「三田学会雑誌」80巻3号（1987年8月）

一般的重複世代モデルにおける競争均衡の存在*

――生産と非順序選好をもつ経済――

塩　沢　修　平

1　序

本稿では，価値貯蔵手段としての貨幣と生産を含む，一般的な重複世代モデルの競争均衡の存在をゲーム論的な手法を用いて証明する。初めに経済を定式化し，その経済に基づく抽象経済を考える。そして，その抽象経済の social 均衡の存在を証明し，その social 均衡が，もとの経済の競争均衡になっていることを示す。ここでの抽象経済には，それぞれ可算無限人から成る3種類の主体の集合があり，消費者，生産者および auctioneer（競売人）に対応する。

重複世代モデルは Samuelson〔1958〕によって導入され，異時点間の交換の不完全性が競争均衡の非最適性の原因として挙げられた。そしてその非最適性は，政府による paper asset の発行によって解消あるいは軽減され得ることが指摘されている。重複世代モデルは貨幣が価値をもつことを説明する最も自然なモデルであるとされ，Wallace〔1980〕などにより，貨幣均衡の分析に用いられている。また，財政，金融政策などについても，理想的な分析用具を提供するものと考えられている。しかし，これまでの重複世代モデルの多くは，Balasko=Sell〔1980〕(1) などにみられるように，2期間にわたって存在する消費者からなる純粋交換経済を考え，消費者の選好に関する仮定も非常に制限的なものであった。また，均衡存在の証明方法も有限個の財および有限人の消費者からなる部分経済（subeconomy）の列を考え，それぞれについて競争均衡の存在を証明し，その極限がもとの経済の競争均衡になっていることを示すものであるが，この方法は，各期有限人の主体が存

* 本稿での分析は，筆者が1986年にミネソタ大学（University of Minnesota）へ提出した博士論文の一部に基づいている。論文作成にあたり M. K. Richter 教授に懇切なる御指導を受けた。また N. C. Yannelis, N. Wallace などの諸教授，そして友人諸氏からも多くの御助言を得た。勿論，ありうべき誤りは筆者のみに帰せられるべきものである。

注（1） Balasko = Cass = Shell〔1980〕，Balasko = Shell〔1981〕をも参照せよ。

在し，しかもすべての主体の生存期間に一律の上限が存在する場合に適用される。(2)

ここで考察される重複世代経済には，各期任意の有限人の消費者および生産者が存在し，各消費者および生産者は任意の有限期間にわたって存在するものとする。各消費者はそれぞれ異なる選好をもち，その選好は順序づけられている必要はない。財は各期任意の有限個存在し，費用なしに保存可能なものと保存不可能なものの双方を含み得る。価格が与えられた場合，消費者の各期の予算集合は，その期における財の初期保有量と，前期に貯蓄された保存可能な財の量とによって決定される。この経済における競争均衡の存在を証明するために，実現可能集合に基づく経済を考え，それに対応する抽象経済を定義する。その抽象経済における social 均衡の存在を初めに証明し，それが実現可能集合に基づく経済の競争均衡，そしてさらにもとの経済の競争均衡であることを示す。

抽象経済は，標準形ゲームに達成可能性の概念を導入して構成される。標準形ゲームにおける非協力解の概念である Nash 均衡は，抽象経済においては social 均衡へと拡張されている。social 均衡は各主体の以下のような戦略からなっている。(i)その戦略は達成可能である。(ii)他の主体の戦略を所与とした場合，より以上の利得をもたらすような達成可能な戦略は存在しない。抽象経済は多くの応用分野で存在証明のための数学的用具として用いられている。ただし抽象経済は準ゲーム（pseudo-game）であって，ゲームではない。何故なら，主体 i の達成可能な戦略の集合は他の主体の戦略が与えられなければ決定されず，他の主体の達成可能な戦略の集合は主体 i の戦略が与えられなければ決定されないからである。(3)

Debreu〔1952〕は，有限個の財と順序づけられた選好をもつ有限人の主体から成る抽象経済を定式化し，social 均衡の存在を証明した。Shafer=Sonnenschein〔1975〕は，有限個の財と必ずしも順序づけられていない選好をもつ有限人の主体から成る抽象経済において，social 均衡の存在を証明した。しかし，これらの結果を重複世代経済に直接応用することはできない。何故なら，重複世代経済においては，可算無限個の期間が考えられており，したがって経済全体では無限個の財と無限人の主体が存在するからである。Yannelis=Prabhakar〔1983〕は，無限次元の戦略集合と，必ずしも順序づけられていない選好をもつ可算無限人の主体から成る抽象経済において，social 均衡の存在を証明している。そこにおける存在定理は，可算無限人の auctioneer を導入する本稿のモデルに応用され得るものである。

一般に静学モデルにおいて，経済から抽象経済を構成する場合に，消費者および生産者に相当する主体と市場の機能を抽象化した auctioneer に相当する主体を考え，それぞれの戦略集合と目的関数を定義する。通常，auctioneer に相当する主体の戦略集合は価格単体であり，目的関数は超過需要の価値和が用いられる。しかし重複世代モデルにおいては，auctioneer に相当する主体の目的関数をどのように定義するかという問題が生ずる。そこで本稿では，各期ごとに可算無限人の

注（2） Wilson〔1981〕は，無限期間にわたって生存する可算無限人の消費者から成り，完全資本市場をもつ経済を考察している。

（3） 抽象経済については，例えば Ichiishi〔1983〕を参照せよ。

auctioneer を導入し，それぞれが対応する期における超過需要の価値和を最大化するように行動するものと考える。

本稿のモデルは，重複世代経済と Arrow-Debreu 型経済とを結び付け，同時に，多くの応用分野に，基礎的な分析用具を提供し得るものといえよう。

2 重複世代経済

次のような重複世代経済モデルを考える。期間 $t, t=1, 2, \cdots$ において，$m(t)$ 種類の財，$I(t)$ 人の消費者および $J(t)$ 人の生産者が存在するものとする。各消費者は必ずしも順序づけられていない選好をもち，それぞれ異なり得る有限期間にわたり生存するものとする。各生産者はそれぞれ異なり得る有限期間にわたり存在し，それぞれの目的対応（objective correspondence）に関して最適化行動をとるものとする。財は保存可能なものとそうでないものの双方を含み得る。

定義 2—1 消費者 i の有限の存在期間を

$$L_i=\{t\in T \mid t_i^* \leqq t \leqq t_i^{**}\}$$

によって表す。ここでTは正の整数の集合であり，それぞれの整数は期間に対応する。

定義 2—2 消費者 i の消費集合を

$$X_i=\Pi_{t\in L_i}X_i(t)$$

によって表す。ここで $X_i(t)$ は t 期における消費者 i の消費集合である。

定義 2—3 消費者 i の初期保有量を

$$w_i=\Pi_{t\in L_i}w_i(t)$$

によって表す。ここで $w_i(t)$ は t 期における消費者 i の初期保有量である。

定義 2—4 消費者 i の選好対応を

$$P_i: X_i \rightarrow 2^{X_i}$$

によって表す。(4)

定義 2—5 消費者 i の貯蓄集合を

$$S_i=\Pi_{t\in L\in i}S_i(t)$$

によって表す。ここで $S_i(t)$ は t 期における消費者 i の貯蓄集合であり，保存不可能な財に対応する成分は0と定義される。また $X_i\times S_i\equiv Z_i$ を消費—貯蓄集合と呼び，その要素 $(x_i, s_i)\equiv z_i$ を消費—貯蓄計画と呼ぶ。

定義 2—6 生産者 j の存在期間を $O_j\subset T$ によって表す。O_j の最初の期を t_j^* とする。

注（4） 外部性が存在する場合にはXが定義域となる。

定義 2—7 生産者 j の生産計画を，列

$y_j=\{y_j(t)\}_{t\in O_j}$

とする。ここで $y_j(t)\in R^{m(t)}$ である。

定義 2—8 技術的に可能なすべての生産計画 y_j の集合を $Y_j\subset\Pi_{t\in O_j}R^{m(t)}$ とする。Y_j を生産者 j の生産集合と呼ぶ。$Y\equiv\Pi_{j\in J}\ Y_j$ とする。

定義 2—9 $p=\{p(1),\ p(2)\cdots\}$ を価格列とする。ここで

$p(t)\in\Delta(t),\ \Delta(t)\equiv\{p\in R^{m(t)}|0\leqq p^h\leqq 1,\ \sum_{h=1}^{m(t)}p^h=1\},\ \Delta\equiv\Pi_{t\in T}\Delta(t)$ とする。

定義 2—10 生産者 j の目的対応を $G_j\colon \Delta\times Y\rightarrow 2^{Y_i}$ によって表す。

各生産者は，価格が与えられると，Y_j のなかの G_j に関して最大元となる生産計画を選ぶものとする。G_j は，例えば割引された各期の利潤の総和などによって定義されうる。

定義 2—11 消費者 i の t 期における生産者 j についての利潤分布率を $\theta_{ij}(t)$ とする。ここで $0\leqq\theta_{ij}(t)\leqq 1,\ \sum_{i\in I(t)}\theta_{ij}(t)=1$ である。$\theta_{ij}\equiv\Pi_{t\in L_i}\theta_{ij}(t)$ とする。

定義 2—12 経済 E は

$E=(X_i,\ S_i,\ w_i,\ P_i,\ G_j,\ \theta_{ij})_{i\in I,j\in J}$

によって表される。

消費者の各期における予算集合は，その期の初期保有量と生産者からの利潤分配および前期の貯蓄に依存して決まる。

定義 2—13 消費者 i の経済 E における予算対応 $b_i\colon \Delta\times Y\rightarrow 2^{Z_i}$ を

$b_i(p,y)=\{z_i\in Z_i|p(t)[x_i(t)+s_i(t)]\leqq p(t)[w_i(t)+\tilde{s}_i(t-1)+\max[\sum_{j\in J}\theta_{ij}(t)p(t)y_i(t),0]\forall t\in L_i\}$

と定義する。ここで $\tilde{s}_i(t-1)\in R^{m(t)}$ は，財空間の次元を合わせるために，前期に貯蓄された財については $\tilde{s}_i^h(t-1)=s_i^h(t-1)$ とおき，その他の成分は0とおいたものである。

また，

$\mathrm{proj}\,b_i(p,y)\equiv\{x_i\in X_i|(x_i,s_i)\in b_i(p)\ \text{for some}\ s_i\in S_i\}$

とおく。

定義 2—14 経済 E の競争均衡は $[z_i^*,y_j^*,p^*]\in Z\times Y\times\Delta$ で以下の条件を満たすものである。

(i) すべての $i\in I$ について $z_i^*\in b_i(p^*,y^*)$

かつ x_i^* は $\mathrm{proj}\,b_i(p^*)$ のなかで P_i に関して最大元である。

(ii) すべての $j\in J$ について (p^*,y_j^*) は p^* を所与としたときに Y_j のなかで G_j に関して最大元である。

(iii) すべての $t \in T$ と $h=1, \cdots\cdots, m(t)$ について，

$$\sum_{i \in I} [x_i^{h*}(t)+s_i^{h*}(t)] \leqq \sum_{i \in I} [w_i^h(t)+\tilde{s}_i^{h*}(t-1)]+\sum_{j \in J} y_j^{h*}(t)]$$

経済Eの競争均衡の存在を証明するために以下の仮定を導入する。

仮定 2—1 消費者 i の $t \in L_i$ 期における可能な消費計画の集合は $R^{m(t)}$の非負象限である。したがって消費集合 X_i は非空，閉かつ凸で，$\geqq$に関して下限をもつ。

仮定 2—2 $w_i(t) \in \mathrm{int}\ X_i(t)$，$t \in L_i$。

仮定 2—3 P_i は open lower section をもつ，すなわち

$$P_i^{-1}(x_i)=\{v \in X_i \mid x_i \in P_i(v)\}$$ は X_i のなかで開，

かつ $x_i \notin \mathrm{co}\ P_i(x_i)$。

仮定 2—4 Y_j は非空，閉かつ凸であり，$0 \in Y_j$。

仮定 2—5 $Y(t) \cap [-Y(t)]=\{0\}$ かつ $Y(t) \supset R_-^{m(t)}$

ここで $Y(t) \equiv \prod_{j \in J} Y_j(t)$，かつ $Y_j(t)$ は生産集合 Y_j の t 期における財空間への射影を示す。

仮定 2—6 G_j は open lower section をもつ，すなわち

$$G_j^{-1}(y_j)=\{(p, y) \in \Delta \times Y \mid y_j \in G_j(p, y)\}$$ は $\Delta \times Y$ のなかで開，かつ $y_j \notin \mathrm{co}\ G_j(p, y)$

仮定 2—7 ある $t \in O_j$ について $p(t)y_j(t)<0$ となるようなすべての $y \in Y$ および $p \in \Delta$ について $0 \in G_j(p, y)$。

これらの仮定から以下の結果を得る。

定理 1 仮定2－1～2－7の下で，経済Eにおける競争均衡が存在する。

3 実現可能集合と抽象経済

経済Eにおいては，消費一貯蓄集合および生産集合は一般に有界ではない。そこではじめに実現可能集合を考え，それに基づく経済を定義する。

定義 3—1 t 期において以下の条件を満たす消費，貯蓄および生産計画の集合を

$X_i'(t)$，$S_i'(t)$，$Y_j'(t)$ と表す。

$$\sum_{i \in I}[x_i^h(t)+s_i^h(t)]-\sum_{j \in J} y_j^h(t)-\sum_{k=1}^{t}\sum_{i \in I} w_i^h(k) \leqq 0$$

$Z_i'(t) \equiv X_i'(t) \times S_i'(t)$，$Y_j'(t)$ をつれぞれ実現可能消費一貯蓄集合および実現可能生産集合と呼

ぶ。

補助定理 3—1 $Z_i'(t)$ および $Y_j'(t)$ は有界である。(5)

したがって，すべての $i\epsilon I(t)$ およびすべての $j\epsilon J(t)$ について

$$X_i'(t)\subset \text{int } C(t), S_i'(t)\subset \text{int } C(t), Y_j'(t)\subset \text{int } C(t)$$

となるような $C(t)=\{C\epsilon R^{m(t)} \mid \|C^h\|\leqq \bar{C}, h=1, \cdots\cdots, m(t)\}$

が存在する。ここで

$$\hat{X}_i(t)\equiv X_i'(t)\cap C(t), \hat{X}_i\equiv \Pi_{t\epsilon L_i} \hat{X}_i(t), \hat{X}\equiv \Pi_{i\epsilon I} \hat{X}_i,$$

$$\hat{S}_i(t)\equiv S_i'(t)\cap C(t), \hat{S}_i\equiv \Pi_{t\epsilon L_i} \hat{S}_i(t), \hat{S}\equiv \Pi_{i\epsilon I} \hat{S}_i(t)$$

$$\hat{Y}_j(t)\equiv Y_j'(t)\cap C(t), \hat{Y}_j\equiv \Pi_{t\epsilon O_j} \hat{Y}_j(t), \hat{Y}\equiv \Pi_{j\epsilon J} \hat{Y}_j$$

と定義する。そして，$\hat{Z}_i, \hat{Y}_j$ に基づく経済を考える。

補助定理 3—2 $\hat{Z}_i$ および $\hat{Y}_j$ は非空，コンパクトかつ凸である。

証明　仮定２－１，２－４，補助定理３－１，および $\hat{Z}_i$ と $\hat{Y}_j$ の定義より明らかである。

（証明終了）

定義 3—2 消費者 i の選好対応 $\hat{P}_i: X_i\rightarrow 2^{\hat{X}_i}$ を次のように定義する。(6)

$$\hat{P}_i(x_i)=\{x_i'\epsilon \hat{X}_i \mid x_i'=\lambda x_i''+(1-\lambda)x_i, 0<\lambda\leqq 1, x''_i\epsilon P_i(x_i)\}$$

定義 3—3 生産者 j の目的対応 G_j: $\Delta\times Y\rightarrow 2^{Y_i}$ を次のように定義する。

$$\hat{G}_j(P, y)=\{y_j'\epsilon \hat{Y}_j \mid y_j'=\lambda y_j''+(1-\lambda)y_j, 0<\lambda\leqq 1, y_j''\epsilon G_j(P, y)\}$$

定義 3—4 経済 $\hat{E}$を

$$E=(\hat{Z}_i, w_i, \hat{P}_i, \hat{Y}_j, \hat{G}_j, \theta_{ij})_{i\epsilon I, j\epsilon J}$$

によって定義する。

定義 3—5 消費者 i の経済 $\hat{E}$ における予算対応 $\hat{b}_i$: $\Delta\times Y\rightarrow 2^{Z_i}$ を次のように定義する。

$$\hat{b}_i(p, y)=b_i(p, y)\cap \hat{Z}_i$$

また proj $\hat{b}_i(p, y)=\{x_i\epsilon \hat{X}_i \mid (x_i, s_i)\epsilon\hat{b}_i(p, y)$ for some $s_i\epsilon \hat{S}_i\}$ とおく。

定義 3—6 経済 $\hat{E}$ の競争均衡は $\{z^*, y^*, p^*\}$ $\hat{Z}\times\hat{Y}\times\Delta$ で以下の条件を満たすものである。

(i) すべての $i\epsilon I$ について $z_i^*\epsilon\hat{b}_i(p^*, y^*)$

かつ x_i^* は proj $\hat{b}_i(p^*, y^*)$ のなかで $\hat{P}_i$ に関して最大元である。

(ii) すべての $j\epsilon J$ について (p^*, y_j^*) は p^* を所与としたときに $\hat{Y}_j$ のなかで，$\hat{G}_j$ に関して最大元である。

注（5） 証明については，例えば Debreu〔1959〕を参照せよ。

（6） この形態の選好対応については Gale = Mas-Collel〔1975, 1979〕を参照。

(iii) すべての $t \epsilon T$ と $h=1, \cdots\cdots, m(t)$ について,

$$\sum_{i \epsilon I}[x_i^{h*}(t)+s_i^{h*}(t)] \leqq \sum_{i \epsilon I}[w_i^h(t)+\tilde{s}_i^{h*}(t-1)]+\sum_{j \epsilon J} y_j^{h*}(t)]$$

この経済 $\hat{E}$に基づく抽象経済を以下のように構成する。抽象経済においては, 3種類の主体の集合があり, それぞれ消費者, 生産者および auctioneer に対応する。

定義 3—7 主体 i, $i \epsilon I$ の戦略集合 を $\hat{Z}_i$, 主体 j, $j \epsilon J$ の戦略集合を Y_j, 主体 t, $t \epsilon T$ の戦略集合 を $\Delta(t)$ とする。

定義 3—8 主体 i の達成可能戦略対応 β_i: $\hat{Z} \times \hat{Y} \times \Delta \rightarrow 2^{Z_i}$ を

$$\beta_i[z, y, p]=\{z_i \epsilon \hat{Z}_i \mid p(t)[x_i(t)+s_i(t)]<p(t)[w_i(t)+\tilde{s}_i(t-1)] +\max[\sum_{j \epsilon J} \theta_{ij}(t) p(t) y_j(t), 0], t \epsilon L_i\}$$

主体 j の達成可能戦略対応 β_i: $\hat{Z} \times \hat{Y} \times \Delta \rightarrow 2^{Y_j}$ を

$$\beta_i[z, y, p]=\hat{Y}_j$$

主体 t の達成可能戦略対応 β_t: $\hat{Z} \times \hat{Y} \times \Delta \rightarrow 2^{\Delta(t)}$ を

$$\beta_t[z, y, p]=\Delta(t)$$

と定義する。

定義 3—9 主体 i の選好対応 π_i: $\hat{Z} \times \hat{Y} \times \Delta \rightarrow 2^{\hat{Z}_i}$ を

$$\Pi_i[z, y, p]=\{\bar{z}_i \epsilon \hat{Z}_i \mid \bar{x}_i \epsilon \hat{P}_i(x_i)\}$$

主体 j の選好対応 π_j: $\hat{Z} \times \hat{Y} \times \Delta \rightarrow 2^{Y_j}$ を $\pi_j[z, y, p]=\{\bar{y}_j \epsilon \hat{Y}_j \mid \bar{y}_j \epsilon \hat{G}_j(y, p)\}$

主体 t の選好対応 π_t: $\hat{Z} \times \hat{Y} \times \Delta \rightarrow 2^{\Delta(t)}$ を

$$\pi_t[z, y, p]=\{p' \epsilon \Delta(t) \mid p'\{\sum_{i \epsilon I}[x_i(t)+\tilde{s}_i(t)-w_i(t)-\tilde{s}_i(t-1)]+\sum_{j \epsilon J} y_j(t)\} >p(t)\{\sum_{i \epsilon I}[x_i(t)-s_i(t)-w_i(t)-\tilde{s}_i(t-1)]+\sum_{j \epsilon J} y_j(t)\}\}$$

によって定義する。

定義 3—10 抽象経済 Γ を

$$=(\hat{Z}_i, \hat{Y}_j, \Delta(t), \beta_i, \beta_j, \beta_t, \pi_i, \pi_j, \pi_t)_{i \epsilon I, j \epsilon J, t \epsilon T}$$

と定義する。

定義 3—11 抽象経済 Γ の social 均衡は $[z^*, y^*, p^*] \epsilon \hat{Z} \times \hat{Y} \times \Delta$ で次の条件を満たすものである。

(i) $z_i^* \epsilon \operatorname{cl} \beta_i[z^*, y^*, p^*]$, $y_j^* \epsilon \hat{Y}_j$, $p^*(t) \epsilon \Delta(t)$

(ii) $\pi_i[z^*, y^*, p^*] \cap \operatorname{cl} \beta_i[z^*, y^*, p^*]=\phi$

$\pi_j[z^*, y^*, p^*] \cap \operatorname{cl} \beta_i[z^*, y^*, p^*]=\phi$

$\pi_t[z^*, y^*, p^*] \cap \operatorname{cl} \beta_t[z^*, y^*, p^*]=\phi$。

4 均衡の存在

初めに抽象経済の social 均衡の存在を示し，その social 均衡が経済 $\hat{E}$ の競争均衡になっていることを示す。

補助定理 4—1 仮定2—2の下で，すべての $[z, y, p]\in \hat{Z}\times\hat{Y}\times\Delta$ について，$\beta_i[z, p]$ は非空かつ凸である。

証明 仮定2—2より，すべての (p, y) について次のような不等式を満たす $z_i\in \hat{Z}_i$ が存在する。

$$p(t)[x_i(t)+s_i(t)]<p(t)[w_i(t)+\bar{s}_i(t-1)]+\max\ [\sum_{j\in J}\theta_{ij}(t)p(t)y_j(t), 0],\ t\in L_i$$

故に $\beta_i[z, y, p]$ は，すべての $[z, y, p]\in \hat{Z}\times\hat{Y}\times\Delta$ について非空である。また Z_i が凸なので $\beta_i[z, y, p\}$ が凸なのは明白である。（証明終了）

補助定理 4— 2 対応 $\bar{\beta}_i$: $\hat{Z}\times\hat{Y}\times\Delta\rightarrow 2^{Z_i}, \bar{\beta}_i(z, y, p)\equiv \mathrm{cl}\,\beta_i(z, y, p)$ は優半連続である。

証明 $\hat{Z}_i$ がコンパクトであるので，対応 $\bar{\beta}_i$ が閉であることを示せばよい（Berge〔1963〕, p. 112参照)。

$[(z^n, y^n, p^n)]$ を $\hat{Z}\times\hat{Y}\times\Delta$ における点列で

$[(z^n, y^n, p^n)]\rightarrow[(z^0, y^0, p^0)]$ かつ $z_i^n\in\beta_i[(z^n, y^n, p^n)], n=1, 2, \cdots$

となるものとする。そのとき，すべての n について

$$p(t)^n[x_i(t)^n+s_i(t)^n]\leqq p(t)^n[w_i(t)+\bar{s}_i(t-1)^n]+\max[\sum_{j\in J}\theta_{ij}(t)p(t)^n y_j(t)^n, 0],\ t\in L_i,$$

となり，したがって

$$p(t)^0[x_i(t)^0+s_i(t)^0]\leqq p(t)^0[w_i(t)\tilde{s}+_i(t-1)^0]+\max\ [\sum_{j\in J}\theta_{ij}(t)(t)^0 y_j(t)^0, 0],\ t\in L_i,$$

となる。故に

$$z_i^0\in\bar{\beta}_i[(z^0, y^0, p^0)]$$

したがって $\bar{\beta}_i$ は閉であり，故に優半連続である。（証明終了）

補助定理 4—3 β_i, β_j および β_t は開の lower section をもつ。

証明 $\beta_i^{-1}(z_i)=\{[z, y, p]\,|\,x_i\in\beta_i[z, y, p]\}$

が $Z\times Y\times\Delta$ のなかで開であることを示せばよい。

$\bar{z}_i\in\beta_i[(z', y', p')]$ となるようなすべての (z', y', p') について，(z', y', p') の近傍 $\hat{Z}\times U\times V$ で次の条件を満たすものが存在する。すなわち

すべての $[z, y, p]\in\hat{Z}\times U\times V$ について $\bar{z}_i\in\beta_i(z, y, p)$

故に $\hat{Z}\times U\times V\subset\beta_i^{-1}(\bar{z}_i)$ であり，したがって $\beta_i^{-1}(\bar{z}_i)$ は $\hat{Z}\times Y\times\Delta$ において開である。

$\beta_i^{-1}(y_i)\equiv\hat{Z}\times Y\times\Delta$ と $\beta_t^{-1}[p(t)]\equiv\hat{Z}\times Y\times\Delta$ は $\hat{Z}\times Y\times\Delta$ においてつねに開である。

（証明終了）

補助定理 4—4 仮定2—3および2—6で，π_i, π_j および π_t は開の lower section をもつ。

証明 仮定2—3，2—6および定義3—2，3—9より，π_i と π_j が開の lower section をもつのは明らかである。

$[z, y, p] \in \pi_t^{-1}(p')$ とする。すなわち

$$p'\{\sum_{i\in I}[x_i(t)+s_i(t)-w_i(t)-\bar{s}_i(t-1)]-\sum_{j\in J}y_j(t)\}$$
$$>p(t)\{\sum_{i\in I}[x_i(t)+s_i(t)-w_i(t)-\bar{s}_i(t-1)]-\sum_{j\in J}y_j(t)\}$$

そのとき，$[z, y, p]$ の近傍 $W\times U\times V$ で次の条件を満たすものが存在する。すなわち，すべての $[\bar{z}, \bar{y}, \bar{p}]\in W\times U\times V$ について $p'\{\sum_{i\in I}[x_i(t)+s_i(t)-w_i(t)-\bar{s}_i(t-1)]-\sum_{j\in J}y_i(t)\}>\bar{p}(t)$ $\{\sum_{i\in I}[x_i(t)+s_i(t)-w_i(t)-\bar{s}_i(t-1)]-\sum_{j\in J}y_i(t)\}$

故に $W\times U\times V\subset\pi_t^{-1}(p')$ となり，$\pi_t^{-1}(p')$ は開である。（証明終了）

補助定理 4—5 仮定2—3および2—6の下で，すべての $[z, y, p]\in\hat{Z}\times\hat{Y}\times\Delta$ について $Z_i\notin$ $\mathrm{co}\,\Pi_i[z, y, p]$, $y_j\notin\mathrm{co}\,\pi_j[z, y, p]$ かつ $p(t)\notin\mathrm{co}\,\pi_t[z, y, p]$ となる。

証明 仮定2—3，2—6および定義3—2，3—9より，$Z_i\notin\mathrm{co}\,\pi_i[z, y, p]$, $y_i\notin\mathrm{co}\,\pi_j[z, y, p]$ となることは明らかである。

背理法を用いるため，ある $[z, y, p]$ について $p(t)\in\mathrm{co}\,\pi_t[z, y, p]$ としよう。そのとき，$p^1, \cdots, p^m\in\pi[z, y, p]$ と $\alpha^1, \cdots, \alpha^m\in(0,1)$, $\sum_{k=1}^{m}\alpha^k=1$ で，$p(t)=\sum_{k=1}^{m}\alpha^k p^k$ となるものが存在する。$p^k\in\pi_t[z, y, p]$ なので，

$$p^k\{\sum_{i\in I}[x_i(t)+s_i(t)-w_i(t)-\bar{s}_i(t-1)]+\sum_{j\in J}y_i(t)\}$$
$$>p(t)\{\sum_{i\in I}[x_i(t)+s_i(t)-w_i(t)-\bar{s}_i(t-1)]+\sum_{j\in J}y_i(t)\}$$

となる。両辺に α^k を乗じ，k について合計すると，

$$p(t)\{\sum_{i\in I}[x_i(t)+s_i(t)-w_i(t)-\bar{s}_i(t-1)]+\sum_{j\in J}y_i(t)\}$$
$$>p(t)\{\sum_{i\in I}x_i(t)+s_i(t)-w_i(t)-\bar{s}_i(t-1)]+\sum_{j\in J}y_i(t)\}$$

となり，矛盾する。

故に $p(t)\notin\pi\,\mathrm{co}\,\pi_t[z, y, p]$ である。（証明終了）

命題 4—1（Yannelis=Prabhakar） 仮定2—1～2—7の下で，抽象経済において social 均衡が存在する。(7)

これにより次の定理を得る。

定理 4—1 仮定2—1～2—7の下で，経済 $\hat{E}$における競争均衡が存在する。

証明 $[z^*, y^*, p^*]$ を抽象経済の social 均衡とする。cocial 均衡の定義より，各消費者と生産者について，主体的均衡条件が満たされていることは明白である。

注（7） 証明については Yannelis = Prabhakar〔1983〕, p. 242 を参照せよ。

仮定2—4および2—7より

(4—1)　$p^*(t)y_j^*(t)\geqq 0,\ t\epsilon O_j,\ j\epsilon J$

となる。したがって消費者 i の t 期における予算制約式は

(4—2)　$p^*(t)[x_i^*(t)+s_i^*(t)]\leqq p^*(t)[w_i(t)+\tilde{s}_i^*(t-1)]+\sum_{j\epsilon J}\theta_{ij}\,p^*(t)y_j^*(t)$

となる。これを t 期におけるすべての消費者について合計すると，

(4—3)　$p^*(t)\sum_{i\epsilon I}[x_i^*(t)+s_i^*(t)-w_i(t)-\tilde{s}_i^*(t-1)]-p^*(t)\sum_{j\epsilon J}y_j^*(t)\leqq 0$

を得る。social 均衡の定義から

(4—4)　$\pi_t[z^*,y^*,p^*]\cap\beta_t[z^*,y^*,p^*]=\phi$

となるので，

(4—5)　すべての $p\epsilon\varDelta(t)$ について

$$p\{\sum_{i\epsilon I}[x_i^*(t)+s_i^*(t)-w_i(t)-\tilde{s}_i^*(t-1)]-\sum_{j\epsilon J}y_j^*(t)\}$$
$$\leqq p^*(t)\{\sum_{i\epsilon I}[x_i^*(t)+s_i^*(t)-w_i(t)-\tilde{s}_i^*(t-1)]-\sum_{j\epsilon J}y_j^*(t)\}$$

となる。したがって $p^h(t)=1,\ p^k(t)=0,\ k\neq h,\ h=1,\cdots,\ m(t)$ となる $p(t)\epsilon\varDelta(t)$ について

(4−6)　$\sum_{i\epsilon I}[x_i^{*h}(t)+s_i^{*h}(t)-w_i(t)-\tilde{s}_i^{*h}(t-1)]-\sum_{j\epsilon J}y^{*h}(t)\leqq 0$

を得る。したがって $[z^*,y^*,p^*]$ は経済 $\hat{E}$ の競争均衡である。　　　　　　　　　　　　（証明終了）

これにより定理2—1の証明が可能となる。

定理 2—1 の証明　経済 $\hat{E}$ の競争均衡が経済 E の競争均衡であることを示せばよい。$[z^*,y^*,p^*]$ を経済 $\hat{E}$ の競争均衡とする。定義により (4—6) が成立する。

消費者については，x_i^* が proj $b_i(p^*,y^*)$ のなかで P_i に関して最大元であることを示せばよい。背理法を用いるため，x_i^* が proj $b_i(p^*,y^*)$ のなかで P_i に関して最大元ではなかったとしよう。すると

(4—7)　$z_i'=(x_i',s_i')\ \epsilon b_i\ (p^*,y^*),\ \ x_i'\epsilon P_i(x_i^*)$

となるものが存在する。定義3—2より

(4—8)　$x_i'\ \epsilon\hat{P}_i(x_i^*)$

となる。ここで

$$x_i(\alpha)\equiv\alpha x_i'+(1-\alpha)x_i^*,\ \ s_i(\alpha)\equiv\alpha\, s_i+(1-\alpha)s_i^*$$

と定義する。$b_i(p^*,y^*)$ は凸であり，$z_i',z_i^*\ \epsilon b_i(p^*,y^*)$ なので

(4—9)　$(x_i(\alpha),s_i(\alpha))\epsilon b_i(p^*,y^*)$ for $0\leqq\alpha\leqq 1$

を得る。経済 $\hat{E}$ における競争均衡の定義より

(4—10)　$(x_i^*,s_i^*)\ \epsilon\ Z_i'$

となる。X_i' および s_i' の定義より，十分小さな α について，

(4—11)　$(x_i(\alpha),\ \ s_i(\alpha))\ \epsilon\ \hat{Z}_i$

となる。(4—9) および (4—11) より

(4—12)　$(x_i(\alpha),\ s_i(\alpha)) \epsilon \hat{b}_i(p^*, y^*)$

となり，(4—8) と (4—11) より

(4—13)　$x_i(\alpha) \epsilon \hat{P}_i(x_i^*)$

となる。これは x_i^* が proj $\hat{b}_i$ (p^*, y^*) のなかで $\hat{P}_i$ に関して最大元であることに矛盾する。故に x_i^* は proj $b_i(p^*, y^*)$ のなかで P_i に関して最大元である。

生産者についても同様の議論が適用される。したがって，$[z^*, y^*, p^*]$ は経済 E の競争均衡である。　(証明終了)

5　結　び

本稿での分析はさらに，消費者が債券を発行し相互に貸借が可能な場合，あるいは生産者が資金調達のために債券を発行する場合などに直接拡張され得る。本稿において所与とされていた，利潤分配率の内生的な決定も興味深い問題の一つである。また，理論的な面では，主体の数が各期において無限で，主体の集合が測度空間によって与えられているような経済についても，本稿での分析と基本的には同様の手法が適用され得る(8)。応用面については，例えば住宅土地問題あるいは年金問題などに適用される可能性があるであろう。それらについては今後の課題としたい。

参考文献

Balasko, Y., D. Cass and K. Shell, 1980: "Existence of Competitive Equilibrium in Overlapping-generations Model", *Journal of Economic Theory* 23, 307-322.

Balasko, Y. and K. Shell, 1980: "The Overlapping-generations Model, I. The Case of Pure Exchange without Money", *Journal of Economic Theory* 23, 281-306.

———, 1981: "The Overlapping-generations Model, II. The Case of Pure Exchange with Money", *Journal of Economic Theory* 24, 112-142.

Berge, C., 1963: *Topological Spaces*. Edinburgh/London: Oliver and Boyd.

Debreu, G., 1952: "A Social Equilibrium Existenece Theorem", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U. S. A.* 38, 886-893.

———, 1959: *Theory of Value*. New York: Wiley.

Gale, D. and A. Mas-Collel, 1975: "An Equilibrium Existence Theorem for a General Model without Ordered Preferences", *Journal of Mathematical Economics* 2, 9-15.

———, 1979: "Corrections to an Equilibrium Existence Theorem for a General Model withotu Ordered Preferences", *Journal of Mathematical Economics* 6, 297-298.

Ichiishi, T., 1983: *Game Theory for Economic Analysis*. New York: Academic Press.

Samuelson, P. A., 1958: "An Exact Consumption-loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money", *Journal of Political Economy* 66, 467-482.

Shafer, W. and H. Sonneschein, 1975: "Equilibrium in Abstract Economies without Ordered Preferences", *Journal of Mathematical Economics* 2, 345-348.

注（8）　これらの点に関しては Shiozawa〔1986〕において，いくつかの試みがなされている。

Shiozawa, S., 1986: Existence of Competitive Equilibria in Overlapping-generations Models, Ph. D. dissertation, Minneapolis, MN: University of Minnesota.

Wallace, N., 1980: "The Overlapping-generations Model of Fiat Money", in *Models of Monetary Economics,* ed. by J. Kareken and N. Wallace. Minneapolis, MN, Federal Reserve Bank of Minneapolis.

Wilson, C. A., 1981: "Equilibrium in Dynamic Models with an Infinity of Agents", *Journal of Economic Theory* 24, 95-111.

Yannleis, N. C. and N. D. Prabhakar, 1983: "Existence of Maximal Elements and Equilibrium in Linear Topological Spaces, *Journal of Mathematical Economics* 12, 233-245.

（経済学部助教授）