \Gamma(x^*)$ が存在しないとすれば、補題Bにより

$$\langle z, x^*-y_0 \rangle < 0 \quad \text{for all } z \in \Gamma(x^*)$$

を満たす $y_0 \in K$ が存在しなければならぬ。だがこれは補題Aに矛盾する。こうして次の結果を得る。

定理D (Browder [1]) K を $\mathbb{R}^l$ の非空・コンパクト・凸集合, $\Gamma: K \rightarrow \mathbb{R}^l$ はコンパクト・凸値で優半連続とする。このとき

$$\langle z^*, x^*-y \rangle \geq 0 \quad \text{for all } y \in K$$

を満たす $x^* \in K$ と $z^* \in \Gamma(x^*)$ とが存在する。

定理Dは経済学の観点からも重要な含意を有するものである。ここで経済学の解釈に即して、若干記号を改める。まず K としては $\mathbb{R}^l$ における基本単体 P を用いることとし、これを価格の変域と解釈する。また多価写像 Γ は、いわゆる超過需要函数 $\zeta: P \rightarrow \mathbb{R}^l$ とみなす。もし ζ がコンパクト・凸値で優半連続ならば、定理Dにより

$$\langle p, z^* \rangle \leq \langle p^*, z^* \rangle \quad \text{for all } p \in P \quad (23)$$

を満たす $p^* \in P$ と $z^* \in \zeta(p^*)$ とが存在する。さらに ζ が Walras 法則:

$$\langle p, z \rangle \leq 0 \quad \text{for all } (p, z) \in G(\zeta)$$

($G(\zeta)$ は ζ のグラフ)

を満たすことをも仮定すれば、不等式 (23) は

$$\langle p, z^* \rangle \leq \langle p^*, z^* \rangle \leq 0 \quad \text{for all } p \in P$$

となる。この帰結こそ著名な **Gale=二階堂の補題** にほかならない。

(23) を満たす p^* と z^* の存在を証明する伝統的な方法 (たとえば Debreu [2]) は、たとえば次のように進行する。甚だ簡明で、これにも捨て難い味がある。

まず $Z = co \zeta(P)$ とおくと、これは $\mathbb{R}^l$ のコンパクト・凸集合であり、 ζ は P から Z の中への多価写像とみなすことができる。さらに新しい多価写像 $\mu: Z \rightarrow P$ を

$$\mu(z) = \{p \in P \mid \langle p, z \rangle = \max_{q \in P} \langle q, z \rangle\}$$

と定義するが、これは一種の価格調整函数と解釈することができる。容易に知られるように、 μ はコンパクト

・凸値で優半連続である。したがって

$$(\mu \times \zeta)(p, z) = \mu(z) \times \zeta(p)$$

と定義される多価写像 $\mu \times \zeta: P \times Z \rightarrow P \times Z$ もコンパクト・凸値で、しかも優半連続である。角谷の不動点定理(定理B)により、

$$(p^*, z^*) \in (\mu \times \zeta)(p^*, z^*) = \mu(z^*) \times \zeta(p^*)$$

なる (p^*, z^*) が存在する。この p^* と z^* が所望の性質を満足するのである。

補題A, Bに基づく定理Dの証明は、同一の対象を上記の伝統的証明法とは別の視角から眺めたひとつの別証にすぎない。

参 考 文 献

- [1] Browder, F.E., "The Fixed Point Theory of Multi-valued Mappings in Topological Vector Spaces", *Math. Ann.*, **177**(1968), 283-301.
- [2] Debreu, G., *Theory of Value*, (Wiley, N. Y.), 1959.
- [3] Fan, K., "A Minimax Inequalities and Applications", Shisha ed., *Inequalities*, Vol. 3 (Academic Press, N. Y.), (1972), 103-113.
- [4] Takahashi, W., "Nonlinear Variational Inequalities and Fixed Point Theorems", *J. Math. Soc. Japan*, **28**(1976), 168-181.

(経済学部助教授)