Title	次善最適点における経済厚生の変化の評価について
Sub Title	On the measurement of welfare changes at second best optima
Author	川又, 邦雄
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1988
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.81, No.2 (1988. 7) ,p.172(28)- 186(42)
JaLC DOI	10.14991/001.19880701-0028
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19880701-0028

「三田学会雑誌」81巻2号（1988年7月）

次善最適点における経済厚生の変化の評価について*

川　又　邦　雄

1　序

古典的経済環境におけるパレート最適性は，すべての経済主体の間の限界代替率均等の条件によって特色づけられる。この資源配分の最適条件は，租税や補助金が課されたり，独占が存在するときには満たされなくなり，その場合の経済的厚生の非効率性の程度を評価する方法が，一般均衡分析の枠組の中でもいくつかが考えられてきた。

一つの代表的方法は，Allais (1973) ならびに Debreu (1951) によるもので，非効率的な状態における経済厚生の損失を，それが除去されるならば不要になるであろう諸財の賦存量の全賦存量に対する割合（各財を同一比率で減少させるものとして）で測定される。その他消費者余剰による評価や社会的厚生関数の2次の導関数を均衡値の近傍で評価するなどの経済厚生の損失の測定方法があり，それらの間の関係について興味深い結果が Diewert (1981) において提示されている。

本稿の主な目的は，一般にはパレート最適でない状態において非効率性を生む外的条件が変化するとき，経済厚生（の損失）がどのように変化するかを，その変化を相殺するに必要な価値尺度財の量で評価することにある。その場合，当初の状態が与えられた制約の下での最適，すなわち次善の最適，を達成しているという想定がおかれている。そうでない場合には厚生の変化は一般にはきわめて複雑な表現をとらざるをえず，それを回避して簡単化のための公式を求める方策として，従来の文献では，パレート最適点で変数の値を評価して厚生の損失を評価することが行われてきたのである。

次善点で経済的厚生の変化を評価するという手続きは，今まで比較的経済学者の関心をあつめることは少なかった。たとえば Diewert (1981) は経済厚生の損失は諸財の間の代替性が増すと増大するということを予想しているが，一般的な形でそれを導出できずに終っている。その主要な原因は，与えられた状態についての情報を充分に利用していない（たとえばその状態は次善の意味での最適点でなくてもよい）ことにあるように思われる。

* 本稿の作成にあたって大山道廣経済学部教授から有益なコメントをうけた。また財団法人清明会の援助をうけた。ここに謝意を表したい。

本稿で求める厚生の損失の変化の公式では，それが諸財の間の代替・補完関係にどのように依存するかが明確になっている。その場合厚生の損失の変化の大きさとその単位（次元）は，与えられた制約条件の性質によって異なってくることは当然予想される。後に示すように，Lipsey-Lancaster（1956—57）の定式化のように，一つの産業に除去し難い歪みがある場合には，その制約の緩和がもたらす厚生の変化は，価格の歪みの価値額（租税収入に相当するもの）と需要と供給の弾力性によって表現される。また Ramsey (1927) の定式化のように租税収入の額に制約が課されている場合には，その変化がもたらす厚生の変化は，需要と供給の弾力性のみに依存する無名数によって表現されることが判明する。そしてこれらの分析結果は，余剰の概念を用いての Marshall 流の部分均衡分析の結論の自然な一般化となっていることが知られる。ただし，そこでは余剰分析に必要な価値尺度財の限界効用や限界費用が一定であるとの仮定がおかれていないことを，とくに強調しておきたい。

なお以上の分析を通じて，Antonelli (1860) Hicks-Allen (1934) の変換が重要な役割りを演ずる。それによって，従来異なった問題として扱われてきた，Lipsey-Lancaster (1956—57) 型の問題と Ramsey (1927) 型の問題とが形式的にはきわめて密接に関連していることが明らかになるであろう。

2　部分均衡分析

一般的な枠組の中で，歪みをもたらす制約条件の変化が経済厚生に及ぼす効果を分析する前に，部分均衡分析の枠組の中で同様の分析を行うことによって，問題の内容を明らかにすることにしよう。本節の分析は消費者余剰の概念に依存しているが，以下の諸節の分析はそれとは独立であり，しかも結果はその一般化となっていることを強調しておこう。

さて標準的な1生産物市場における部分均衡の分析の枠組を想定して，生産量を x，その需要価格を $p=p(x)$，供給価格を $q=q(x)$ とおこう。それらは $p'(x)<0$，$q'(x)>0$ を満たし，2つの関数は産出量と価格の平面上の点 E で交点をもつとしよう。その点の座標を $(x(0), p(x(0)))$ とおけばそれが競争均衡を定めることになる。

さて以下ではある実数・パラメター α（それはたとえば税率や税収あるいは独占度等を示すと理解されたい）に依存して均衡の産出量 $x^*(\alpha)$ が定まり，そのときの経済的損失が総余剰の和として

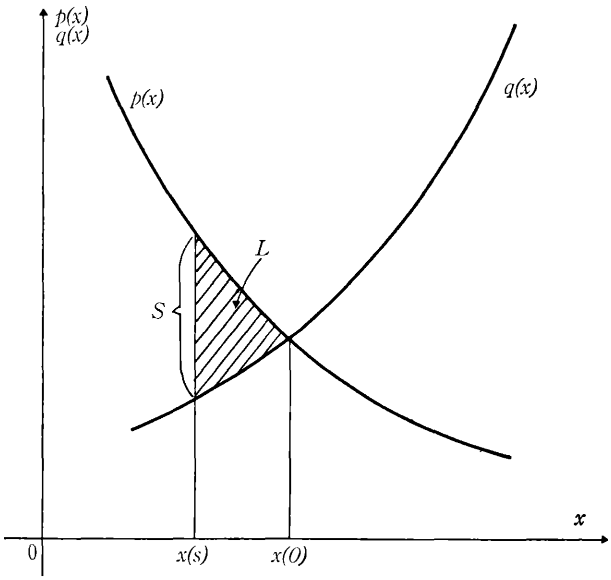
$$(1)^* \quad L(x^*(\alpha))=\int_{x^*(\alpha)}^{x(0)}(p(x)-q(x))dx$$

のように求められるとしよう。ここで $x(0)$ は競争均衡における産出量であって $x^*=x^*(\alpha)$ は以下の3つのいずれの場合にも $x(0)$ より小さいと想定する。

さて α が変化したときの $L(x^*(\alpha))$ の変化は(1)′式を微分することによって

$$(2)^* \quad dL(x^*(\alpha))/d\alpha=-(p(x^*)-q(x^*))dx^*/d\alpha$$

と計算される。以下この大きさを3つの場合について計算してみよう。



第1図

(i) いま上のパラメターαに相当するものが従量税率sであるとして，$0<s<p(0)-q(0)$を満たすように外生的に与えられるとする。そのとき $x=x(s)$ をその下での産出量水準であるとすれば，それは

$$p(x)-q(x)=s$$

の解として求められる。このsが変化すると産出量$x=x(s)$は$x'=1/(p'(x)-q'(x))$のように変化するから，これを(2)*に代入することによって，$L(x(s))$の変化の大きさが

(3)* $dL/ds=-s/(p'(x(s))-q'(x(s)))$

と計算される。この場合についての計算は，たとえば Atkinson=Stiglitz〔1980 pp. 367-369〕に与えられている。このケースでは(3)*の右辺の損失の変化は産出量xと同じ次元を持つことになる。

(ii) つぎにパラメターαにあたるものが従価税率tであるとして，それが $0<t<(p(0)-q(0))/q(0)$ を満たすように与えられるとしよう。その下で決定される産出量 $x=x(t)$ は

$$t=(p(x)-q(x))/q(x)$$

の解として求められる。したがってtが変化するとき，$x=x(t)$は$x'=q/(p'-(1+t)q')$のように変化する。これを(2)式に代入することによって，tの変化のもたらす経済的損失の変化は

(4)* $$\frac{dL}{dt}=\frac{(p-q)q}{(1+t)q'-p'}$$
$$=\frac{(p-q)x}{(1+t)(1/\epsilon+1/\eta)}$$

のように計算される。ここで $1/\epsilon$ および $1/\eta$ はそれぞれ逆需要関数および逆供給関数の弾力性（つまりϵは需要の弾力性，ηは供給の弾力性）を意味するものとする。このように経済的損失の変化は

税収を $(1+t)$ で除した値（実質税収）に比例し，逆需要関数を逆供給関数の弾力性の和に反比例することが知られる。この場合の経済的損失は生産物の価値額で測られている。

(iii) 政府が消費税によって一定額 $R>0$ だけの税収を確保しなければならない場合を想定しよう。この制約式の意味は

$$(p(x)-q(x))x=R$$

を満たすように $x=x(R)$ が選ばれるということである。いうまでもなく，この R は上式の左辺の税収関数 (Laffer function) の最大値より小さいように与えられなければならない。さらに税収関数が x について単調でない場合がありうるので，一つの R について上の条件を満たす $x(R)$ は多数存在する可能性がある。しかし以下では，そのような $x(R)$ のうち競争均衡の配分 $x(0)$ にもっとも近い配分のみを問題にする(1)（その場合には R の増加は $x(R)$ を減少させる)。

さて上の制約式を微分すれば $x'(R)=1/[(p-q)+(p'-q')x]$ となる。したがって厚生の損失 $L(x(R))$ を R について微分すれば

$$(5)^* \quad \frac{dL}{dR}=\frac{-(p-q)}{(p-q)+(p'-q')x}=\frac{t}{1/\epsilon(1+t)+1/\eta-t}$$

となる。このように R の変化がもたらす厚生の変化は無名数であって，逆需要関数と逆供給関数の弾力性と税率によって表現されることがわかる。

以下の節では，一般均衡モデルの枠組の中で三つの次善問題を考え，次善最適点での経済厚生（あるいはその損失）が制約条件の変化によってどう変化するかを評価する。その場合の経済厚生の変化の大きさは，制約条件を規定する実数のパラメター α の変化を相殺するに必要な初期の価値尺度財の量によって測定される。その意味でここでの厚生の損失の尺度は基本的には Allais (1973) と Debreu (1951) の考え方の延長線上にあるものといえよう。ただしここでは，初期状態における各財の構成化には特別の重きをおくことなく，次善解に対応する諸財の交換比率（消費および生産の限界代替率）が重要視されることになる。その場合本節の消費者余剰を用いての経済的厚生の変化の公式がそのまま一般的な枠組の中で妥当することは興味深い点である。

3 基本的仮定

$x=(x_1, x_2, \cdots\cdots x_n)$ を経済全体の純生産量を示すベクトル，$\omega=(\omega_1, \omega_2\cdots\cdots, \omega_n)$ をそれらの財の

注 (1) このことを別の仕方で述べるにはつぎのようにしてもよい。すなわち税収関数の極大値のうちもっとも $x(0)$ に近い点で達成されるものを考え，その産出量を $x(R)$，税収を $\underline{R}$ とする。そのとき制約式の R を $0<R<\underline{R}$ の範囲に与えればよい。

初期の存在量を示すベクトルとする。その場合，経済全体の消費ベクトルは $x+\omega$ で示されることになる。

以下では説明の便宜上，代表的な生産者と代表的な消費者が1人ずつ存在する場合を想定する。そして消費者の効用関数が

(1) $z=f(x+\omega)$

企業の生産技術が

(2) $g(x)=0$

によって表現されるものとする。以下での問題の定式化にあたっては，二つの部門があって部門内では価格の歪み（均衡における主体間の限界代替率の不均等）がないという仮定が重要である。そうであるならば，多数の経済主体が存在する場合に結論を解釈し直すことは可能である。

さて f および g は定義域の内点で3次までの連続な偏微分を持ち， $f_i=\partial f/\partial x_i$, $f_{ij}=\partial^2 f/\partial x_j\partial x_i$ 等と記すことにすれば，

(3) $f_i\geq 0$, $g_i\leq 0$ $(i=1,2,\cdots\cdots n)$

を満たすものとする。とくに $i=n$ については厳密な不等号が成立するものとする。また f は強い擬凹関数， g は強い擬凸関数であって，縁つきヘッセ行列式は正または負の確定値をもつとしよう。

さて消費者の財 i の財 n（以下それを価値尺度財とする）に対する限界代替率を $P^i(x)$ とおけば

(4a) $P^i(x)=f_i(x)/f_n(x)$ $(i=1,2,\cdots\cdots n-1)$

となる。$P^i(x)$ のことを需要価格関数とよぶこともある。生産者にとっても財 i の財 n に対する限界代替率（供給価格）を

(4b) $Q^i(x)=g_i(x)/g_n(x)$ $(i=1,2,\cdots\cdots n-1)$

で定義することにしよう。

さて i,j を2つの異なる財（の添字）とし， n をそれらと異なる価値尺度財（の添字）とする。Hicks-Allen（1934）の定義によれば，財 j が増加し，それにともなって価値尺度財 n が消費者の効用水準を一定に保つように調整されるとき，需要価格 $P^i(x)$ が低下するなら，財 i と財 j とは（価値尺度財を財 n として）代替財であるといい， $P^i(x)$ を高める場合には補完財であるという。この概念は次善理論の文献においてもしばしば用いられてきた（たとえば Lloyd（1974）, Dixit（1975）など)。そして上の定義によって計算すれば，財 i と財 j とが代替財であるのは（$P_j{}^i(x)$ を $P^i(x)$ の x_j についての偏導関数であるとして）

(5) $a_{ij}(x)\equiv P_j{}^i(x)-P^j(x)P_n{}^i(x)$

が負である場合であり，補完財であるのは，それが正の場合であることも知られている。以下では a_{ij} をその i,j 要素とする行列 $A=(a_{ij})$ $(i,j=1,2,\cdots\cdots n-1)$ が負の定符号を持つことが仮定される。一般に A は Slutzky-Hicks の最初の $n-1$ 財の代替項を要素に持つ行列の逆行列であることが示される（これら n についてはくわしくは Samuelson（1950）あるいは Katzner（1970 第3章）を参照されたい)。Slutzky 行列が対称で負の定符号を持つ場合には，上の A についての性質はそれから直

接導かれることになる。

生産者についても同様に

(6) $b_{ij}(x)=Q_j^i(x)-Q^j(x)Q_n^i(x)$

と定義するとき，財 i と財 j は（価値尺度財を n として）b_{ij} が正であれば Hicks-Allen の意味で代替財，b_{ij} が負であれば補完財であるということにする。以下では Antonelli 行列 $B=(b_{ij})$ $(i,j=1,2,\cdots\cdots,n-1)$ が正の定符号を持つと仮定する。

4 従価税率と経済厚生の損失

以下に定式化する問題は，Lipsey-Lancarter (1956—57) によって与えられたものである。$t_1\neq 0$ を財1の市場における歪み（財1と財 n の間の消費と生産の限界代替率の乖離）を比率の形で示した大きさとし，議論を明確にするために $t_1>0$ の場合を考察する。定議によって t_1 は

(7) $P^1(x+\omega)=(1+t_1)Q^1(x)$

を満たすことになる。t_i は除去困難な税率，あるいは独占的価格形成にともなうマークアップ率等を示すと解釈される。

さて前節の諸仮定の下で，生産技術の条件(2)と財1の市場における市場の歪みを所与として，消費者の効用(1)を最大にするような x とその時の他の産業の市場の歪み，すなわち

(8) $P^i(x+\omega)=(1+t_i)Q^i(x) \qquad (i\in I)$

となる t_i を求めることが Lipsey-Lancaster の問題である。ここで I は添字の集合 $\{2,3,\cdots n-1\}$ である。形式的には $i=1$ および $i=n$ の場合にも上式は成立するが，I に属する添字についての t_i が未知数であることを強調しておく。

さて上の問題に対応するラグランジュ形式を，α,β をラグランジュ乗数として

(9) $z=f(x+\omega)-\alpha g(x)-\beta(p^1(x+\omega)-(1+t_1)Q^1(x))$

とおき，内点解の存在を仮定すれば，x についての最大化の一階の条件として

(10) $z_\gamma=f_\gamma(x+\omega)-\alpha g_\gamma(x)-\beta(P^1{}_\gamma(x+\omega)-(1+t_1)Q^1{}_\gamma(x))=0 \qquad (\gamma=1,2,3,\cdots n)$

が求められる。(4)を用いるとこの式は

(11) $\begin{pmatrix} Q^\gamma & P^1{}_\gamma-(1+t_1)Q^1{}_\gamma \\ 1 & P^1{}_n-(1+t_1)Q^1{}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha g_n \\ \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P_\gamma \\ 1 \end{pmatrix}f_n \qquad (\gamma=1,2,\cdots\cdots n-1)$

のように書ける。ここで上式の左辺の2行2列の行列の行列式を $\Delta(\gamma)$ $(\gamma=1,2,\cdots n-1)$ とおけば

$$\Delta(\gamma)=\begin{vmatrix} Q^\gamma & P^1{}_\gamma \\ 1 & P^1{}_n \end{vmatrix}-(1+t_1)\begin{vmatrix} Q^\gamma & Q^1{}_\gamma \\ 1 & Q^1{}_n \end{vmatrix}$$

となるから，とくに $\Delta(1)$ は

(12a) $\Delta(1)=(1+t_1)b_{11}-a_{11}-t_1Q^1P^1{}_n$

あるいは

(12b) $\Delta(1)=(1+t_1)b_{11}-(a_{11}+t_1P^1{}_1)/(1+t_1)$

と書くことができる。

注意1

(i) 定義より $P^1{}_1=(f_nf_{11}-f_1f_{n1})/(f_n)^2$, $P^1{}_n=(f_nf_{1n}-f_1f_{nn})/(f_n)^2$ と計算されるから，経済に財1と財 n の2財しか存在しない場合 $P^1{}_1<0$ は財 n が普通財であること，そして $P^1{}_n>0$ は財1が普通財であることを意味する（Hicks (1946) pp. 27—28)。財が3つ以上存在する場合にも，1と n 以外の財に対する需要重が一定に保たれるならば，上の結論は成り立つ。以下では $P^1{}_1<0$ であることを財 n が財1に対して普通財であるといい，$P^1{}_n>0$ であることを財1は財 n に対して普通財であるという。

(ii) a_{11} は

$$\alpha_{11}=-\begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_n \\ f_1 & f_{11} & f_{1n} \\ f_n & f_{n1} & f_{nn} \end{vmatrix} /(f_n)^3$$

と計算されるから，仮定によってこれは負になる。したがって $P^1{}_1<0$，あるいは $P^1{}_n>0$ のいずれか一方は必ず成り立つ。同様にして仮定から $b_{11}>0$ であって，それを用いると $Q^1{}_1>0$ あるいは $Q^1{}_n<0$ の少なくとも一方が成立することが知られる。

(iii) (12b) と上の注意(i)によって $P^1{}_1<0$（財 n が財1に対して普通財）である場合には $\Delta(1)>0$ となることがわかる。

(iv) 以下の議論の本筋をたどるためには必要ないが，上の Lipsey-Lancaster の問題の解として求められる $t_i(i\in I)$ は，

(13) $$\frac{t_i}{t_1}=\frac{a_{1i}-(1+t_1)b_{1i}}{a_{11}-(1+t_1)b_{11}}\ \frac{Q^1}{Q^i}$$

を満たすことが知られている（川又 (1977) の(14)式)。したがって $t_1>0$ が与えられた場合には，$i(i\in I)$ が1に対して（n を価値尺度財として）Hicks-Allen の意味で代替財であるならば，t_i は $t_1>t_i>0$ を満たすように定まることになる。この(13)を用いると，

$$\Delta(\gamma)=\frac{a_{1\gamma}-(1+t_1)b_{1\gamma}}{a_{11}-(1+t_1)b_{11}}\Delta(1),\qquad \gamma\in I$$

となることが知られる。

さて n が1に対して正常財である場合（$P^1{}_1<0$ の場合）には $\Delta(1)$ は正であって⑾より

$$(15)\quad \beta=\frac{-t_1 Q' f_n}{\Delta(1)}$$

となることがわかる。以上の準備の後，制約条件(2)，(7)の下で，初期の財 i の賦存量 ω_i と税率 t_1 の変化が消費者の効用の（次善的）最適値にどのような効果をもたらすかを計算してみよう。そのために(2)(4)(7)⑽で定まる x は，陰関数定理によって ω と t_1 についての連続微分可能な関数として表現されることに注意しておこう。

さて(9)式を ω_i について微分して⑽を用いると，

$$(16)\quad \frac{\partial z}{\partial \omega_i}=\sum z_r\frac{\partial x_r}{\partial \omega_i}+f_i-\beta P^1{}_i$$
$$=f_i-\beta P^1{}_i$$

が導かれる。ここで $\beta<0$ であるから，ω_i の社会的限界効用ともいうべき，制約条件の下での最適化関数の変化 $\partial z/\partial\omega_i$ は $P^1{}_i$ が正である場合には私的限界効用 $f_i=\partial f/\partial\omega_i$ より大きい。したがって注意1(i) によって次の命題が成立する。

命題1 財 n が財1に対して普通財であるならば，$\partial z/\partial\omega_1<f_1$，かつ $\partial z/\partial\omega_n>f_n$ である。

さて⑿⒂⒃より

$$(17)\quad \frac{\partial z}{\partial \omega_n}=\frac{a_{11}-(1+t_1)b_{11}}{-\Delta(1)}\,f_n$$

となり，$\partial z/\partial\omega_i$ についての同様の関係は⒀を用いることによって計算される。つぎに制約条件の税率 t_1 が変化したときの経済厚生の変化を計算すると，
⑽，⒂より

$$(18)\quad \frac{\partial z}{\partial t_i}=\sum z_r\frac{\partial x_r}{\partial_{t1}}+\beta Q^1$$
$$=\beta Q^1$$
$$=-\frac{(P^1-Q^1)Q^1 f_n}{\Delta(1)}$$

となる。ここで財 i の逆需要関数の弾力性および逆供給関数の弾力性を

$$(19)\quad \epsilon_i^{-}=-a_{ii}x_i/P^i$$

$$(20)\quad \eta_i^{-}=b_{ii}x_i/Q^i$$

によって定義しよう。かくして制約条件として与えられた税率 $t_1>0$ が微小量変化した時の経済的厚生の変化を，それを相殺するに必要とする ω_n の量と比較することによって次の命題を確立することができる。(2)

命題2 財nが財1に対して普通財である（$P^1{}_1<0$）として，従価税率 $t_1>0$ が与えられたとしよう。そのとき t_1 の微小量の増加がもたらす社会的厚生の減少を相殺するに必要な財nの賦存量 ω_n の変化量は $(P^1-Q^1)x_1/(1+t_1)(\eta_1{}^-+\epsilon_1{}^-)$ で与えられる。

証明。(17)(18)より

$$(21)\quad \left.\frac{\partial\omega_n}{\partial t_1}\right|_{z:\,\mathrm{const}}=-\frac{\partial z}{\partial t_1}\Big/\frac{\partial z}{\partial\omega_n}=\frac{-(P^1-Q^1)Q^1}{a_{11}-(1+t_1)b_{11}}=\frac{(P^1-Q^1)x_1}{(1+t_1)(\epsilon_1{}^-+\eta_1{}^-)}$$

となることによる。

5 従量税率の変化と経済厚生の損失

本節では Lipsay-Lancaster の問題において比率の形で与えられた歪みの条件が，限界代替率の差の形で与えられた場合について考察する。すなわち条件(7)に代って

$$(22)\quad P^1(x+\omega)-Q^1(x)=s_1$$

を制約とする問題を考慮する。

今の場合のラグランジュ形式は，(9)に代って

$$(9)'\quad z=f(x+\omega)-\alpha g(x)-\beta(P^1(x+\omega)-Q^1(x)-s_1)$$

となり，最適化の一階の条件は

$$(10)'\quad z_r=f_r(x+\omega)-\alpha g(x)-\beta(P^1(x+\omega)-Q^1{}_r(x))=0 \qquad (\gamma=2,3,\cdots n)$$

と書かれる。

したがって(11)式で $t_1=0$ とおいた関係が成立することになる。ここで $\Delta(\gamma)$ $(\gamma=1,2,\cdots n-1)$ を

$$\Delta(\gamma)=\begin{vmatrix} Q^r & P^1{}_\gamma-Q^1{}_\gamma \\ 1 & P^1{}_n-Q^1{}_n \end{vmatrix}$$

と定義すると，これは前節の $\Delta(\gamma)$ で $t_1=0$ とおいたものに相当する。したがって

$$(23)\quad \Delta(\gamma)=b_{1\gamma}-a_{1\gamma}-s_\gamma P^1{}_n$$

となる。ここで s_γ は，最適点で評価したxについて

$$(24)\quad s_\gamma=P^\gamma(x+\omega)-Q^\gamma(x)\ (\gamma=1,2,\cdots n-1)$$

であると定義されるものとする。したがってとくに

$$(25a)\quad \Delta(1)=b_{11}-a_{11}-s_1P^1{}_n$$

である。また同じ関係は

$$(25b)\quad \Delta(1)=b_{11}-(Q^1a_{11}+s_1P^1{}_1)/P^1$$

注（2） 次の結果は2節の(4)式の自然な一般化になっている。

とも表現されることが知られる。

注意 2

(i) (25b) より財 n が財 1 に対して普通財である場合には $\Delta(1)$ は正である。

(ii) 以下の議論の本筋には関係しないが，本節の問題の最適解は，

$$(26)\quad s_i=(a_{1i}-b_{1i})s_1/(a_{11}-b_{11})$$

で与えられることが知られる（川又（1977，18式））。したがってそれを用いると

$$(27)\quad \Delta(\gamma)=\frac{(a_{1\gamma}-b_{1\gamma})s_1}{a_{11}-b_{11}}\Delta(1)$$

となることがわかる。

さて財 n が財 1 に対して普通財であるとすれば $\Delta(1)$ は正であるから，(11)式で $t_1=0$ とおくことによって

$$(28)\quad \beta=\frac{-s_1 f_n}{\Delta(1)}$$

と書くことができできる。

したがって ω_i の変化が社会的厚生に与える変化は(16)式を導いたのと同様にして

$$(29)\quad \frac{\partial z}{\partial \omega_i}=f_i-\beta P^1{}_i$$

と計算される。ここで $\beta<0$ であるから，**命題 1 は従量税率 s_1 を所与とした本節の問題についても成立する。**

さて $i=n$ については(29)式は

$$(30)\quad \frac{\partial z}{\partial \omega_n}=\frac{b_{11}-a_{11}}{\Delta(1)}f_n$$

となり，s_1 の変化が経済厚生に及ぼす効果は(18)式を導いた時と同様にして

$$(31)\quad \frac{\partial z}{\partial s_1}=\beta$$
$$=\frac{-s_1 f_n}{\Delta(1)}$$

となることが知られる。以上の準備の下に次の命題を証明することは容易である。(3)

命題 3　財 n が財 1 に対して普通財である（$P^1{}_1<0$）として，従量税率 $s_1>0$ が与えられたとしよう。そのとき s_1 の微小量の変化がもたらす社会的厚生の損失を相殺するに必要な ω_n の変化

注（3） 次の結果は 2 節の(3)*式の自然な一般化になっている。

の大きさは $s_1/(b_{11}-a_{11})$ で与えられる。

証明。(30)と(31)を用いると，

$$(32)\quad \left.\frac{\partial \omega_n}{\partial s_1}\right|_{z\,:\,\mathrm{const}} = -\frac{\partial z}{\partial s_1}\Big/\frac{\partial z}{\partial \omega_n} = \frac{s_1}{b_{11}-a_{11}}$$

となることによる。

6 Ramsey の問題

Ramsey (1927) によって定式化された古典的な問題は，第 4 節の Lipsey-Lamcaster (1956—57) の問題の制約条件(7)を税収についての条件

$$(33)\quad \sum_{i=1}^{n-1}(P^i(x+\omega)-Q^i(x))x_i=R$$

で置き換えたものである。ここで $R>0$ は外生的に与えられる税収入の額で，それを確得するために消費税を課す必要があるために諸財の市場に歪みをひき起こさざるをえないことになる。なお R は実現可能な水準（すなわち(2)と(33)の制約を満たす解 x が存在する範囲）に与えられなければならない。Ramsey 以後のこの問題についての研究については，Boiteux (1951), Atkinson-Stiglitz および Sheshinski (1986) 等を参照されたい。ただし本稿の最終的目的は R の変化が厚生に及ぼす効果を検討することにあり，そのために多少の分析的な準備をしておく必要がある。

さて Ramsey の問題のラグランジュ形式を

$$(34)\quad z=f(x+\omega)-\alpha g(x)+\beta\left(\sum_{i=1}^{n-1}P^i(x+\omega)-Q^i(x)x_i-R\right)$$

と書き，最適のための一階の条件を求めると

$$(35)\quad z_r=f_r(x+\omega)-\alpha g_r(x)+\beta\left(\sum_{i=1}^{n-1}P_r^i(x+\omega)-Q_r^i(x)x_i-P^i(x+\omega)-Q^i(x)\right)=0 \quad (i=1,2,\cdots n)$$

となる。これを行例の形で書けば

$$(36)\quad \begin{pmatrix} P^1 & Q^1 & \sum(P_1{}^i-Q_1{}^i)x_i+(P^1-Q^1) \\ P^r & Q^r & \sum(P_r{}^i-Q_r{}^i)x_i+(P^r-Q^r) \\ 1 & 1 & \sum(P_n{}^i-Q_n{}^i)x_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -f_n \\ \alpha g_n \\ \beta \end{pmatrix}=0 \quad (\gamma=2,3,\cdots,n-1)$$

となる。この式から各 γ について上式の左辺の行列の行列式が 0 になることがわかる。したがって

$$(37)\quad \begin{vmatrix} P^1 & Q^1 & \sum(a_{i1}-b_{i1})x_i \\ P^\gamma & Q^\gamma & \sum(a_{i\gamma}-b_{i\gamma})x_i \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

となることがわかる。ここで最適点における従価税率を $t_\gamma(\gamma=1,2,\cdots n)$ とおけば，

$$t_\gamma Q^\gamma \sum_{i=1}^{n-1}(a_{i1}-b_{i1})x_i = t_1 Q^1 \sum_{i=1}^{n-1}(a_{i\gamma}-b_{i\gamma})x_i \qquad (\gamma=2,3,\cdots n-1)$$

となるから

$$(38)\quad \theta = \sum_{i=1}^{n-1}(a_{i\gamma}-b_{i\gamma})x_i/t_\gamma Q^\gamma$$

は γ から独立となる。

次の補助定理は本質的に Ramsey によるものである。

補助定理　R>0 ならば $\theta<0$ である。

証明。R の定式と(38)式により

$$\begin{aligned} R\theta &= \sum_{\gamma=1}^{n-1} t_\gamma Q^\gamma x^\gamma \theta \\ &= x'(A-B)x \end{aligned}$$

とある。ここで Antonelli 行列についての仮定より，Aは負の定符号，Bは正の定符号を持つことを用いると結論が導かれる。

以上の分析を総合すると次の Ramsey の最適課税の公式（を逆需要関数と逆供給関数の弾力性で表現したもの）が導かれる。

命題 4　Ramsey の問題の解に対応する最適税率は次の公式で与えられる。

$$(39)\quad t_\gamma = -\left(\sum\epsilon_{i\gamma}^- + \sum\eta_{i\gamma}^-\right)/\left(\theta+\sum\epsilon_{i\gamma}^-\right) \qquad (\gamma=1,2,\cdots,n-1)$$

ここで和は $i=1,2,\cdots n-1$ について求められ，$\epsilon_{i\gamma}^-$ は逆需要関数についての弾力性，$\eta_{i\gamma}^-$ は逆供給関数についての弾力性で，それぞれ $\epsilon_{i\gamma}^- = -a_{i\gamma}x_i/P^\gamma$，$\eta_{i\gamma}^- = b_{i\gamma}x_i/Q^\gamma$　$(i,\gamma=1,2,\cdots,n-1)$ で定義されているものとする。

証明。(38)式を弾力性を用いて表現すると

$$\theta = -\left(\sum_i(1+t_\gamma)\epsilon_{i\gamma}^- + \sum_i\eta_{i\gamma}^-\right)/t_\gamma$$

となる。これを t_γ について解けば，求める公式が得られる。

つぎにβをxによって表現することを考えよう。そのために(36)式を変形して

$$(40)\quad \begin{pmatrix} Q^r & \sum_i(P_r{}^i-Q_r{}^i)x_i+(P^r-Q^r) \\ 1 & \sum_i(P_n{}^i-Q_n{}^i)x_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha g_n \\ \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} P^r \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\gamma=1,2,\cdots,n-1)$$

と表現しよう。そして各γについて$\Delta(\gamma)$を(40)式の左辺の2×2の行列の行列式としよう。すると(38)式によって，

$$(41)\quad \Delta(\gamma)=-\sum(P_\gamma{}^i-P^\gamma P_n{}^i)x_i+\sum(Q_\gamma{}^i-Q^\gamma Q_n{}^i)x_i-(P^\gamma-Q^\gamma)(1+\sum P_n{}^ix_i)$$
$$=\sum(b_{i\gamma}-a_{i\gamma})x_i-(P^\gamma-Q^\gamma)(1+\sum_i P_n{}^ix_i)$$
$$=t_\gamma Q^\gamma(\theta+1+\sum P_n{}^ix_i)$$

となる。ここで$\theta+1+\sum P_n{}^ix_i$がゼロでなければ，(4) (40)より

$$(41)\quad \beta=\frac{-(P^\gamma-Q^\gamma)f_n}{\Delta(\gamma)}$$
$$=\frac{f_n}{\theta+1+\sum P_n{}^ix}$$

となる。このラグランジュ乗数は，Rの変化によって経済厚生がいかに変化するかを示している。じっさい，

$$\frac{\partial z}{\partial R}=\sum_{\gamma=1}^{n}z_\gamma\frac{\partial x_\gamma}{\partial R}+P$$
$$=\beta$$

となるからである。なお一財のモデルの場合と同じように，税収関数$\sum(P^\gamma(x)-Q^\gamma(x))x_\gamma$は$x$の変化に関して必ずしも単調な動きを示さないので，税収の変化が経済厚生を増加させる場合も生じうる。以下では$\partial z/\partial R<0$となる場合に議論を限定するが，それについては次の注意を参照。

注意

$R>0$が充分小さいときには$\theta+1+\sum P_n{}^ix_i<0$，したがって$\partial z/\partial R=\beta<0$となる。じっさい補助定理1により

$$R(\theta+1+\sum P_n{}^ix_i)=x'(A-B)x+(P-Q)'x(1+\sum P_n{}^ix_i)$$

となることがわかり，右辺の第1項は負で第2項は競争均衡点（$R=0$に対応する解）の近くではゼロになる。したがってxについての関数の連続性と(41)，(42)式によって上の主張が確かめられる。

つぎにω_iの変化が経済厚生に及ぼす効果を調べるために(34)をω_iで微分し(35)，(42)を用いると

$$(43)\quad \frac{\partial z}{\partial \omega_i}=\sum z_\gamma\frac{\partial x_\gamma}{\partial \omega_i}+f_i-\beta\sum P_i{}^\gamma x_\gamma$$
$$=f_i-\beta\sum P_i{}^\gamma x_\gamma$$

が得られる。ここで(41)を用いると

注（4） つぎの注意を参照。

$$
\frac{\partial z}{\partial \omega_n}=\frac{(\theta+1)f_n}{(\theta+1)+\sum_i P_n{}^i x_i}
$$

$$
=\beta(\theta+1)
$$

となることがわかる。このようにして第4節の命題1に対応するつぎの主張を確立することができる。

命題5 すべての非価値尺度財が価値尺度財に対して普通財であるならば，財 n の社会的効用 $\partial z/\partial \omega_n$ は個人的効用 f_n より大である。

証明。この主張は β が負であるという想定の下では，各 $P_n{}^i$ が正であれば(49)よりただちに明らかである。しかるに $P_n{}^i$ が正であることは，P_n^1 についての注意1(i)の主張が $P_n{}^i$ についてもあてはまることにより明らかである。

以上の準備の下に R の変化がもたらす経済的厚生への変化をつぎの命題によって要約することができる。(5)

命題6 税収 $R>0$ が与えられたときの Ramsey の問題の最適解において R の増加にともなう経済厚生の損失を相殺するに必要な，価値尺度財の賦存量 ω_n の変化の大きさは

(45) $-1/(\theta+1)=t_r/(\sum_i(1+t_r)\epsilon_{i\bar{r}}+\sum_i\eta_{i\bar{r}}-t_r)$

で与えられる。

証明。(42)(44)より

$$
\left.\frac{\partial \omega_n}{\partial R}\right|_{z\,:\,\mathrm{const}}=-\frac{\partial z}{\partial R}\Big/\frac{\partial z}{\partial \omega_n}
$$

$$
=-1/(1+\theta)
$$

となる。これに Ramsey の公式（命題4）を用いれば命題6の証明が完結する。

参考文献

ALLAIS, M., (1973) "La Theorie Generale des Surplus et l'apport Fondamental de Vilfredo Pareto. *Revue d'Economie Politique*, 83, 1044–1097. An English translation appeared as "The General Theory of Surplus and Pareto's Fundamental Contributions," in *Convegno Internazionale Vilfredo Pareto.* Roma: Accademia Nazionale dei Lincei, 1975, pp. 109–163.

ANTONELLI, G. B., (1886) *Sulla teoria matematica della Economia politica.* Pisa; nella Yipografia del Folchetto, (privately published). An English translation appeared as "On the Mathematical Theory

注（5） 次の結果は第2節の(5)*式の自然な拡張になっている。

of Political Economy", in J. S. Chipman, L. Hurwicz, M. K. Richter, and H. Sonnenschein ed. *Preference, Utility, and Demand,* 1971.

ATKINSON, A, B, and J. E. STIGLITZ, (1980) *Lectures on public Economics,* McGraw-Hill.

BOITEUX, M., (1951) "Le "Revenu Distruable" et les Pertes Economiques," *Econometrica,* 19, pp. 112-133.

DEBREU, G., (1951) "The Coefficient of Resource Utilization," *Econometrica,* 19, pp. 273-292.

DIEWERT, W. E., (1981) "The measurement of Deadweight Loss Revisited," *Econometrica,* Vol. 49, No. 5.

DIXIT, A. K., (1975) "Welfare Effects of Tax and Price Changes," *Journal of Public Economics,* 4, pp. 103-123.

HARBERGER, A. C., (1964) "The Measurement of Waste," *American Economic Review,* 54, pp. 58-76.

HICKS, J. R., (1946) *Value and Capital,* Second Edition, Oxford: Clarendon Press.

HICKS, J. R., and ALLEN, R. G. D., (1934) "A Reconsideration of the Theory of Value," *Econometrica,* NS 1, pp. 52-75, 196-219.

HOTELLING, H., (1938) "The General Welfare in Relation to Problems of Taxation and of Railway and Utility Rates," *Econometrica,* 6, pp. 242-269.

KATZNER, D. W., (1970) *Static Demand Theory,* Mcmillan.

KAWAMATA, K., (1977) "Price Distortion and the Second Best Optimum, *The Review of Economic Studies,* Vol. 44, No. 1, pp. 23-29.

LIPSEY, R. G. and LANCASTER, K. J., (1956-57) "The General Theory of Second Best Optimum," *The Review of Economic Studies,* 24, pp. 11-32.

LLOYD, P. J., (1974) "A More General Theory of Price Distortion in Open Economies," *Journal of International Economics,* 4, pp. 365-386.

RAMSEY, F., (1927) "A Contribution to the Theory of Taxation," Vol. 37, pp. 47-61.

SAMUELSON, P. A., (1950) "The Problem of Integrability in Utility Theory," NS 17, pp. 355-385.

SHESHINSKI, E., (1986) "Positive Second-Best Theory. A Brief Survey of the Theory of Ramsey Pricing," in K. J. Arrow and M. D Intriligator ed. *Handbook of Mathematical Economics,* Vol. 3, North-Holland.

(経済学部教授)