Title	2階級フォン· ノイマンモデルについて : 線形計画法と不動点定理の応用
Sub Title	On a two-class von Neumann growth model
Author	細田, 衛士
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1987
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.80, No.2 (1987. 6) ,p.120(26)- 131(37)
JaLC DOI	10.14991/001.19870601-0026
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19870601-0026

「三田学会雑誌」80巻2号（1987年6月）

2階級フォン・ノイマンモデルについて*

——線形計画法と不動点定理の応用——

細 田 衛 士

1. はじめに

フォン・ノイマン成長モデルには，多くの一般化が存在する。森嶋〔6, 7, 8〕は，資本家と労働者の消費をモデルに導入した。彼は〔8〕において，労働者の貯蓄も考慮している。しかしながら，彼は，どの財の消費も恒等的にはゼロにならないという強い仮定を採用しているのである。つまり，どのような財であっても，ある価格のもとでは必ず消費の対象となるというのである。ノイマンモデルがスクラップされるような財や，仕掛け品なども明示的に含んでいることを考えると，この仮定は強いと言わざるを得ない。サルバドーリ〔10〕は双補性定理を用いて，ある特定の場合にこの困難性を克服した。彼の解決法は，数学的にはエレガントではあるが，資本家と労働者が同一の消費バスケットを持つという強い仮定に服している。本稿の目的は，たとえ資本家と労働者が消費財を異なる比率で消費すると仮定しても，ほぼ同一の結論が得られることを示すことにある。

最近の研究では，本稿の内容はより一般化されることが知られており（例えば，Bidard & Franke〔2〕，Bidard & Hosoda〔3〕をみよ），その意味で本稿はいささか古くなったと言わざるを得ない。しかしながら，線形計画法と不動点定理の組合わせが経済問題を解こうとするとき依然強力な武器となりうることを，本稿は明確に示していると言う点で興味深いと思われるのである。

2. 基本的な仮定

我々が採用する仮定は，サルバドーリのものとほぼ同一なので，詳細することはせず，簡単に述

注（*） この論文は，私が1983年から1985年までマンチェスター大学に留学した際に行なった研究の一部である。論文の冒頭に述べたとおり，ここでの主要定理は全く異なった手法を用いて証明でき，また，若干の一般化も可能である。これらの結果は，Bidard and Hosoda〔3〕に見られるので，参照されたい。本稿作成に当り，イアン・スティードマン教授（マンチェスター大学），クリスチャン・ビダール教授（パリ第十大学），ネリ・サルバドーリ教授（カターニャ大学）より有益なコメントを頂いたので，ここに感謝の意を表す。また，数学的な点について故渡部隆一先生より貴重なアドバイスを頂いた。心よりの感謝の意を表すとともに，御冥福をお祈りする。

べるだけにとどめる。

ここで我々が興味を持つのは，フォン・ノイマン成長モデルの森嶋版（[8]，Chap. VI, VII を見よ）とも言うべきもので，そこでは，人々は資本家と労働者の二つの階級に分かれると想定される。資本家階級の所得は，専ら利潤のみによるものとされ，労働者階級の所得は，賃金と利潤からなるものとする。どの生産プロセス（例えば第 i 番目のプロセス）も一単位の操業水準で生産を行なう時，$(a_{i1}, a_{i2}, \cdots\cdots, a_{in}, l_i)$ で表現される非負(1)の財及び労働を用いて，$(b_{i1}, b_{i2}, \cdots\cdots, b_{in})$ で表現される非負量の財を産出するものとする。

更に，我々は以下のことを仮定する。

A 1　どのプロセスも少なくともひとつの財を投入する。

A 2　全ての財は生産可能である。すなわち，どの財についても少なくとも一つその財を生産するプロセスがある。

A 3　どのプロセスも正の労働を用いる。

ここで触れておかなければならないことは，A 3 の仮定はサルバドーリ（あるいは森嶋）の労働投入に対する仮定よりも，若干強いということである。後でわかるように，A 3 の仮定は重要である。我々は，しかし，この仮定がそれほど有害であるとは，みなさない。

A 4　労働者の貯蓄性向は s_w で表わされ，$0 \leqq s_w < 1$ を満たす。

A 5　資本家の貯蓄性向は s_c で表わされ，$s_w < s_c \leqq 1$ を満たす。

A 6　外生的に与えられた労働力の成長率 $\rho - 1$ は正であり，且つまた，次の式を満たす非負ベクトル $(x_1, \cdots\cdots, x_m)$ の存在を保証するほどの高さである。

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij} x_i > \{(\rho - 1 + s_c)/s_c\} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \quad (j = 1, \cdots\cdots, n)$$

A 7　資本家及び労働者は，彼等の得る所得一単位に対してそれぞれ $f(y), g(y)$ で表わされる財バスケットを消費するものとし，$f(y)$，$g(y)$ は次のように表わされるものとする。

$$f(y) = \frac{1 - s_c}{q'y} q \qquad \text{and} \qquad g(x) = \frac{1 - s_w}{c'y} c$$

ここで $q = (q_1, \cdots\cdots, q_n)'$ 及び $c = (c_1, \cdots\cdots, c_n)'$ であり q, c は半正のベクトルを表わす。更に $c_i = 0$ の時，またその時にかぎり $q_i = 0$ であるとする。（y は価格を表わす。）

注（1）　我々は，ベクトルとベクトル不等式について，以下のものを採用する。$x = (x_1, \cdots\cdots, x_m)$，$y = (y_1, \cdots\cdots, y_m)$ とするとき，すべての i について $x_i \geqq y_i$ ならば $x \geqq y$ と記し，$x_i > y_i$ ならば $x > y$ と記し，$x \geqq y$ で $x \neq y$ のとき $x \geq y$ と記す。ここで，x' は x を転値したものである。$x > 0$，$x \geq 0$，$x \geqq 0$ に応じて，x を正，半正，非負のベクトルと呼ぶ。

仮定A７の意味することは，資本家と労働者は同じ種類の財を消費するが，異なった比率で消費することがありうるということである。$q=c$ とおけば，勿論サルバドーリの場合になる。この意味で我々の仮定は，サルバドーリの仮定よりもゆるいということができる。これよりも一般的な場合には，均衡点の存在しない場合のあることがサルバドーリによって示されている。（[10]を見よ。）

フォン・ノイマン＝森嶋＝サルバドーリの不等式体系を表現するために，以下のような記号を用いる。

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}\cdots a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11}\cdots b_{1n} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ b_{m1}\cdots b_{mn} \end{pmatrix}$$

$L=(l_1, \cdots\cdots, l_n)'$

$x=(x_1, \cdots\cdots, x_m)'$：アクティビティーベクトル

$y=(y_1, \cdots\cdots, y_n)'$：価格ベクトル

Ω：賃金率　α：成長率ファクター（1＋成長率）　β：利子率ファクター（1＋利子率）

この時，我々は基本的な不等式体系を次のように表わすことができる。

(1)　$By \leqq \beta(Ay+\Omega L)$

(2)　$x'By=\beta(x'Ay+\Omega x'L)$

(3)　$x'B \geqq \alpha x'A+\alpha\Omega x'L\{s_c/(s_c-s_w)\}\{(1-s_w)/c'y\}c'$
$+[\{(\beta-1)-\alpha s_w/(s_c-s_w)\}\Omega x'L+(\beta-1)x'Ay]\{(1-s_c)/q'y\}q'$

(4)　$x'By=\{\alpha+(\beta-1)(1-s_c)\}(\Omega x'L+x'Ay)$

(5)　$x'By>0$

(6)　$\alpha=\rho$

(7)　$x \geqq 0 \quad y \geqq 0 \quad e'x \overset{(2)}{=} 1 \quad e'y=1 \quad \Omega \geqq 0$

サルバドーリは，$e'x=1$ という正規化を採用していないが，ここではこれを用いる。(1)—(7)の体系は，x について同次の体系であるから，この正規化は自然である。

3.　不等式体系の転形

この節では，(1)—(7)の不等式体系を扱いやすいように転形する。まず第一に，サルバドーリと同様に，(1)—(7)からΩを落とすことができる。即ち，(1)—(7)は，以下の不等式体系が解を持つとき，またその時にかぎり解を持つ。

(8)　$(B-\beta A)y \leqq L$

(9)　$x'(B-\beta A)y=x'L$

注（２）　列ベクトルeは，すべての要素が１のベクトルを表わしている。

(10) $x'(B-\alpha A)\geqq(\alpha/\beta)x'L\{s_c(1-s_w)/(s_c-s_w)c'y\}c'$
$$+[\{(\beta-1)-\alpha s_w/(s_c-s_w)\}(x'L/\beta)+(\beta-1)x'Ay]\{(1-s_c)/q'y\}q'$$

(11) $(\alpha-1)=s_c(\beta-1)$

(12) $x'By>0$

(13) $\alpha=\rho$

(14) $y\geqq 0 \quad y\geqq 0 \quad e'x=1$

実際，(1)—(7)が $(x^*, y^*, \alpha^*, \beta^*, \Omega^*)$ なる解を持つとする。このときサルバドーリが示したように（[10], p. 56），Ω^* はゼロとはならない。さもなければ(1)より

$$(B-\beta^* A)y^*\leqq 0 \quad y^*\geq 0$$

が成立し，これは，さらに次の不等式が非負解を持ち得ないことを意味する。

$$x'[B-\{(\rho-1)/s_c+1\}A]>0.$$

(Gale〔4〕, Theorem 2.10, p. 49を見よ。) 然し乍ら，これは，A 6に矛盾する。よって，$y^{**}=(1/\beta^*\Omega^*)y^*$ とおけば，$(x^*, y^{**}, \alpha^*, \beta^*)$ は(8)—(14)の解となる。

逆に，$(x^{**}, y^{**}, \alpha^{**}, \beta^{**})$ が(8)—(14)の解としよう。この時，$y^*=(1/e'y^{**})$，$\Omega^*=1/\beta^{**}e'y^{**}$ とおけば，$(x^{**}, y^*, \alpha^{**}, \beta^{**}, \Omega^*)$ は，(8)—(14)の解になるのである。

更に，我々は，(12)を省くことができる。仮に $x'By=0$ が成立するとすると，(9)より $x'L=0$ を得る。然し，L は正のベクトル x' は半正のベクトルであるから，これは矛盾である。

従って，(8)—(14)は次のように書くことができる。

(15) $[B-\{(\rho-1)/s_c+1\}A]y\leqq L$

(16) $x'[B-\{(\rho-1)/s_c+1\}A]y=x'L$

(17) $x'[B-\{(\rho-1)/s_c+1\}A]\geqq\{\rho s_c/(\rho-1+s_c)\}x'L\{s_c(1-s_w)/(s_c-s_w)c'y\}c'$
$$+[\{(\rho-1)/s_c-\rho s_w/(s_c-s_w)\}\{s_c/(\rho-1+s_c)\}x'L$$
$$+\{(\rho-1)/s_c\}x'Ay](1-s_c)(1/q'y)q'-\{(\rho-1)(1-s_c)/s_c\}x'A$$

(18) $x\geqq 0 \quad y\geqq 0 \quad e'x=1$

従って，我々の目的は，(15)—(18)の体系が解を持つことを示すことにある。この目的のために，次のような補助的な不等式体系を考えることにする。

(19) $[B-\{(\rho-1)/s_c+1\}A]v\leqq L$

(20) $u'[B-\{(\rho-1)/s_c+1\}A]v=u'L$

(21) $u'[B-\{(\rho-1)/s_c+1\}A]\geqq\{\rho s_c/(\rho-1+s_c)\}x'L\{s_c(1-s_w)/(s_c-s_w)\}zc'$
$$+[\{(\rho-1)/s_c-\rho s_w/(s_c-s_w)\}\{s_c/(\rho-1+s_c)\}x'L$$
$$+\{(\rho-1)/s_c\}x'Ay](1-s_c)q'-\{(\rho-1)(1-s_c)/s_c\}x'A(q'y)$$

(22) $u\geqq 0 \quad v\geqq 0 \quad x\geqq 0 \quad y\geqq 0 \quad e'x=1$

ここで，$z=q'y/c'y\equiv\phi(y)$ である。若し(19)—(22)を満たす非負の (x, y, u, v) があり，これらが $v=y$，$q'v\neq0$，$x=u/q'v$ を満足するならば，この (x, y) は(15)—(18)を満たすことになるから，これは，もとの体系の解になっていることがわかる。さて M_z (x, y) を次のように定義しよう。

$$
\begin{aligned}
&M_z(x, y)\equiv\\
&\quad\{\rho s_c/(\rho-1+s_c)\}x'L\{s_c(1-s_w)/(s_c-s_w)\}zc'\\
&\quad+[\{(\rho-1)/s_c-\rho s_w/(s_c-s_w)\}\{s_c/(\rho-1+s_c)\}x'L+\{(\rho-1)/s_c\}x'Ay](1-s_c)q'\\
&\quad-\{(\rho-1)(1-s_c)/s_c\}x'A(q'y)
\end{aligned}
$$

ここで $z=\phi(y)$ である。我々は，$M_z(x, y)$ にまず $(\bar{x}, \bar{y})$ を振り当てる。この $(\bar{x}, \bar{y})$ の候補としては，直積 $X\times Y$ から選ぶものとする。ここで，$X=\{x\,|\,e'x=1,\ x\geqq0\}$ であり，$Y=\{y\,|\,[B-\{(\rho-1)/s_c+1\}A]y\leqq L, y\geqq0\}$ である。直積 $X\times Y$ は非空，凸，そしてコンパクトであることがわかる。実際，非空性，凸性は明らかであろう。Xのコンパクト性もただちにわかる。Yの閉性は自明であるから，結局Yの有界性をいえばよい。仮定A 6より

(23) $x'[B-\{(\rho-1)/s_c+1\}A]\geqq e'$

は実現可能（feasible）である。従って，

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } e'y \quad \text{subject to (15) and } y\geqq0\\
&\text{Min } x'L \quad \text{subject to (23) and } x\geqq0
\end{aligned}
$$

は，最適解をもつ。(Gale〔4〕, Theorem 3.1, p.78)。これは，Y が有界であることを示している。ここで，我々は，$\phi=q'y/c'y$ に伴うやっかいな問題を回避しなければならない。もし，$c'y$ がゼロならば，$\phi(0)=0/0$ は無意味となる。しかし，$\phi(y)$ から次のような対応を作ることができる。

$$
\Phi(y)=\begin{cases}\{z\,|\,z=\phi(y)\} & \text{if } c'y\neq0\\[2ex] \{z\,|\,\min\limits_{i\in I}(q_i/c_i)\leqq z\leqq\max\limits_{i\in I}(q_i/c_i)\} & \text{if } c'y=0\end{cases}
$$

ここで，Iは，$I\equiv\{i\,|\,c_i\neq0\}$ と定義される。次に，Gを

$$
G\equiv\{(y, z)\,|\,z\in\Phi(y),\ y\in Y\}
$$

と定義すると，Gは有界かつ閉，即ちコンパクトである。

さて，$X\times Y$ から取った $(\bar{x}, \bar{y})$ を $M_z(x, y)$ に振り当てる時，もし $c'\bar{y}\neq0$ ならばzの価も一通りに決まり，これを M_z に振り当てられる。もし，$c'\bar{y}=0$ だとしよう。このとき，zの価は一通りには決まらないが，$\Phi(\bar{y})$ からzを選び，この組合わせの $(\bar{x}, \bar{y}, z)$ を M_z (x, y) に振り当てることができる。

一旦 $(\bar{x}, \bar{y})$ と $z \epsilon \Phi(\bar{y})$ を $M_z(x, y)$ に振り当てると，我々は，次の線形計画問題を考えることができる。

$$(P) \qquad \text{Max}\, M_z(\bar{x}, \bar{y})v \quad \text{st}\, [B-\{(\rho-1)/s_c+1\}A]v \leqq L \quad v \geqq 0$$
$$(D) \qquad \text{Min}\, u'L \qquad \text{st}\, u'[B-\{(\rho-1)/s_c+1\}] \geqq M_z(\bar{x}, \bar{y}) \quad u \geqq 0$$

$v=0$ は，(P)の制約式を満たすから，(P)は実現可能 (feasible) である。また，A 6により，双対問題も実現可能である。よって，(P)も(D)も最適解をもつ。言うまでもなく，この最適解は $(\bar{x}, \bar{y})$ に依存している。しかし，たとえ $(\bar{x}, \bar{y})$ が固定されているとしても，もし $c'\bar{y}=0$ が成り立っているならば，各 $z \epsilon \Phi(\bar{y})$ に対応して最適解が得られることをわすれてはならない。

4. 均衡解の存在

この節において，我々は均衡解の存在証明をおこなう。この目的のために，いくつかの補助命題を証明する。

補助定理 1　$M_z(\bar{x}, \bar{y})$ はゼロではない。また，v^* と u^* がそれぞれ(P)と(D)の解とすると，$u^* \neq 0$, $q'v^* \neq 0$ (従って $c'v^* \neq 0$) が成り立つ。

証明　いま，$q'\bar{y} \neq 0$ とすると，$\bar{x}$ は半正，Lは正のベクトルであるから，

$$M_z(\bar{x}, \bar{y}) = q'\bar{y} \cdot \bar{x}'L > 0$$

が成り立つ。次に，$q'\bar{y} = c'\bar{y} = 0$ としよう。我々は，どんな $z \epsilon \Phi(\bar{y})$ についても，

$$0 < z = (q'y^0)/(c'y^0) \quad (c'y^0 \neq 0)$$

となるような，半正のベクトル y^0 を見出すことができる。よって，

$$M_z(\bar{x}, \bar{y})y^0 = q'y^0 + \bar{x}'L + \{(\rho-1)(1-s_c)/s_c\}\bar{x}'A\bar{y}(q'y^0) > 0$$

が成り立つ。よって，いずれにしても，$M_z(\bar{x}, \bar{y})$ は，非ゼロである。

次に，$q'v^*(=c'v^*)=0$ としよう。当然，$M_z(\bar{x}, \bar{y})v^*=0$ となるが，$M_z(\bar{x}, \bar{y})v^*=u^*L$ であるから，u^* はゼロとならざるを得ない。然し，(D)より

$$u^{*\prime}[B-\{(\rho-1)/s_c+1\}A]\bar{y} \geqq M_z(\bar{x}, \bar{y})\bar{y} > 0 \quad \text{if } q'\bar{y} \neq 0$$
$$u^{*\prime}[B-\{(\rho-1)/s_c+1\}A]y^0 \geqq M_z(\bar{x}, \bar{y})y^0 > 0 \quad \text{if } q'y^0 \neq 0$$

が成立し，これは矛盾である。よって，$u^*\neq 0$，従って $q'v^*\neq 0$ である。（証明終了）

既に説明したように，一旦 $X\times Y$ から $(\bar{x},\bar{y})$ を取り出せば，それに対応して最適解の集合が得られる。(P)に対するいかなる最適解も，作り方からYに属する。更に，我々は，R^m 上のあるコンパクト集合を作って，(D)のすべての最適解をそれに属せしめることが，以下のように示せる。

$x'l$も$x'Ay$もコンパクト集合 $X\times Y$ で定義された連続関数であり，$\Phi(Y)$は有界であるから，以下のようなベクトル$\overline{M}$が存在する。

$$\overline{M}\geqq M_z(x,y) \quad \text{for all } (x,y)\in X\times Y \quad \text{and for all } z\in\Phi(y).$$

線形計画問題

$$\text{Max } \overline{M}v \quad \text{subject to } [B-\{(\rho-1)/s_c+1\}A]v\leqq L \quad v\geqq 0$$
$$\text{Min } u'L \quad \text{subject to } u'\{B-\{(\rho-1)/s_c+1\}A]\geqq \overline{M} \quad u\geqq 0$$

は，どちらの問題も実現可能（feasible）であるから，最適解を持つ。最適解をそれぞれ u^{**}, v^{**}と書けば，

$$\overline{M}v^{**}=u^{**\prime}L(\equiv k)$$

となる。ベクトルwを次のように定義しよう。

$$w\equiv(\underset{i=1\cdots\cdots n}{\text{Max}}\ k/l_i)e$$

作り方より，(D)のどのような最適解u^*についても，$u^*\leqq w$ が成り立つ。実際，$u_j^*>w_j$ がある j について成り立つとすると，

$$u_j^*l_j>(\underset{i}{\text{Max}}\ k/l_i)l_j\geqq(k/l_j)l_j=k$$

が成立する。従って，我々は，

$$M_z(\bar{x},\bar{y})v^*=u'L^*>k=\overline{M}v^{**}\geqq\overline{M}v^*$$

を得るが，これは $M_z(\bar{x},\bar{y})\leqq\overline{M}$ に矛盾する。よって，$u^*\leqq w$ が成り立つ。

さて，次のような定義を採用することにしよう。

$$W\equiv\{u\,|\,0\leqq u\leqq w\}$$
$$U(\bar{x},\bar{y})\equiv\{u\,|\,u \text{ は}(D)\text{の解。}\}$$
$$V(\bar{x},\bar{y})\equiv\{v\,|\,v \text{ は}(P)\text{の解。}\}$$

このとき，

$$U(\bar{x},\bar{y})\subset W,\ V(\bar{x},\bar{y})\subset Y \quad \text{for all } (\bar{x},\bar{y})\epsilon X\times Y \text{ and for all } z\epsilon\Phi(\bar{y})$$

が，成り立っている。

補助定理 2　$X\times Y$ における点列 (x^k, y^k) と $W\times Y$ における点列 (u^k, v^k) がそれぞれ $(\bar{x},\bar{y})$ 及び $(\bar{u},\bar{v})$ に収束するとし，かつ $(u^k, v^k)\epsilon U(x^k, y^k)\times V(x^k, y^k)$, を満足しているとする。このとき，$(u^k, v^k)$ に対応して $\Phi(y^k)$ から z^k を選んで作った点列 (z^k) は収束する。

証明　Gはコンパクトであるから，部分列 (x^q, y^q) を選んで，それに対応する部分列 (z^q) が $\bar{z}$ に収束するようにすることができる。(x^k, y^k) と (u^k, v^k) は収束点列であるからその部分列も同じ極限 $(\bar{x},\bar{y})$, $(\bar{u},\bar{v})$ にそれぞれ収束する。$M(x^q, y^q)$（ここでMの添字を省略する）は，(z^q) が収束するから，同じく収束する。さて

$$M(x^q, y^q)v^q=(u^k)'L$$
$$[B-\{(\rho-1)/s_c+1\}A]v^q\leqq L$$
$$(u^k)'[B-\{(\rho-1)/s_c+1\}A]\geqq M(x^q, y^q)$$

がすべての $q\epsilon N$（自然数の集合）について成り立つから，これらの式は極限においても成り立つ。更に，前の補助定理の証明におけると同じように，$q'\bar{v}\neq 0\neq c'\bar{v}$ が示せる。

さて，(z^k) に二つの部分列があって，それぞれ極限 z_1, z_2 に収束したとしよう。このとき，

$$M_{z_1}(\bar{x},\bar{y})\bar{v}=\bar{u}'L=M_{z_2}(\bar{x},\bar{y})\bar{v}$$

が成立するから，我々は，

$$(\alpha/\beta)\bar{x}'L\{s_c(1-s_w)/(s_c-s_w)\}c'\bar{v}z_1=(\alpha/\beta)\bar{x}'L\{s_c(1-s_w)/(s_c-s_w)\}c'\bar{v}z_2$$

を得る。$c'\bar{v}\neq 0, \bar{x}'L\neq 0$ が成り立つから，これは $z_1=z_2$ を意味している。従って，(z^k) のすべての収束部分列は，同一の極限に収束するが，Gはコンパクトであるから，これは，もとの点列 (z^k) が収束することを意味している。（証明終了）

以上のことをもとに，我々は次の定理を証明できる。

定理 1　$U(x, y)\times V(x, y)$ はすべての $(x, y)\epsilon X\times Y$ について非空，凸である。さらに，対応 $U\times V$: $X\times Y\rightarrow W\times Y$ は，優半連続である。

証明　初めの二つの性質は，明らかである。$(x^k, y^k)\epsilon X\times Y, (u^k, v^k)\epsilon W\times Y$ なる点列がそれぞれ $(\bar{x},\bar{y}),(\bar{u},\bar{v})$ に収束し，更に，$(u^k, v^k)\ \epsilon U(x^k, y^k)\times V(x^k, y^k)$ がすべての k について成

り立つものとする。このとき,

$$M(x^k, y^k)v^k=(u^k)'L$$
$$[B-\{(\rho-1)/s_c+1\}A]v^k\leqq L$$
$$(u^k)'[B-\{(\rho-1)/s_c+1\}A]\geqq M(x^k, y^k)$$

が全ての k について成り立つ。補助定理2により $M(x^k, y^k)$ は収束するから,上の式は極限でも成り立つ。従って,

$$(\bar{u}, \bar{v})\epsilon U(\bar{x}, \bar{y})\times V(\bar{x}, \bar{y})$$

が成り立ち,これは $U\times V$ が優半連続であることをしめしている。 (証明終了)

$U(X, Y)\times V(X, Y)$ はコンパクトであるから,$V(X, Y)$ もコンパクトである(Berge〔1〕, Theorem 3, p. 10)。よって,$1/q'v$ は $V(X, Y)$ 上で最大値をとる。($v\epsilon V(X, Y)$ については $q'v\neq 0$ である。)その最大値を h と記し,次のようにHを定義する。

$$H\equiv\{x|0\leqq x\leqq hw\}$$

更に,我々は次の定義を用いる。

$$T_x(\bar{x}, \bar{y})\equiv\{x|x=u/q'v, u\epsilon U(\bar{x}, \bar{y})\ \&\ v\epsilon V(\bar{x}, \bar{y})\}$$

簡単にわかるように,$T_x(\bar{x}, \bar{y})\subset H$ が全ての $(\bar{x}, \bar{y})\epsilon X\times Y$ にたいして成り立つ。

補助定理 3 $T_x(x, y)\times V(x, y)$ は,すべての $(x, y)\epsilon X\times Y$ に対して非空,凸である。また,$T_x\times V$: $X\times Y\to H\times Y$ は優半連続な対応である。

証明 非空性は明らかである。

(凸性の証明) いま $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ が $T_x(x, y)\times V(x, y)$ に属しているとしよう。$\tau\epsilon[0, 1]$ に対して,$\tau(x_1, y_1)+(1-\tau)(x_2, y_2)$ を考える。明らかに,$\tau y_1+(1-\tau)y_2\epsilon V(x, y)$ である。さて,

$$x_3\equiv\tau x_1+(1-\tau)x_2=\tau(u_1/q'v_1)+(1+\tau)(u_2/q'v_2)$$

(ここで,$u_1, u_2\epsilon U(x, y), v_1, v_2\epsilon V(x, y)$ である。)

この時,$\mu\epsilon[0, 1]$ なるすべての μ について次の式が成り立つ。

(24) $$x_3=\left[\left(\frac{\dfrac{\tau}{q'v_1}}{\mu q'v_1+(1-\mu)q'v_2}\right)u_1+\left(\frac{\dfrac{(1-\tau)}{q'v_2}}{\mu q'v_1+(1-\mu)q'v_2}\right)u_2\right]\times\frac{1}{\mu q'v_1+(1-\mu)q'v_2}$$

一般性を失うことなく，$q'v_1 \leqq q'v_2$ と仮定できる。ここで，u_1 と u_2 の係数の和は

$$\{\mu q'v_1+(1-\mu)q'v_2\}[\tau/q'v_1+(1-\tau)/q'v_2] \tag{25}$$

となるが，これは μ がゼロのとき1より小さくなく，μ が1のとき1より大きくない。しかも(25)は μ について連続であるから，我々は，(25)の価を1とするような μ_0 を持つ。μ_0 を(24)に代入すると，次のように x_3 を表現できる。

$$x_3=\{\gamma u_1+(1-\gamma)u_2\}/q'\{\mu_0 v_1+(1-\mu_0)v_2\} \quad \gamma\epsilon[0,1]$$

$U(x,y)$, $V(x,y)$ 共に凸であるから，上の分子は $U(x,y)$ に属し，$\mu_0 v_1+(1-\mu_0)v_2$ は $V(x,y)$ に属する。よって，x_3 も $T_x(x,y)$ に属する。

（優半連続性の証明）対応 $U\times V: X\times Y\to U(X,Y)\times V(X,Y)\subset W\times Y$ を考える。これは，優半連続である。写像 $\sigma: U(X,Y)\times V(X,Y)\to H$, を $\sigma\equiv u/q'v$ で定義し，π_v を $U(X,Y)\times V(X,Y)$ から $V(X,Y)$ への写影としよう。σ 及び π_v は，$U(X,Y)\times V(X,Y)$ 上で連続である。我々は，$T_x\times V$ を次のような合成写像とみなすことができる。

$$T_x\times V=\{\sigma\circ(U\times V)\}\times\{\pi_v\circ(U\times V)\}$$

従って，$T_x\times V$ は，優半連続である。(Berge[1], Theorem 1′, 4′, pp. 113-114)　（証明終了）

最後に，我々は T_x^* とTを次のように定義する。

$$T_x^*(x,y)\equiv\{p\,|\,p=x_0/e'x_0 \quad x_0\epsilon T_x(x,y)\}$$
$$T(x,y)\equiv T_x^*(x,y)\times V(x,y)$$

定理 2　$T(x,y)$ は，すべての $(x,y)\epsilon X\times Y$ にたいして非空かつ凸である。更に，$T: X\times Y\to X\times Y$ は優半連続な対応である。

証明　非空性は明らかである。

（凸性の証明）$T_x^*(x,y)$ の凸性を言えばよい。p_1, p_2 が T_x^* に属するとし，$p_1\neq p_2$ とする。この時，

$$p_3\equiv\tau p_1+(1-\tau)p_2 \qquad \tau\epsilon[0,1]$$

を考える。$T_x(x,y)$ に属し，かつ $p_1=x_1/e'x_1$ と $p_2=x_2/e'x_2$ を満たすような x_1 と x_2 が存在する。$T_x(x,y)$ の凸性を証明した時と同じように，我々は，$\mu\epsilon[0,1]$ が存在して，次の式の角がっこの中の x_1 と x_2 の係数の和が1に等しいようにできる。

$$p_3 \equiv \left[\left(\frac{\tau}{\dfrac{e'x_1}{\mu e'x_1+(1-\mu)e'x_2}}\right)x_1+\left(\frac{(1-\tau)}{\dfrac{e'x_2}{\mu e'x_1+(1-\mu)e'x_2}}\right)x_2\right]\times\frac{1}{\mu e'x_1+(1-\mu)e'x_2}$$

更に，簡単な計算をすれば x_1 と x_2 の係数はそれぞれ $\mu, (1-\mu)$ に等しいことがわかる。そこで，我々は，次の式を得る。

$$p_3=[\mu x_1+(1-\mu)x_2]/e'\{\mu x_1+(1-\mu)x_2\} \quad \mu\epsilon[0,1]$$

$\mu x_1+(1-\mu)x_2$ は，$T_x(x, y)$ に属するから，p_3 は $T_x^*(x, y)$ に属する。

（優半連続性の証明）我々は，Tを $T_x\times V$ と $\phi\times\pi_v$ との合成写像とみなすことができる。ここで，$T_x\times V$ の値域は $T_x(X, Y)\times V(X, Y)\subset H\times \boldsymbol{Y}$ と考えられ，ϕ は $\phi(x)\equiv x/e'x$ によって定義される。$T_x(X, Y)$ 上で $x\neq 0$ であるから，ϕ は $T_x(X, Y)$ 上で連続である。従って，

$$T=(\phi\times\pi_v)\circ(T_x\times V)$$

は，優半連続である。（証明終了）

定理 3　(15)—(18)に，従って(1)—(7)に解が存在する。

証明　定理２より，角谷の不動点定理が適用されて，$(p^*, y^*)\epsilon X\times Y$ が存在して，$(p^*, y^*)\epsilon T(p^*, y^*)$ となることがわかる。定義により，$x^{**}\epsilon T_x(p^*, y^*)$ が存在して，$p^*=x^{**}/e'x^{**}$が成立する。更に，$x^{**}=u^*/q'v^*$ なる $(u^*, v^*)\epsilon U(p^*, y^*)$ も存在することがわかる。この時，次の式が成り立つことに注目しよう。

$$p^*=x^{**}/e'x^{**}=(u^*/q'v^*)(q'v^*/e'u^*)=u^*/e'u^*$$

次に，x^* を以下のように定義する。

$$x^*\equiv u^*/q'y^*$$

この時，我々は

$$x^*/e'x^*=u^*/e'u^*=p^*$$

を得る。従って，次の式が成立する。

(26) $$[B-\{(\rho-1)/s_c+1\}A]y^*\leqq L$$

(27) $$(q'y^*)(x^*)'[B-\{(\rho-1)/s_c+1\}A]\geqq M_{z^*}(x^*/e'x^*, y^*)$$

(28) $$(q'y^*)(x^*)'L=M_{z^*}(x^*/e'x^*, y^*)y^*$$

ここで，$z^*=q'y^*/c'y^*$ である。(28)の右辺は $(q'y^*)(x^*/e'x^*)'L$ に等しいから，結局 $e'x^*=1$ と

なる。これは，(x^*, y^*) が(15)—(18)の解であることを示している。　　　　　　　　　　（証明終了）

5. おわりに

我々は，フォン・ノイマン—森嶋—サルバドーリ型成長モデルにおいて，どのような価格のもとでも消費されないような財があるとき（資本財がこれに相当する），たとえ資本家と労働者が消費財を異なった比率で消費しようとも，均衡解が存在することを示した。このふたつの階級の相違は，単に貯蓄率のみだけではなく，消費財バスケットの比率にも反映すると考えるのは，自然であろう。従って，我々の仮定は，サルバドーリのものよりも好ましいと思われる。

然し乍ら，我々の結論は，彼の結論の完全な一般化とはなっていないことに注意すべきである。労働投入に対するここで採用した仮定は，サルバドーリのものよりも若干きついのである。この仮定を弱められるか否かは，数学的に微妙な問題であるように思われる。

〔参考文献〕

〔1〕 Berge, C.,(1963), *Topological Spaces,* (translated by E. M. Patterson), Oliver & Boyd, Edinburgh and London.

〔2〕 Bidard, C. and R. Franke, (1985), "On the Existence of Long-term Equilibria in the Tow-class Pasinetti-Morishima Model", *Ricersche Economische* に近刊.

〔3〕 Bidard, C. and E. Hosoda, (1985), "On Consumption Baskets in a Generarized von Neumann Model", *International Economic Review* (July, 1987) に近刊.

〔4〕 Gale, D., (1960), *The Theory of Linear Economics,* McGraw-Hills, New York.

〔5〕 Koopmans, T. C., ed., (1951), *Activity Analysis of Production and Allocation,* John Wiley & Sons Inc, New York.

〔6〕 Morishima, M., (1960), "Economic Expansion and the Interest Rate in a Generalized von Neumann Model", *Econometrica,* XXVIII, April, pp. 352–363.

〔7〕 ————, (1964), *Equilibrium, Stability and Growth,* Oxford University Press, London.

〔8〕 ————, (1969), *Theory of Economic Growth,* Oxford University Press, London.

〔9〕 Otsuki, M. and H. Haga, (1965), "On a Generalized von Neumann Model", *International Economic Review,* Vol. 6, No. 1, pp. 115–123.

〔10〕 Salvadori, N., (1980), "On a Generalized von Neumann Model", *Metroeconomica,* Vol. XXXII, pp. 51–62.

〔11〕 von Neumann, J., (1945–46), "A Model of General Economic Equilibrium", *Review of Economic Studies,* XIII, pp. 1–9.

（経済学部助教授）