慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	占有の原理と配置相の縮小
Sub Title	Principle of occupancy and reduction of arrangement patterns
Author	高橋, 潤二郎
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1989
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.81, No.4 (1989. 1) ,p.704(164)- 714(174)
JaLC DOI	10.14991/001.19890101-0164
Abstract	
Notes	研究ノート
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19890101-0164

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

「三田学会雑誌」81巻4号（1989年1月）

研究ノート

占有の原理と配置相の縮小

高 橋 潤 二 郎

1 多様度の概念

(1—1) 前稿〔高橋 (1986)〕で，われわれは，地表の研究が配置の研究であることを指摘した上で，配置パターンの構成要素である占有を状態カテゴリーの集合Sと位置カテゴリーの集合Lからなる直積集合の要素（順序対）

$0=(s_i, l_j)\in S\times L$

と定義し，配置相をこれら占有を要素とする多重集合

$P=\{o|o\in S\times L\}\mathbf{m}$

と定義した。

さらに，このように定義される配置相の集合とその推移系列の集合を

$\langle\Omega_P, T^l\rangle$

とあらわすと共に，その形成枠組を

$\langle\Omega_P, \dot{\Omega}_P, f, g\rangle$

とあらわした。

「地表はいかなる規則にしたがっているか」という問題は，実は，このような形成枠組をもつ抽象的地表を対象にして提起されたものである。言い換えれば，われわれは，ここで具体的な地表をふくめ，前述の形成枠組のもとにつくりだされるあらゆる配置パターンについて，その生成にかかわる拘束のあり方，すなわち，$\dot{\Omega}_P$ や $\mathring{\Omega}_P$ を指定する関数のあり方について問うているのである〔高橋 (1986)〕。

本稿では，このうち，$\dot{\Omega}_P$ を規定する諸規則について述べてゆくが，理解を容易にするために，ここで，あらためて，二つの集合

$S=\{s_1, s_2\}$

$L=\{l_1, l_2\}$

を所与として導出される Ω_0 と Ω_P についてその要素を列記しておくことにしよう。

$\Omega_0=\{(s_1, l_1)(s_1, l_2)(s_2, l_1)(s_2, l_2)\}$
$=\{o_1, o_2, o_3, o_4\}$

$\Omega_P=\{\phi, \{o_1\}\{o_2\}\{o_3\}\{o_4\}\{o_1, o_1\}$
$\{o_1, o_2\}\{o_1, o_3\}\{o_1, o_4\}\{o_2, o_2\}\{o_2, o_3\}$
$\{o_2, o_4\}\{o_3, o_3\}\{o_3, o_4\}\{o_4, o_4\}\}$

高橋 (1986) で述べたように，Ω_P を構成する集合の最大個数は $|L|$ にひとしいものと仮定されている。したがって，いま，状態カテゴリーが，s_1, s_2 だけでなく，s_1, s_2, s_3 あれば Ω_0 は次のようになり，

$\Omega_0=\{(s_1, l_1)(s_1, l_2)(s_2, l_1)(s_2, l_2)$
$(s_3, l_1)(s_3, l_2)\}$
$=\{o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6\}$

Ω_P には，これら6ケの o を前提にして，次頁に示すように，個数2までの多重集合がふくまれることになろう。

すなわち，論理的に可能な占有と配置相の個数はそれぞれ $|\Omega_0|=6$, $|\Omega_P|=28$ となる。又，状態が s_1 のみであれば，$|\Omega_0|=2$, したがって $|\Omega_P|=6$ となる。

他方，状態カテゴリー s_1, s_2 に対し，位置カテゴリー l_1, l_2, l_3 があるものとすれば，

$\Omega_0=\{(s_1, l_1)(s_1, l_2)(s_1, l_3)(s_2, l_1)(s_2, l_2)$
$(s_2, l_3)\}$

Ω_P はこの Ω_0 を前提にして，個数3までの多

	0	1	2
	ϕ	$\{o_1\}$	$\{o_1, o_1\}$ $\{o_1, o_2\}$ $\{o_1, o_3\}$ $\{o_1, o_4\}$ $\{o_1, o_5\}$ $\{o_1, o_6\}$
		$\{o_2\}$	$\{o_2, o_2\}$ $\{o_2, o_3\}$ $\{o_2, o_4\}$ $\{o_2, o_5\}$ $\{o_2, o_6\}$
		$\{o_3\}$	$\{o_3, o_3\}$ $\{o_3, o_4\}$ $\{o_3, o_5\}$ $\{o_3, o_6\}$
		$\{o_4\}$	$\{o_4, o_4\}$ $\{o_4, o_5\}$ $\{o_4, o_6\}$
		$\{o_5\}$	$\{o_5, o_5\}$ $\{o_5, o_6\}$
		$\{o_6\}$	$\{o_6, o_6\}$
28	1	6	21

重集合をふくむことになり，したがって $|\Omega_P|=84$，又，位置が l_1 しかなければ $|\Omega_0|=3$，$|\Omega_P|$ も3に減少することになる。

表1は，これら $|S|$ と $|L|$ に対応する $|\Omega_0|$ と $|\Omega_P|$ すなわち，状態カテゴリーと位置カテゴリーの数に対応する論理的に可能な占有と配置相の数を示したものである。

このことからもあきらかなように，Ω_P は第一義的に集合 S と L に依存する。つまり，集合 S と L の指定は，Ω_P を導出するための最も基本的な前提と言えよう。このことを明示するために，集合 $\{s_1, s_2\}$，$\{l_1, l_2\}$ を前提にして導出された前述の15通りの配置相を，あらためて状態 s_1，s_2，位置 l_1，l_2 から導出される論理的に可能な配置相の集合と呼び，$\Omega_P(s_1, s_2|l_1, l_2)$ と表記することにしよう。（ここでは，前述のように，Ω_P を導出するに当って，そこにふくまれる多重集合の最大個数は $|L|$ と仮定されている。すなわち，位置カテゴリー $\{l_1\}$，$\{l_1, l_2\}$，$\{l_1, l_2, l_3\}$ について，それぞれ個数1，2，3までの多重集合しか考慮していない。この意味で，Ω_P は，論理的に導出可能な最小集合と呼ばれるべきであろう。）

(1—2) 表1からあきらかなように，$|\Omega_P|$ は $|\Omega_0|$ が増大するにつれて，増大する。しかも前者の増大は，後者のそれに比べ，はるかに急ピッチである。言うまでもなく，このことは，状態カテゴリーと位置カテゴリーがふえるにつれて，まもなく，われわれが途方もなくぼう大な数に及ぶ配置相を取り扱わねばならないことを意味している。こうしたぼう大な数を手ぎわよく処理するために，よく知られている方法は，

表1 位置カテゴリーと状態カテゴリー数にともなう $|\Omega_0|$ と $|\Omega_P|$

状態カテゴリー ＼ 位置カテゴリー	1	2	3	4	5
1	1 (2)	2 (6)	3 (20)	4 (70)	5 (252)
2	2 (3)	4 (15)	6 (84)	8 (495)	10 (3003)
3	3 (4)	6 (28)	9 (220)	12 (1820)	15 (15504)
4	4 (5)	8 (45)	12 (455)	16 (4845)	20 (53130)
5	5 (6)	10 (66)	15 (816)	20 (10626)	25 (142506)

対数をもちいることである。

周知のように，任意の数 $x>0$ について，その対数は，次のように定義される。

$$r^{\log_r x}=x$$

ただし，r は任意の底数である（$r>1$）。

通常の対数は10を底とするもので，$10^{\log x}=x$ で定義される。言うまでもなく，$100=10^2$，したがって $\log 100=2$，又 $0.001=10^{-3}$ したがって $\log 0.001=-3$ である。

しかしながら，前述の定義からも知られるように，対数の底は10とはかぎらない。1をのぞく任意の正数 r を底とする対数を定義することができる。そこで，ここでは，2を底とする対数，すなわち

$$2^{\log_2 x}=x$$

を採用するものとしよう。$2=2^1$，したがって $\log_2 2=1$，$4=2^2$ したがって $\log_2 4=2$ である。

対数の底として，10ではなく，2を採用するのは，それが，一方において，アシュビーの多

様度すなわち任意の集合にふくまれる異なる要素の数をあらわすとともに，他方，シャノンのエントロピーすなわち平均情報量を示す尺度であるからである。

周知のように，アシュビーは，$|A|=N$なる集合 A について，その多様度 $V(A)$ を次のように定義した〔Ashby (1956)〕。

$$V(A)=\log_2 N$$

他方，シャノンはNケの要素からなる確率ベクトル（$p_1, p_2, \cdots, p_N$）をもつ任意の確率事象系について，その平均情報量を次のように定義している〔Shannon and Weaver (1949)〕。

$$H(\boldsymbol{P})=-\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i$$

これら二つの測度の共通性は容易に示される。なぜならば，シャノンの平均情報量において，いま $p_i=\frac{1}{N}$，すなわちすべての事象の生起確率がひとしいものとするならば，

$$H(\boldsymbol{P})=-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\log_2\frac{1}{N}=\log_2 N$$

言い換えれば，アシュビーの多様度はそこにふくまれる事象の生起確率がすべてひとしい確率事象系における平均情報量のことだと言えよう。$p_i=1/N\ (i=1, 2, \cdots, N)$ の時，Hは最大となるから，任意の事象系について$V=\max H$が成立する。

$V(A)$ が情報量を測定する尺度であることを示すために，いま，次のような8ケの異なる位置からなる集合を考え，このうち，特定の位置にある事象が生起したものと考えよう。

$$L=\{l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6, l_7, l_8\}$$

ここで，われわれは，どの位置に事象が生起したかを知らず，質問によって，それを同定しなければならない。ただし，その質問に解答者は「はい」か「いいえ」でこたえるものとする。この場合，最も単純な質問の仕方は，l_1 から l_8 までのそれぞれについて，「l_1 に事象が生起したか」をたずねることであろう。だが，それはあまりに非効率である。最も効率的な質問の仕方は，まず集合Lを $\{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ と $\{l_5, l_6, l_7, l_8\}$ に二分し，事象が生起した位置は $\{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ にふくまれるかをたずねる。そして，もし，答えが「はい」であれば，さらに $\{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ を $\{l_1, l_2\}$ と $\{l_3, l_4\}$ に二分し，「$\{l_1, l_2\}$ にふくまれるか」とたずね，他方，「いいえ」であれば，$\{l_5, l_6, l_7, l_8\}$ を $\{l_5, l_6\}$ と $\{l_7, l_8\}$ に二分し，「$\{l_5, l_6\}$ にふくまれるか」と問う……ことである。このような手順をふくむことによって，$\log_2 8=3$ 回の質問によって，事象の生起した位置を同定することができるであろう。同様に4ケの位置については，$\log_2 4=2$ 回，2ケの位置については，$\log_2 2=1$ 回の質問をすれば，必要かつ十分である。

いま，質問の回答「はい」と「いいえ」をそれぞれ1と0で表記するものとしよう。この結果，8ケの位置のうち，l_6 に事象が生起したものとすれば，その回答は（0,1,1）と表記できる。同様に，4ケの位置については，l_2 に生起場合，回答は (1,0)，2ケの位置について l_1 に生起したした場合は (1)，すなわち有限ケの1，0を要素としてもつベクトルで表現できよう。情報理論では，これらベクトルにふくまれた要素数を回答にもりこまれた情報量の測度と考え，その基本単位を bit と呼ぶ。すなわち，8ケの位置については，3回の回答によって得られる情報量は3 bit である。同様に4ケの位置，2ケの位置についてはそれぞれ 2 bit，1 bit と考えるのである。

このことから，一般に，Nケの異なる要素をもつ集合Aについて，その特定の要素を指定するために必要かつ十分な質問回数，或いはこれら質問によって得られる情報量は $V(A)=\log_2 N$ ビットであたえられよう。

(1―3)　ここで，多様度という概念を導入したのは，それが拘束の度合について，一つの操作的定義をあたえるからである。事実，多様度の導入によって，われわれは，配置パターンに関する拘束について，次のように述べることができよう。

任意の配置相の集合 $\mathscr{P}_i, \mathscr{P}_j$ について，$V(\mathscr{P}_i)$

$>V(\mathscr{P}_j)$ が成立するとき，$\mathscr{P}_j$ は $\mathscr{P}_i$ に比べより拘束されている。

ただし，$V(\mathscr{P}_i)$, $V(\mathscr{P}_j)$ はそれぞれ前節で定義された集合 $\mathscr{P}_i$ と $\mathscr{P}_j$ の多様度である。

このことから知られるように，拘束は，あきらかに相対的なものである。ある配置相の集合 $\mathscr{P}_i$ がどの程度拘束されているかは，他の配置相の集合 $\mathscr{P}_i$ との比較においてのみ知ることができる。

(1—1) で述べたように，位置 l_1, l_2 を前提にして導出される論理的に可能な配置相の集合の数は $|S|=3$ のとき28通り，$|S|=2$ のとき15, $|S|=1$ のとき6とあきらかに縮小している。すなわち

$$V[\Omega_P(s_1|l_1,\ l_2)]<V[\Omega_P(s_1,\ s_2|l_1,\ l_2)]$$
$$<V[\Omega_P(s_1,\ s_2,\ s_3|l_1,\ l_2)]$$

が成立している。(同様なことが $|L|$ についてもいえる。)

言うまでもなく，このことは，集合 S と L の指定が配置パターンに関する拘束としてはたらいていることを意味している。言い換えれば，集合 S と L の指定は配置パターン生成に関する最も基本的な規則であると言えよう。

2　占有の原理

(2—1)　前節で，われわれは，論理的に導出可能な配置相の集合 Ω_P について，その多様度が $|S|$ と $|L|$ に依存すること，その意味で，集合 S と L の指定が配置パターンに関する最も基本的な生成規則であることを指摘した。だが，配置パターンに関する生成規則はこれだけに止まらない。他にも考察に値いする重要な諸規則が存在する。

たとえば，(1—1) で述べた $\Omega_P(s_1,\ s_2|l_1,\ l_2)$ にふくまれる15通りの配置相について考えてみよう。このうち，$\{(s_1,\ l_1)(s_1,\ l_1)\}$，$\{(s_1,\ l_2)(s_1,\ l_2)\}$，$\{(s_2,\ l_1)(s_2,\ l_1)\}$，$\{(s_2,\ l_2)(s_2,\ l_2)\}$，$\{(s_1,\ l_1)(s_2,\ l_1)\}$，$\{(s_1,\ l_2)(s_2,\ l_2)\}$ は，あきらかに占有の原理に違反している。言い換えれば，これらは論理的には可能だが，経験的に生成可能でない配置相だと言えよう。したがって，占有の原理が普遍的であり，l_1, l_2 がそれぞれ空間の一点だと考えれば，生成可能な配置相は次の9通りに縮小されることになる。

$$\{(\varepsilon, l_1)(\varepsilon, l_2)\}\ \{(s_1, l_1)(\varepsilon, l_2)\}\ \{(s_2, l_1)(\varepsilon, l_2)\}$$
$$\{(\varepsilon, l_1)(s_1, l_2)\}\ \{(s_1, l_1)(s_1, l_2)\}\ \{(s_2, l_1)(s_1, l_2)\}$$
$$\{(\varepsilon, l_1)(s_2, l_2)\}\ \{(s_1, l_1)(s_2, l_2)\}\ \{(s_2, l_1)(s_2, l_2)\}$$

言うまでもなく，このことは占有の原理が一つの拘束としてはたらいていること，すなわち，配置パターン生成に関する規則であることを示している。

この配置相の縮小が，集合 S，L の変化ではなく，占有間の関係に課せられた拘束によって生じたものであることに注意しよう。事実，この配置相の縮小は，特定の二つ占有 o_i と o_j が配置相の中で両立ないし共存し得ない，すなわち $(x,\ l_1)$ と $(x,\ l_1)$ 或いは $(x,\ l_2)$ と $(x,\ l_2)$ という組合せが経験的に成立し得ないことから生じているのである。とするならば，この規則は，前述の規則 (S と L の指定) とはことなったタイプに属するものと考えねばなるまい。

この点に関連し，指摘すべきは，この拘束が状態カテゴリーではなく，位置カテゴリー間の関係に課せられたものであることだろう。ここで問題となっているのは占有をかたちづくる順序対の第二成分 l_1, l_2 間の関係であって，第一成分 s_1, s_2 間の関係ではない。つまり，この拘束は，基本的には L の任意の要素 l_j が一つの配置相に1回しか用いられないことによってもたらされると考えられよう。

こうした位置カテゴリー間の関係にもとづく配置相の縮小は，当然のこと乍ら，これと同じタイプに属する拘束が特性カテゴリー間にも存在するのではあるまいかという考えへと導くであろう。実際，前掲の集合の中には，これと対応する配置相が存在する。すなわち，$\{(s_1,\ l_1)(s_1,\ l_2)\}$，$\{(s_2,\ l_1)(s_2,\ l_2)\}$ がそれである。

これら配置相は，s_1, s_2 が状態である場合には可能であるが，もし s_1 と s_2 がそれぞれ個々

の事物，事象をさしているとすれば，経験的には成立し得ない。なぜならば，同一の s_1（ないし s_2）が同時に二つのことなった位置を占めることはあり得ないからである。

われわれは，高橋（1986）で占有の原理を「一定時点において，ある事物（事象）がある地点を占拠したならば，他のいかなる事物（事象）もその地点を占拠できない」と表現した。ここで，われわれは，この言明を補足するもう一つの経験的言明を見出したことになる。それは，「一定時点において，ある事物（事象）がある地点を占拠したならば，その事物（事象）は同時に他のいかなる地点をも占拠できない」という言明である。

この第二の言明は，第一の言明がそうであるように，地表上に存在・生起するあらゆる事物・事象に例外なくあてはまる占有に関する普遍的な経験的事実を指摘したものである。この意味で，われわれは，ここで占有の原理を拡張し，これら二つの言明をともにふくむものと考えることにし，前者を占有の原理の第1公準，後者を第2公準と呼ぶことにしよう。

この第2公準の導入によって，もし，s_1，s_2 がそれぞれ1ケしかないものとすれば，$\Omega_P(s_1, s_2|l_1, l_2)$ にふくまれる可能な配置相は次の7通りに縮小することになる。

$$\{(\varepsilon, l_1)(\varepsilon, l_2)\}\ \{(s_1, l_1)(\varepsilon, l_2)\}\ \{(s_2, l_1)(\varepsilon, l_2)\}$$
$$\{(\varepsilon, l_1)(s_1, l_2)\}\ \{(s_1, l_1)(s_2, l_2)\}\ \{(s_2, l_1)(s_1, l_2)\}$$
$$\{(\varepsilon, l_1)(s_2, l_2)\}$$

と同時に，われわれは，これら二つの公準を区別することによって，状態カテゴリーを次の四類型に分類することができる。

0類　第1，第2公準をともにみたさない。

Ⅰ類　第1公準のみをみたす。

Ⅱ類　第2公準のみをみたす。

Ⅲ類　第1，第2公準をともにみたす。

この分類にしたがえば，前述の9通りの配置相はⅠ類カテゴリー，7通りの配置相はⅢ類カテゴリー，すなわち，個物，個象を取り扱うことに対応していることになろう。

（2—2）こうした占有の原理にもとづく可能な配置相の縮小に対して，「充塡の原理」はいかなる拘束をもたらすのであろうか。これに対する最も単純な解答は，この原理の導入によって，ε をふくむ占有，(ε, l_j) を要素とする配置相がすべて消去される。言い換えれば，配置相が次の二通りに縮小するというものであろう。

$$\{(s_1, l_1)(s_2, l_2)\},\ \{(s_2, l_1)(s_1, l_2)\}$$

たしかに，このように考えることは，(ε, l_j) を「l_j に何ものもおかれていない」と解釈するかぎり正当なものであろう。だが，もし「充塡の原理」が普遍的なものだとするならば，このような解釈は必ずしも適切であるとは言い難い。なぜならば，この結果，われわれは，現実の観察においてきわめて重要な「空席」の存在を無視することになる。言い換えれば，われわれの研究対象をあまりにも限定してしまい，われわれの理論的探究とその成果の応用範囲をせばめてしまうと考えられるからである。

実際，ε については，次の三つの解釈が可能であろう。

1）(ε, l_j) は，l_j にいかなる事物（事象）も存在しないこと，或いは l_j がいかなる状態もとらないことを意味する。

2）(ε, l_j) は l_j に，たとえば s_1，s_2 が存在しないことを意味する。（このことは，言うまでもなく，l_j に s_1，s_2 以外のたとえば s_3，$s_4 \cdots$ が存在することを否定するものではない。）

3）(ε, l_j) は l_j に ε が存在することを意味する。ただし ε は s_1，s_2，s_3，s_4，…とは全く性格のことなるユニークな存在だと考える。

これら三つの解釈のうち，われわれがここで採用したいのは，第三のそれ，すなわち，ε を特殊な存在ないし状態と考えることである。ε のもつ特異な性格については後述するので，ここでは詳述しないが，ただ単に，ε が地上における空気のように，きわめて遍在的かつ可動性の高い占有体をあらわしており，(ε, l_j) は l_j がこのような占有体に占拠されていること，事実上「空席」を意味する。或いは，集合論にお

ける ϕ，通常の演算における0と同じ機能を果すと言っておけば十分であろう。

この ε のもつ特性は，前述の7通りの配置相における $\{(\varepsilon, l_1)(\varepsilon, l_2)\}$ に示されるように他にはない配置相が許されていること，又後述するように，$\{(\varepsilon, l_1)(s_1, l_1)\}$ の成立がインプリシットに仮定されていることにもあらわれている。言い換えれば，ε は0類カテゴリーに属する唯一の，いわば例外的な状態カテゴリーなのである。

このような ε の解釈を前提にして，われわれは次のように述べることができよう。

充塡には (ε, l_j) をふくむ配置相をすべて排除するケースと (ε, l_j) をふくむ配置相を必ずしも排除するとはかぎらないケースがある。いま前者を強充塡，後者を弱充塡と呼んで区別するならば，いわゆる「充塡の原理」は実はこのうち後者をさす，すなわち，正確には弱充塡の原理と呼ばれるべきだと言えよう。

強充塡は配置相の縮小をもたらす意味であきらかに拘束としてはたらく。他方，弱充塡の原理は，占有の原理の例外とも言うべき ε の存在を認める意味で，むしろ拘束をゆるめる作用をしているとも言えよう。

3　組合せ論的解釈

(3—1)　前節まで，状態カテゴリー s_1, s_2, (ε)，位置カテゴリー l_1, l_2 を前提にして，配置パターンに関する最も基本的な諸規則，すなわち，Ω_P の指定規則と $\dot{\Omega}_P$ の導出規則について述べてきた。この Ω_P から $\dot{\Omega}_P$ の導出過程において，多様度という概念が重要な役割を果してきたが，ここで，われわれは，きわめて自然なかたちで，一つの数学的問題に直面することになる。すなわち，それは，$|S|$ や $|L|$ が変化したならば，Ω_P, $\dot{\Omega}_P$ の多様度はどのように変化するか，という問題である。

容易に推察されるように，この問題——所与の S と L を前提にして $|\Omega_P|$, $|\dot{\Omega}_P|$ を求める一般公式の導出——は，既存の数学の一分野である組合せ理論を応用することによって，解決される。

周知のように，組合せ理論において，n ケの異なるものから m ケとる「組合せ」と「順列」の数は，それぞれ次式で求められる。

$$C(n, m)=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$P(n, m)=\frac{n!}{(n-m)!}$$

ここで，組合せ，順列は，それぞれ順序を考慮に入れない選び方，順序を考慮に入れた選び方だとされる。たとえば，ここに3ケの異なった記号 s_1, s_2, s_3 があるものとしよう。組合せの数を求める問題とは，これら3ケの記号の中から，たとえば2ケの記号を順序を考慮しないでとりだす選び方は何通りあるかとたずねることであり，同様に，順列に関する問題とは3ケの中から2ケを順序を考慮に入れてとりだす選び方は何通りあるかとたずねることに対応している。

前掲式からあきらかなように，$C(3, 2)=3$（3ケの記号 s_1, s_2, s_3 から異なる2ケをとりだす選び方は，s_1s_2, s_1s_3, s_2s_3）$P(3, 2)=6$（3ケの記号 s_1, s_2, s_3 から異なる2ケを順序を考慮してとりだす選び方は，s_1s_2, s_2s_1, s_1s_3, s_3s_1, s_3s_2)。一般に，

$$P(n, m)>C(n, m)$$

が成立する。

この例からも知られるように，組合せにおいて，s_1s_2 と s_2s_1 は区別されない。これに対して，順列においては，s_1s_2 と s_2s_1 は異なった存在として扱われる。言い換えれば，たとえ記号が同じであっても，その位置が異なれば，異なった存在として同定されるのである。言うまでもなく，このことは，われわれが，順列においては記号を占有体として扱っていることを意味している。

実際，一番目の位置を l_1，2番目の位置を l_2 であらわせば，前述の s_1s_2 と s_2s_1 はそれぞれ

次のように表記されよう。

$s_1s_2 = \{(s_1, l_1)(s_2, l_2)\}$

$s_2s_1 = \{(s_2, l_1)(s_1, l_2)\}$

つまり，「順序を考慮して選ぶ」ということは，記号 $s_1, s_2, s_3, \cdots$ を異なる位置 $l_1, l_2, l_3, \cdots$ に置くことに他ならない。すなわち，一般に，異なる n ケのものから m ケを順序を考慮に入れてとりだす選び方とは，異なる n ケのものを異なる m ケの位置におく「置き方」と同義だといえよう。

このように，順列の問題は基本的に「置き方」すなわち配置相の数を求める問題だと考えることができる。他方，組合せの問題は，前述のように位置とは無関係であり，一見置き方の問題と結びつけることはできないように思われる。だが，果してそうであろうか。たとえば，いま，ここに2ケの異ならない記号 s_1, s_1 があり，これらを3ケの位置 l_1, l_2, l_3 に置くことを考えてみよう。われわれは，2ケの s_1, s_1 を置くために，l_1, l_2, l_3 の中からまず l_1 と l_2 を選び，次いで l_1 と l_3 さらに l_2 と l_3 を選びだし，それぞれに s_1, s_1 を位置づけるであろう。

$\boxed{s_1}\boxed{s_1}\boxed{}$　$\boxed{s_1}\boxed{}\boxed{s_1}$　$\boxed{}\boxed{s_1}\boxed{s_1}$

これら三通りの「置き方」は，われわれの表現にしたがえば，次の配置相に対応していることになる。

$\{(s_1, l_1)(s_1, l_2)(\varepsilon, l_3)\}$

$\{(s_1, l_1)(\varepsilon, l_2)(s_1, l_3)\}$

$\{(\varepsilon, l_1)(s_1, l_2)(s_1, l_3)\}$

つまり，s_1, s_1 を l_1, l_2, l_3 に置くことは，事実上，3ケの異なる位置 l_1, l_2, l_3 の中から2ケを順序を考慮せずに選びだすことに他ならない。すなわち，一般に n ケの異ならないものを m ケの位置に置く「置き方」を問うことは，m ケの異なる位置から n ケを順序を考慮に入れずにとりだす選び方，つまり組合せを問うていることだと考えられる。事実，$m=3$，$n=2$ とおくことによって，

$$C(3, 2) = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$$

を導くことができる。

(3—2)　前節で，われわれは順列・組合せがともに「置き方」を意味することを示した。言うまでもなく，このことは，組合せ理論がさまざまな置き方すなわち配置相の数を求めるにあたって，きわめて有効かつ基本的な数学的用具となることを示している。

そこで，ここでは，この立場——順列や組合せの問題を基本的に n ケのものを m ケの位置におく「置き方」を数えあげる問題だと考える——から組合せ理論の基本公式を整理しておこう〔Liu (1970)〕。

ただし，置くものは，異なる場合と異ならない場合があるが，ものの置かれる場所はつねに異なっているものと仮定しよう。組合せ理論において，「異なる」distinct という形容は，われわれが，対象をその位置と関係なく識別できることを意味している。たとえば，s_1, s_2, s_3 は3ケの異なるものである。これに対して「異ならない」とは，対象を位置以外に区別できないことを意味する。たとえば，s_1, s_1, s_1 は3ケの異ならないものである。

このような限定のもとに，「置き方」の数を求める問題は，次の二つの基本型にわけられる。

1.　n ケの異ならないものを m ケの異なる位置におく。

2.　n ケの異なるものを m ケの異なる位置におく。

これら基本型に，占有の原理に対応する，いわゆる重複の条件（「一つの位置に一つのものしかおけない」か「二つ以上のものをおける」）を区別することによって，次の4つの基本公式が導出されよう。

(I)　n ケの異ならないものを m ケの位置におく。

(1)　ただし，一つの場所に一つのものしか置けない。

$$C(m,\ n)=\frac{m!}{n!(m-n)!}$$

(2) ただし，一つの位置に二つ以上置いてよい。

$$C(m+n-1,\ n)=\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!\,n!}$$

(II) n ケの異なるものを異なる m ケの位置におく。

(1) ただし，一つの位置に一つしかおけない。

(i) $m>n$ のとき

$$P(m,\ n)=\frac{m!}{(m-n)!}$$

(ii) $n\geq m$ のとき

$$P(n,m)=\frac{n!}{(n-m)!}$$

(2) ただし，一つの位置に二つ以上のものをおいてよい。

(i) $m>n$ のとき

$${}_m\Pi_n=m^n$$

(ii) $n\geq m$ のとき

$${}_n\Pi_m=n^m$$

これら基本公式に，さらに，その変形として，次の二公式をつけ加えることができる。

K 種類に類別される n ケのもの（このうち第1の種類が n_1 ケ，第2種類が n_2 ケ，……そして第 K 種類が n_k あるものとする）を m ケの異なる位置におく「置き方」の数は

$$\frac{m!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}\cdot\frac{1}{(m-n)!}$$

であたえられる。言うまでもなく，$m=n$ のとき，$n!/n_1!\,n_2!\cdots n_k!$。

又，異なる n ケのものから重複を評して m ケとる組合せの数は

$${}_nH_m=C(n+m-1,\ m)$$

であたえられよう〔Liu (1970)〕。

(3—3) 以上，組合せ理論を「置き方」の数を求める問題だと考えた場合，基本となる諸公式を列記した。言うまでもなく，これらは，組合せ理論の提供する公式のうち，ほんのわずかのサンプルを示したにすぎない。だが，それにも拘らず，これら公式を応用することによって，われわれの議論ははるかに単純かつ明晰なものになる。

実際，前節における諸公式を応用することによって，状態カテゴリー s_1，s_2，位置カテゴリー l_1，l_2 を前提にして論理的に導出可能な配置物，すなわち，$\Omega_P(s_1,\ s_2|l_1,\ l_2)$ にふくまれる配置相の数は，

注（1） この問題は，基本的に，n ケの異なるものから i ケとり m ケの異なる位置に重複を許しておく置き方の数をかぞえる問題である。

いま，状態カテゴリーを $s_1, s_2, \cdots, s_n$，位置カテゴリーを $l_1, l_2, \cdots, l_m$ とすれば，可能な順序対は，次の $m\times n$ 通りになる。

$$\begin{array}{ccccc}(s_1,\ l_1) & \cdots & (s_1,\ l_k) & \cdots & (s_1,\ l_m)\\ \vdots & & & & \vdots\\ (s_h,\ l_1) & \cdots & (s_h,\ l_k) & \cdots & (s_h,\ l_m)\\ \vdots & & & & \vdots\\ (s_n,\ l_1) & \cdots & (s_n,\ l_k) & \cdots & (s_n,\ l_m)\end{array}$$

ここで $(s_h,\ l_k)$ は占有すなわち s_h を l_k におくことと考えられる。これら $m\times n$ ケの中から重複を許して一つもとりださないとき，すなわち，$\{(\varepsilon,\ l_1)(\varepsilon,\ l_2)\cdots(\varepsilon,\ l_m)\}$ は

$${}_{m\cdot n}H_0=C(m\cdot n-1,\ 0)=1$$

重複を許して1ケだけとりだすときは，

$${}_{m\cdot n}H_1=C(m\cdot n,\ 1)=m\cdot n$$

一般に i ケとりだすとき，

$${}_{m\cdot n}H_i=C(m\cdot n+i-1,\ i)=\frac{(m\cdot n+i-1)!}{i!(m\cdot n-1)!}$$

i は0から n までとり得るから，

$$\sum_{i=0}^{n}{}_{m\cdot n}H_i$$

となる。

$$\frac{(2\times2+0-1)!}{0!(2\times2-0)!}+\frac{(2\times2+1-1)!}{1!(2\times2-1)!}$$

$$+\frac{(2\times2+2-1)!}{2!(2\times2-1)!}=1+4+10=15$$

すなわち，一般に次式で求められよう。[1]

$$\sum_{i=0}^{n} {}_{m\cdot n}H_i=\sum_{i=0}^{n}\frac{(m\cdot n+i-1)!}{i!(m\cdot n-1)!}$$

又，(2—1) で述べた $\Omega_P(s_1,\ s_2|l_1,\ l_2)$ に占有の原理の第１公準を導入することによって得られる９通りの配置相は次のように求められる。

$$2^0\frac{2!}{0!(2-0)!}+2^1\frac{2!}{1!(2-1)!}+2^2\frac{2!}{2!(2-2)!}$$

$$=1+4+4=9$$

すなわち，一般に n ケの異なる状態カテゴリーと m ケの位置カテゴリーがあるものとすれば占有の原理の第１公準をみたす配置相の数は次式で求められる。[2]

$$\sum_{i=0}^{m} n^i\cdot C(m,i)=\sum_{i=0}^{m} n^i\frac{m!}{i!(m-i)!}=(1+n)^m$$

同様に，占有の原理の第１・２公準をみたす７通りの配置相については，

$$\frac{2!}{0!(2-0)!}\cdot\frac{2!}{(2-0)!}+\frac{2!}{1!(2-1)!}\cdot$$

$$\frac{2!}{(2-1)!}+\frac{2!}{2!(2-0)!}\cdot\frac{2!}{(2-2)!}$$

$$=1+4+2=7$$

一般に，次式であたえられる。[3]

(i)　$m>n$ のとき

注（2）　この問題は，n ケの異なったものから i ケを順序を考慮し，かつ重複を許してとりだし，これを m ケの異なる位置から選ばれた i ケの位置におくこと（ただし，一つのものを一つの場所にしかおけない）と考えられる。

異なる n ケのものから i ケ（$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots m$）を順序を考慮し，重複を許してとりだす選び方は ${}_n\Pi_i=n^i$ 又，m ケの異なる位置から i ケの位置をとりだす選び方は $C(m,\ i)$，したがって，n ケの状態カテゴリーから i ケを順序を考慮してとり，これを m ケの位置から選ばれた i ケの位置におく置き方の数（ただし一つの位置に一つしかおけない）は，

$n^i\cdot C(n,\ i)$

i は０から m までとり得るから

$$\sum_{i=0}^{m} n^i\cdot C(n,\ i)$$

二項定理によって

$=(n+1)^m$

（3）　この問題は，n ケの異なるものから i ケとり，これを重複を許さず，m ケの異なる位置に置くことだと考えられる。

ｉ）　$m>n$ の場合

異なる n ケのものから i ケ（$i=0,\ 1,\ 2,\cdots n$）をとりだす選び方は $C(n,\ i)$，他方，異なる i ケのものを m ケの異なる位置におく置き方は $P(m,\ i)$，したがって，n ケの状態カテゴリーから i ケとり，これを m ケの異なる位置におく置き方（ただし，一つの位置に一つしかおけない）は，

$C(n,\ i)\cdot P(m,\ i)$

i は０から n までとり得るから

$$\sum_{i=0}^{n} C(n,\ i)\cdot P(m,\ i)$$

ii）　$n\geq m$ の場合

ｉ）と同様に，

$C(n,\ i)\cdot P(m,\ i)$

ただし，i は０から m までしかとり得ないから，

$$\sum_{i=0}^{m} C(n,\ i)\cdot P(m,\ i)$$

或いは，ｉ）と逆に，m ケの位置から i ケとって，これを n ケの状態に対応づけると考えることによって，

$$\sum_{i=0}^{m} C(m,\ i)\cdot P(n,\ i)$$

$$\sum_{i=0}^{n} C(n,\ i)\cdot P(m,\ i)$$

$$=\sum_{i=0}^{n} \frac{n}{i!(n-i)!}\cdot\frac{m!}{(m-i)!}$$

(ii)　$n \geq m$のとき

$$\sum_{i=0}^{m} C(n,\ i)\cdot P(m,\ i)$$

$$=\sum_{i=0}^{m} \frac{n!}{i!(n-i)!}\cdot\frac{m!}{(m-i)!}$$

4　パターン指定関数

(4—1)　前節まで，われわれは，$s=\{s_1,\ s_2\}$，$L=\{l_1, l_2\}$ から導出された15通りの配置相が占有の原理を導入することによって，9通り（ないし7通り）の配置相へと縮小することを指摘した。又，組合せ理論が，基本的には，「置き方」の数をかぞえあげる問題を取扱っているという認識のもとに，これら配置相の縮小にともなう配置相の集合にみられる多様度の減少が組合せ理論の諸公式をもちいて，測定できることを示した。そして，この認識にもとづいて，抽象的地表の生成システムにおいて基本的な役割を果す二つの配置相の集合，Ω_P と $\dot{\Omega}_P$ の多様度がそれぞれ組合せ論的に定義できることを示した。

これら二つの集合 Ω_P, $\dot{\Omega}_P$ のうち，特に，後者は，配置相の生成を考察する上で，きわめて重要な意味をもつ。と言うのは，もし，占有の原理が普遍的であるとするならば，現実に，われわれの生成ないし指定できる配置相はすべて，この $\dot{\Omega}_P$ にふくまれると考えられるからである。

これら二つの配置相の集合 Ω_P と $\dot{\Omega}_P$ との基本的相違は，前述したように，後者が占有の原理にしたがっていることに求められる。Ω_P にふくまれる配置相には，ε 以外にも $(x,\ l_j)$ と $(x,\ l_j)$ とが同一の配置相の中に共存し得る。つまり同一の位置 l_j に二つ以上の状態カテゴリーが対応することが許されるが，$\dot{\Omega}_P$ には，このような共存は許されず，それぞれの位置 l_j に一つの状態カテゴリー s_i が対応している。言い換えれば，$\dot{\Omega}_P$ において，各配置相は，次のような関数をあたえることによって完全に指定されることになろう。

$$f: L \to S^*$$

ただし $L=\{l_1, l_2, \cdots, l_m\}$　$S^*=\{\varepsilon, s_1, s_2, \cdots, s_n\}$

この関数によって，各 $l_j \in L$, $j=1,\ 2, \cdots,\ m$ にただ一つの（ただし，異なるとはかぎらない）$s_i \in S^*$　$i=0,\ 1,\ 2, \cdots,\ n$ が対応づけられることになる。つまり，この関数によって指定される配置相はすべて占有の原理の第1公準をみたしていることになろう。この意味で，$f: L \to S^*$ を $\dot{\Omega}_P$ 指定関数と呼ぶことにしよう。

通常の関数の定義にしたがって，$\dot{\Omega}_P$ 指定関数は，いわゆる1対多の対応を否定するが，多対1の対応関係を許容している。つまり，二つの異なった位置がひとしい状態をとることを否定するものではない。占有の原理の第2公準は，ε 以外のすべての状態 s_i について，この1対多の対応関係を否定する。つまり，$f: L \to S^*$ を前提にして，ε 以外について，1対1の対応関係を要請すると理解できよう。

言うまでもなく，所与の S^* とLを前提にして，われわれは，特定の $f: L \to S^*$ を指定することによって，ただ一つの配置相を指定することができる。いま，S^* とLを所与として L からS^*への異なったfの集合を$(S^*)^L$ であらわすものとしよう。

すなわち，

$$(S^*)^L=\{f | f: L \to S^*\}$$

もし，LとS^*がともに有限集合であるならば，各 $l_j \in L$ に対応する可能な像の数は $|S^*|$ である。したがって，異なった $\dot{\Omega}_P$ 指定関数 $f: L \to S^*$の数は $|S^*|^{|L|}$ となる。すなわち，次式が成立することになろう。

$$|(S^*)^L| = |S^*|^{|L|}$$

たとえば，$L=\{l_1,\ l_2\}$　$S^*=\{\varepsilon,\ s_1,\ s_2\}$ について

$$3^2=9$$

すなわち，9通りの異なった配置相を指定する異なった $\dot{\Omega}_P$ 指定関数があり得ることになる。言うまでもなく，これは，(3—3) で求めた置

き方の数に対応している。つまり，置き方の数　　とと同義なのである。
を求めることは，$\dot{\Omega}_P$ 指定関数の 数を 求めるこ

文献リスト

〔1〕 Ashby, W. R. An Introduction to Cybernetics, Chapman & Hall, 1956.

〔2〕 Liu, C. L. Introduction to Combinatorial Mathematics, McGraw-Hill, 1970.

〔3〕 Shannon, C. E. and Weaver, W. The Mathematical Theory of Communication, University of Illinois Press, 1949.

〔4〕 高橋潤二郎「抽象的地表とその形成システム」『三田学会雑誌』78巻，6号，1986，pp. 37 (685)-58 (706).

（経済学部教授）