Title	貨幣的重複世代モデルにおける競争均衡の存在について
Sub Title	On the existence of competitive equilibrium in a monetary overlapping-generations model
Author	福岡, 正夫 須田, 伸一
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1987
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.80, No.2 (1987. 6) ,p.95(1)- 107(13)
JaLC DOI	10.14991/001.19870601-0001
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19870601-0001

「三田学会雑誌」 80巻2号（1987年6月）

貨幣的重複世代モデルにおける競争均衡の存在について

福岡正夫
須田伸一

1　本稿は貨幣が用いられている重複世代モデルにおいて競争均衡が存在しうることを証明しようとする試みで，筆者の1人がすでに他の機会に発表した論文[(1)]の多数財モデルへの一般化を目ざしている。それはまた，同種のモデルに即して競争均衡が最適性を満たしうることを示した筆者たちの共同論文「貨幣と重複世代モデル[(2)]」の内容を空虚ならしめないための companion piece であるとも考えられよう。

2　モデルは上記共同論文がもとづくものとほぼ同じであるから，詳論は避け，以下の推論に最小限必要とされる限度での再述にとどめることにしよう。

まず経済は第1期に始まり，以降将来に向かって限りなく継起的に進行していく。各期 t ($t=1, 2, \ldots\ldots$) の取引主体は，その期の期首に生まれ，もう1期生き延びる「若年期」の個人1人と，その期に後半生を迎え，期末に死滅する「老年期」の個人1人とから成り，取引はもっぱらそれら2個人のあいだで行われうるにすぎない。実物的な財は n 種類あり，各個人には毎期首それらの財の一定の組合わせが初期賦存量として与えられる。これらはみな perishable で，次期に持越すことは不可能であるが，他方その社会にはそれ自体効用をもたない代りに来期の購買力として持越しうる名目貨幣の一定量があり，それが2期間にわたる各個人の消費を最適化する上での手段として利用される。市場の仕組みとしては，今期の交換のための現物市場のみが毎期開かれ，「若年期」の個人は余分の実物財をそこで貨幣と交換して，その貨幣を自分が「老年期」になったときの所得の不足分に充当する。取引にさいしてはどの個人も来期の価格を完全に予見することができ，したがって現実価格と予想価格との乖離の現象は生じない。

さて上記のモデル構造は，つぎのような数学的記号の導入をつうじて，いっそう精確に定式化さ

注（1） Shinichi Suda, “Existence of Monetary Competitive Equilibrium in the Overlapping-Generations Model”, presented at the KERP Conference January 15-16, 1987.
（2） 本誌，1987年4月号所載。

れよう。まず各世代の個人 t の消費可能集合を $X_0=R^n_+$ $(t=0)$ あるいは $X_t=R^{2n}_+$ $(t=1,2,\cdots\cdots)$ で記し，どの個人 t $(t=0,1,\cdots\cdots)$ についても X_t 上で定義される選好順序は効用関数 $u_t: X_t\to R$ によって表示されるものとする。それらの効用関数 u_t については，つぎの仮定が設けられる。

仮定 1 u_t は X_t 上で連続かつ単調であり，また X_t 内で厳密に擬凹である。

他方，個人 t の初期賦存量ベクトルは $\omega_t=(\omega_t^t,\ \omega_t^{t+1})$ で記され，それらについてはつぎのように仮定される。

仮定 2

$$\omega_0=\omega_0^1\in R^n_+$$
$$\omega_t=(\omega_t^t,\ \omega_t^{t+1})\in R^n_{++}\times R^n_+$$

そのほか世代0の個人は第1期の期首に M (>0) であらわされる貨幣の初期賦存量をもち，それは $t=1,2,\cdots\cdots$ をつうじてつねに一定の大きさに維持されていくとする。

個人 t の財需要量ベクトルは前半期，後半期双方の需要を併せて $x_t=(x_t^t, x_t^{t+1})$ と書かれ，また前半期の貨幣需要量は m_t で，後半期の貨幣供給量は $\overline{m}_t$ で示される。これらの財・貨幣の需給量は各人の効用最大化行動をつうじて決定されるが，それらが整合する各現物市場は時間的に互いに独立であるから，われわれは各期の価格ベクトルを，貨幣の価格がつねに1にひとしくなるように規準化することができる。そこで，そのように規準化された t 期の価格ベクトルを p^t で示すとすれば，各世代の個人の効用最大化プログラムはつぎのように書きあらわされる。

まず世代0の個人は，後半生の需給計画の決定にのみ当面するわけであるから，所与の $p^1\in R^n_{++}$, $\omega_0^1\in R^n_+$ および $M\in R_{++}$ の下で

$$p^1x_0^1\leqq p^1\omega_0^1+\overline{m}_0$$
$$\overline{m}_0\leqq M$$
$$x_0^1\in X_0$$

に服しつつ

$$u_0(x_0^1)$$

の最大化を図り，その結果すべての $p^1\in R^n_{++}$ に対して財の需要関数と貨幣の供給関数

$$x_0^1=f_0^1(p^1)$$
$$\overline{m}_0=f_0^{\overline{m}}(p^1)$$

が一意的に確定される。

他方，世代 t $(t=1,2,\cdots\cdots)$ の個人が当面する効用最大化問題は，所与の $(p^t, p^{t+1})\in R^{2n}_{++}$ および $(\omega_t^t,\omega_t^{t+1})\in R^n_{++}\times R^n_+$ の下で

$$p^tx_t^t+m_t\leqq p^t\omega_t^t$$
$$p^{t+1}x_t^{t+1}\leqq p^{t+1}\omega_t^{t+1}+\overline{m}_t$$
$$\overline{m}_t\leqq m_t$$
$$(x_t^t, x_t^{t+1})\in X_t$$

に服しつつ

$$u_t(x_t^t, x_t^{t+1})$$

を最大化することであり，同様にすべての $(p^t, p^{t+1}) \in R_{++}^{2n}$ に対して財の需要関数と貨幣の需要・供給関数

$$x_t^t = f_t^t(p^t, p^{t+1})$$
$$x_t^{t+1} = f_t^{t+1}(p^t, p^{t+1})$$
$$m_t = f_t^m(p^t, p^{t+1})$$
$$\overline{m}_t = f_t^{\overline{m}}(p^t, p^{t+1})$$

が一意的に導かれる。

財市場と貨幣市場における需給均衡の条件は，それらの需要関数，供給関数を用いて

$$\text{(a)} \quad \begin{aligned} & f_0^1(p^1) + f_1^1(p^1, p^t) = \omega_0^1 + \omega_1^1 \quad \text{for } t=1 \\ & f_{t-1}^t(p^{t-1}, p^t) + f_t^t(p^t, p^{t+1}) = \omega_{t-1}^t + \omega_t^t \quad \text{for } t=2, 3, \cdots\cdots \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad \begin{aligned} & f_0^{\overline{m}}(p^1) = f_1^m(p^1, p^2) \quad \text{for } t=1 \\ & f_{t-1}^{\overline{m}}(p^{t-1}, p^t) = f_t^m(p^t, p^{t+1}) \quad \text{for } t=2, 3, \cdots\cdots \end{aligned}$$

のように書かれ，これらをことごとく満たす財価格の列 $p=(p^1, p^2, \cdots\cdots, p^t, \cdots\cdots) \in \prod_{t=1}^{\infty} R_{++}^n$ が当該経済の競争均衡である。

最後に仮定1の単調性から，各個人の予算制約式が厳密な等式で成立することに注目しておこう。この点を考慮に入れれば，市場均衡の条件(a), (b)が成立するしないにかかわらず

$$f_0^{\overline{m}}(p^1) = M$$
$$f_t^{\overline{m}}(p^t, p^{t+1}) = f_t^m(p^t, p^{t+1}) \quad \text{for } t=1, 2, \cdots\cdots$$

が恒等的に成立することは自明である。よってわれわれは，以下の議論をつうじて f_t^m と $f_t^{\overline{m}}$ を区別して用いる必要はなく，貨幣市場の需給均衡条件としては(b)と等値な

$$\text{(b}'\text{)} \quad f_t^m(p^t, p^{t+1}) = M \quad \text{for } t=1, 2, \cdots\cdots$$

を代置して分析を進めればよいことになる。

3　ここで本来の問題に入り，上記のモデルでの競争均衡の存在証明に着手することにしよう。そのための準備として，まず本節では上記の無限期経済をある有限の t 期までで切断した有限期経済を考え，後者におけるいわゆる t 均衡 (t-equilibrium) の存在を示す。

t 均衡とはつぎのような t 期までの需給均衡条件

$$f_0^1(p^1)+f_1^1(p^1,p^2)=\omega_0^1+\omega_1^1$$
$$f_1^2(p^1,p^2)+f_2^2(p^2,p^3)=\omega_1^2+\omega_2^2$$
$$\vdots$$
$$f_{t-1}^t(p^{t-1},p^t)+f_t^t(p^t,p^{t+1})=\omega_{t-1}^t+\omega_t^t$$
$$f_1^m(p^1,p^2)=M$$
$$\vdots$$
$$f_t^m(p^t,p^{t+1})=M$$

を満たす価格の列 $p=(p^1,p^2,\cdots\cdots,p^t,p^{t+1},\cdots\cdots)$ と定義される[3]。この定義から明らかなように，もし $p=(p^1,p^2,\cdots\cdots,p^t,p^{t+1},\cdots\cdots)$ が t 均衡であるならば

$$p^{s\prime}=p^s \qquad \text{for } s=1,\cdots\cdots,\ t+1$$

を満たすどのような $p'=(p^{1\prime},p^{2\prime},\cdots\cdots,p^{t\prime},p^{t+1\prime},\cdots\cdots)$ もまたすべて t 均衡である。すなわち t 均衡の概念においては，$t+2$ 期以降の価格の成分はまったく不確定であり，$\prod_{s\geqq t+2}R_{++}^n$ からどのような成分をとり出して $p^1,p^2,\cdots\cdots,p^{t+1}$を補足しても問うところではない。

定理 1 仮定1および2が満たされていれば，すべての $t=1,2,\cdots\cdots$について t 均衡が存在する。

証　明

証明は型どおり角谷の不動点定理を用いて行われるので，同定理の枠組みにうまくはまり込むように，価格規準化の方法を適当に変更しておく必要がある。そこで目下の t 期経済における貨幣の価格を $q^{t,m}$ であらわし，$(p^1,p^2,\cdots\cdots,p^{t+1},1)$ を $(q^1,q^2,\cdots\cdots,q^{t+1},q^{t,m})$ とした上で，後者のすべての成分の和が1となるように価格の再規準化を行うことにする。すなわち当面のところ，$t+1$ 期までのすべての価格を $n(t+1)$ 次元の価格シンプレックス

$$\Delta\equiv\left\{(q^1,q^2,\cdots\cdots,q^{t+1},q^{t,m})\in R_+^{n(t+1)}\times R_+\ \middle|\ \sum_{s=1}^{t+1}q^se+q^{t,m}=1\right\}$$

の上で考えていくわけで，ここで $q^s=q^{t,m}p^s$，また e がすべて1の成分から成る n 次元ベクトルであることはいうまでもないであろう。

新しい価格 $q=(q^1,q^2,\cdots\cdots,q^{t+1},q^{t,m})$ の下では，予算制約式は $s=0$ については

$$q^1x_0^1\leqq q^1\omega_0^1+q^{t,m}M$$

$s=1,2,\cdots\cdots,t$ については

$$q^sx_s^s+q^{t,m}m_s\leqq q^s\omega_s^s$$
$$q^{s+1}x_s^{s+1}\leqq q^{s+1}\omega_s^{s+1}+q^{t,m}\,\overline{m}_s$$

と書かれるから，財の需要関数もまたそれぞれ $\varphi_0^1(q^1,q^{t,m}),\varphi_s^s(q^s,q^{s+1},q^{t,m}),\varphi_s^{s+1}(q^s,q^{s+1},q^{t,m})$

注（3）　t 均衡の定義については，Y. Balasko and K. Shell, "The Overlapping-Generations Model, I: The Case of Pure Exchange without Money", *Journal of Economic Theory,* December 1980, p. 289 参照。ただし，われわれのモデルは貨幣を導入しているので，存在証明の手法は彼らとまったく異なっている。

の形で導出されることになる。しかし，それらの0次同次性を考慮すれば，$q^{t,m}>0$ であるかぎり

$$
\begin{aligned}
&\varphi_0^1(q^1, q^{t,m})=\varphi_0^1(p^1,1)=f_0^1(p^1)\\
(3.1)\quad &\varphi_s^s(q^s, q^{s+1}, q^{t,m})=\varphi_s^s(p^s, p^{s+1}, 1)=f_s^s(p^s, p^{s+1}) \quad \text{for } s=1,2,\cdots\cdots,t\\
&\varphi_s^{s+1}(q^s, q^{s+1}, q^{t,m})=\varphi_s^{s+1}(p^s, p^{s+1}, 1)=f_s^{s+1}(p^s, p^{s+1}) \quad \text{for } s=1,2,\cdots\cdots,t
\end{aligned}
$$

となるから，事態の実質には何らの変化もない。そしてこの点は，貨幣の需要関数 φ_s^m（もしくは供給関数 $\varphi_s^{\overline{m}}$）についてもまったく同様である。他方また仮定1から各個人の欲望が非飽和となることを考えれば，つねに等式

$$
\begin{aligned}
&q^1\varphi_0^1(q^1, q^{t,m})=q^1\omega_0^1+q^{t,m}M\\
(3.2)\quad &q^s\varphi_s^s(q^s, q^{s+1}, q^{t,m})+q^{t,m}\varphi_s^m(q^s, q^{s+1}, q^{t,m})=q^s\omega_s^s \quad \text{for } s=1,2,\cdots\cdots,t\\
&q^{s+1}\varphi_s^{s+1}(q^s, q^{s+1}, q^{t,m})=q^{s+1}\omega_s^{s+1}+q^{t,m}\varphi_s^{\overline{m}}(q^s, q^{s+1}, q^{t,m}) \quad \text{for } s=1,2,\cdots\cdots,t
\end{aligned}
$$

が成り立つことも自明であろう。

さてここで上記の需要関数 φ_0^1, φ_s^s および φ_s^{s+1} を用いて，価格シンプレックス Δ の内部から $R^{n(t+1)}\times R$ へのつぎのような関数 ζ を構成することにしよう。

$$
\begin{aligned}
\zeta_1(q)&=\varphi_0^1(q^1, q^{t,m})+\varphi_1^1(q^1, q^2, q^{t,m})-\omega_0^1-\omega_1^1\\
\zeta_2(q)&=\varphi_1^2(q^1, q^2, q^{t,m})+\varphi_2^2(q^2, q^3, q^{t,m})-\omega_1^2-\omega_2^2\\
&\vdots\\
\zeta_t(q)&=\varphi_{t-1}^t(q^{t-1}, q^t, q^{t,m})+\varphi_t^t(q^t, q^{t+1}, q^{t,m})-\omega_{t-1}^t-\omega_t^t\\
\zeta_{t+1}(q)&=\varphi_t^{t+1}(q^t, q^{t+1}, q^{t,m})-\omega_t^{t+1}-\omega_{t+1}^{t+1}\\
\zeta_m(q)&=\frac{q^{t+1}\omega_{t+1}^{t+1}}{q^{t,m}}-M
\end{aligned}
$$

これらの関数のうち $\zeta_1(q)$ から $\zeta_t(q)$ までについては各期の超過需要関数という意味を付与することができ，したがってそれらに格別の説明をつけ加えることは不要であろう。しかし，終りの $\zeta_{t+1}(q)$ および $\zeta_m(q)$ については，若干付言しておくのが有益であると思われる。当面の経済は t 期で切断されているわけであるから，世代 t の個人が後半生に自分の賦存量 ω_t^{t+1} を越える消費を所望するとしても，彼に財を与える世代 $t+1$ の個人は存在していない。それゆえ，$\zeta_{t+1}(q)$ 式の右辺にあらわれる ω_{t+1}^{t+1} は一つの虚構であって，市場のオークショニアがこれを個人 t に与えると解するほかはないであろう。その代り，個人 t がそれに当てるべく繰り越した貨幣 M は，その代価としてオークショニアに引き渡されると考えられ，最後の $\zeta_m(q)$ 式は，そのような経済の終結条件すなわち最終世代の個人とオークショニアとのあいだのバランス条件 $q^{t+1}\omega_{t+1}^{t+1}=q^{t,m}M$ にもとづく貨幣の超過需要関数と解されうるのである。

ところで，上記の要領で構成された関数 ζ は明らかに int Δ の上で連続であり，また（3.2）から，すべての $q\in \text{int}\,\Delta$ に対して「ワルラス法則」

$$(3.3)\qquad q\zeta(q)=0$$

を満たすことが容易に分る。事実 $\zeta_1(q), \zeta_2(q), \cdots\cdots, \zeta_{t+1}(q)$ にそれぞれ $q^1, q^2, \cdots\cdots, q^{t+1}$ をかけ，$\zeta_m(q)$ に $q^{t,m}$ をかけて足し合わせれば，(3.2) の第2式，第3式から $q^s\varphi^s_s - q^s\omega^s_s = -q^{t,m}\varphi^m_s = -(q^{s+1}\varphi^{s+1}_s - q^s\omega^{s+1}_s)$ となるので，中間の項はみな相殺され，最初の項 $q^1\varphi^1_0 - q^1\omega^1_0$ と最後の項 $-q^{t,m}M$ のみが残るが，これらもまた (3.2) の第1式によって相殺され消去されるのである。

以上の準備ののちに，角谷の定理の枠組みづくりに着手することにしよう。以下での分析にあたってはそこに含まれる財の番号のつけ換えを行い，第 s 期の第 i 財の番号 (s, i) を $(s-1)n+i$ とおき，最後の貨幣の番号 (t, m) を $(t+1)n+1 \equiv N$ とおいて，すべての財を $1, 2, \cdots\cdots, k, \cdots\cdots, N$ と通し番号づけにするのが便利である。すると $q = (q^1, q^2, \cdots\cdots, q^{t+1}, q^{t,m}) = (q_1, q_2, \cdots\cdots, q_N)$ となるから，

$$\Delta \equiv \left\{ (q_1, q_2, \cdots\cdots, q_N) \in R^N_+ \,\middle|\, \sum_{k=1}^{N} q_k = 1 \right\}$$

と書かれ，ここで ν を自然数として，

$$\Delta^\nu \equiv \left\{ (q_1, q_2, \cdots\cdots, q_N) \in \mathrm{int}\,\Delta \,\middle|\, q_k \geqq \frac{1}{N+\nu} \right\}$$

とすれば，Δ^ν は

$$\Delta^1 \subset \Delta^2 \subset \cdots\cdots \subset \Delta^\nu \subset \Delta^{\nu+1} \subset \cdots\cdots$$

$$\mathrm{int}\,\Delta = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Delta^\nu$$

を満たすコンパクトかつ凸の集合となる。他方また ζ^ν を ζ の Δ^ν への制限（部分写像）とし，$Z^\nu \equiv \mathrm{co}\,\zeta^\nu(\Delta^\nu)$ とすれば，Z^ν もコンパクトかつ凸の集合となる。そこでこの Z^ν から Δ^ν への写像 μ^ν を

$$\mu^\nu(z) \equiv \left\{ q \,\middle|\, qz = \max \Delta^\nu z \right\}$$

のように構成すれば，周知のように μ^ν はコンパクト値で凸値，しかも優半連続な対応となる。

これで角谷の定理を構成するすべての素材が出揃ったので，あとは定石どおり $\Delta^\nu \times Z^\nu$ からそれ自体への，$\mu^\nu \times \zeta^\nu$ による写像をつくる。するとそれはつくり方から明らかにコンパクト値，凸値かつ優半連続であり，したがって同定理の適用により，それには不動点 $(q^\nu, z^\nu) \in \Delta^\nu \times Z^\nu$，$q^\nu \in \mu^\nu(z^\nu)$，$z^\nu = \zeta^\nu(q^\nu)$ が存在する。そして (3.3) から $q^\nu z^\nu = 0$，また μ^ν の定義から $qz^\nu \leqq q^\nu z^\nu$ for all $q \in \Delta^\nu$ であるから，z^ν については

$$q\,z^\nu \leqq 0 \quad \text{for all } q \in \Delta^\nu \tag{3.4}$$

が成立する。

さて，ここで ν を動かして，それぞれの ν に応ずる不動点の点列 $\{q^\nu, z^\nu\}$ を考えることにしよう。$q^\nu \in \Delta$ for all ν であるところから，$\{q^\nu\}$ は当然有界。他方 $\varphi^s_s(\cdot)$，$\varphi^{s+1}_s(\cdot)$ が下から有界であることを考えれば，$\{z^\nu\}$ もまた下から有界。そして (3.4) が成り立つことによって，それは明らかに上からも有界である。ゆえに (q^ν, z^ν) は有界点列であり，われわれは一般性を失うことなくそれがある点 (q^*, z^*) に収束すると考えることができる。

すると，まず z^* については

$$z^* \leqq 0$$

が成立する。事実いま任意の $k \in \{1, 2, \cdots\cdots, N\}$ について第 k 成分のみが 1 で他の成分がすべて 0 のベクトルを e_k とすれば，e_k に収束し，しかも $q^\nu_{(k)} \in \varDelta^\nu$ for all ν となる点列 $\{q^\nu_{(k)}\}$ が存在する。そして (3.3) から $q^\nu_{(k)} z^\nu \leqq 0$ for all ν であるから，$\nu \to \infty$とすることによって $z^*_k \leqq 0$ である。

つぎに q^* について

$$q^* \in \operatorname{int} \varDelta$$

となることを証明しよう。この証明は 2 段階に分けて行うこととし，最初にまず (i) $q^{t,m*}>0$ となることを，ついで (ii) $q^{s,i*}>0$ for all $s=1, 2, \cdots\cdots, t+1$, $i=1, 2, \cdots\cdots, n$ となることを証明する。

(i) もし主張に反して $q^{t,m*}=0$ であったとすれば，$q^{t+1*}=0$ とならなくてはならない。なぜなら，もし $q^{t,m*}=0$ で，しかも $q^{t+1} \neq 0$ すなわち $q^{t+1,i*}>0$ for some i であったとすれば，$\omega^{t+1}_{i+1}>0$ であるところから，$v \to \infty$のときには

$$\frac{q^{t+1^\nu} \omega^{t+1}_{t+1}}{q^{t, m^\nu}} \to \infty$$

となり，

$$z^{m^\nu} = \zeta_m(q^\nu) = \frac{q^{t+1^\nu} \omega^{t+1}_{t+1}}{q^{t, m^\nu}} - M$$

の有界性に反するからである。

ところで，このように $q^{t+1*}=0$ であるとすれば，さらに $q^{t*}=0$ とならねばならないことが知られる。事実もし $q^{t,i*}>0$ for some i であるとすれば，仮定 1 の単調性したがってそれが含意する境界条件から，$q^\nu \to q^*$ のときには

$$\|\varphi^t_t(q^{t^\nu}, q^{t+1^\nu}, q^{t, m^\nu}), \varphi^{t+1}_t(q^{t^\nu} q^{t+1^\nu}, q^{t, m^\nu})\| \to \infty$$

とならねばならず，これは ζ^ν_t, ζ^ν_{t+1} の定義をつうじて z^{t^ν}, z^{t+1^ν} の有界性と相容れない。

以下同様の推論を続けることによって，$q^{t,m*}=0$ の仮定の下では，結局

$$q^{s*}=0 \quad \text{for all } s=1, 2, \cdots\cdots, t+1$$

とならざるをえないことになり，これは明らかに $q^* \in \varDelta$ であることに矛盾する。よって背理法の仮定は否定されなくてはならない。

(ii) やはり背理法によるとして，$q^{s,i*}=0$ for some s, i であったとする。その s を s' とすれば，境界条件と z^{s^ν} の上からの有界性から，s' については $q^{s',i*}=0$ for all i，そして

$$q^{s'-1,i*}=0 \quad \text{for all } i$$
$$q^{s'+1,i*}=0 \quad \text{for all } i$$

とならざるをえない。そこでこの帰結に前と同様の議論を次々に適用していくことによって，結局どの $s=1, 2, \cdots\cdots$, $t+1$ についても $q^{s,i*}=0$ for all i とならねばならないことになる。ゆえに $s=1$ についても $q^{1,i*}=0$ for all i であるほかはないが，これは φ^1_0 の定義と $q^{t,m*}>0, M>0$ であ

ることから，

$$\|\varphi_0^1(q^{1\nu}, q^{t,m^\nu})\| \to \infty$$

を意味し，ふたたび $z^{1\nu}$ の上からの有界性に矛盾する。よってこの場合も，背理法の仮定は成立しえない。

こうして $z^* \leqq 0$, $q^*>0$ となることが分れば，(3.3) すなわち $q^*z^*=0$ から，ただちに

$$z^* \overset{(4)}{=} \zeta(q^*)=0$$

となり，財の需給均衡条件

$$\varphi_0^1(q^{1*}, q^{t,m*})+\varphi_1^1(q^{1*}, q^{2*}, q^{t,m*})=\omega_0^1+\omega_1^1$$
$$\varphi_1^2(q^{1*}, q^{2*}, q^{t,m*})+\varphi_2^2(q^{2*}, q^{3*}, q^{t,m*})=\omega_1^2+\omega_2^2$$
$$\vdots$$
$$\varphi_{t-1}^t(q^{t-1*}, q^{t*}, q^{t,m*})+\varphi_t^t(q^{t*}, q^{t+1*}, q^{t,m*})=\omega_{t-1}^t+\omega_t^t$$

がことごとく成立する。そこで

$$(p^{1*}, p^{2*}, \cdots\cdots, p^{t+1*})=\left(\frac{q^{1*}}{q^{t,m*}}, \frac{q^{2*}}{q^{t,m*}}, \cdots\cdots, \frac{q^{t+1*}}{q^{t,m*}}\right)$$

とおき，(3.1) を考慮することによって，

$$f_0^1(p^{1*})+f_1^1(p^{1*}, p^{2*})=\omega_0^1+\omega_1^1$$
$$f_1^2(p^{1*}, p^{2*})+f_2^2(p^{2*}, p^{3*})=\omega_1^2+\omega_2^2$$
$$\vdots$$
$$f_{t-1}^t(p^{t-1*}, p^{t*})+f_t^t(p^{t*}, p^{t+1*})=\omega_{t-1}^t+\omega_t^t$$

となる。

他方，貨幣の需給均衡条件については，(3.2) から

$$q^{1*}\varphi_0^1(q^{1*}, q^{t,m*})-q^{1*}\omega_0^1=q^{t,m*}M$$
$$q^{1*}\varphi_1^1(q^{1*}, q^{2*}, q^{t,m*})-q^{1*}\omega_1^1=q^{t,m*}\varphi_1^m(q^{1*}, q^{2*}, q^{t,m*})$$

となるから，これと条件 $\zeta_1(q^*)=0$ とから

$$q^{t,m*}\varphi_1^m(q^{1*}, q^{2*}, q^{t,m*})=q^{t,m*}M,$$

ゆえに

$$f_1^m(p^{1*}, p^{2*})=M$$

となり，以下同様に

$$f_2^m(p^{2*}, p^{3*})=M$$
$$\vdots$$
$$f_t^m(p^{t*}, p^{t+1*})=M$$

注（4） ζ^ν は ζ の部分写像であるから，$z^\nu=\zeta^\nu(q^\nu)$ なら明らかに $z^\nu=\zeta(q^\nu)$ でもある。ゆえに (q^ν, z^ν) が (q^*, z^*)に収束し，$q^* \epsilon \operatorname{int}\Delta$ がいえたとすれば，ζ の $\operatorname{int}\Delta$ 上の連続性から当然 $z^*=\zeta(q^*)$となる。

となる。

以上の議論をつうじて $(p^{1*}, p^{2*}, \cdots\cdots, p^{t+1*})$ は第1期から第 t 期までの財および貨幣の需給均衡条件をすべて満たすことが知られたわけであり，それに任意，正の $p^{t+2*}, p^{t+3*}, \cdots\cdots$ をつけ加えたものが t 均衡となる。よって t 均衡の存在証明が終了した。

4　そのような t 均衡の集合を $W(t)\subset\prod_{s=1}^{\infty}R^{n}_{++}$ とすれば，前節定理1と t 均衡の定義から，すでに

$$W(t)\neq\varnothing \quad \text{for all } t=1,2,\cdots\cdots$$

$$W(1)\supset W(2)\supset\cdots\cdots\supset W(t)\supset W(t+1)\supset\cdots\cdots$$

であることが明らかにされている。そこで本来の無限期経済での競争均衡の存在を示すには，

$$\bigcap_{t=1}^{\infty}W(t)\neq\varnothing$$

となることを示せばよいわけであるが，遺憾ながら仮定1および2のみをもってしては所望の帰結を得るのに不十分である。

たとえば，いま各個人の効用関数と初期賦存量がつぎのように特定化された1財経済を考えてみよう。(5)

$$u_0(x_0^1)=x_0^1$$

$$u_t(x_t^t, x_t^{t+1})=x_t^t x_t^{t+1} \quad \text{for } t=1,2,\cdots\cdots$$

$$\omega_0=2$$

$$\omega_t=(2,2) \quad \text{for } t=1,2,\cdots\cdots$$

$$M=1$$

この事例での財および貨幣の需要関数はそれぞれ

$$f_0^1(p^1)=\frac{M}{p^1}+2$$

$$f_t^t(p^t, p^{t+1})=\frac{p^t+p^{t+1}}{p^t} \quad \text{for } t=1,2,\cdots\cdots$$

$$f_t^{t+1}(p^t, p^{t+1})=\frac{p^t+p^{t+1}}{p^{t+1}} \quad \text{for } t=1,2,\cdots\cdots$$

$$f_t^m(p^t, p^{t+1})=p^t-p^{t+1} \quad \text{for } t=1,2,\cdots\cdots$$

となり，したがって

$$\begin{aligned} p&=(p^1, p^2, \cdots\cdots, p^t, p^{t+1}, p^{t+2}, \cdots\cdots)\\ &=(t+1,\ t, \cdots\cdots, 2,\ 1,\ 1, \cdots\cdots)\end{aligned}$$

とすれば，$p\in W(t)$ である。ところがこの経済は，本来の競争均衡をもつことができない。とい

注（5） 以下の事例については，S. Suda, *op. cit.*, p. 10 参照。

うのは，貨幣の市場がクリアされるためには，

$$p^{t+1}=p^{t}-1 \quad \text{for all } t=1,2,\cdots\cdots$$

とならねばならず，他方また

$$p^{t}>0 \quad \text{for all } t=1,2,\cdots\cdots$$

とならねばならないが，これらの条件は明らかに両立不可能だからである。

したがって無限期経済の競争均衡の存在を保証するには，各個人の選好と初期賦存量に対して，さらに何らかの付加的な条件を課することが必要となる。われわれは以下本節の議論をつうじて，仮定2をいっそう強い

仮定 2′
$$\omega_0=0$$
$$\omega_t=(\omega_t^t,0),\quad \omega_t^t\in R_{++}^n$$

に改め，さらにまた

仮定 3 各 t に対して $\varepsilon^t\in R_{++}^n$ が存在し，$f_t^{t+1}(p^t,p^{t+1})\leqq\omega_{t+1}^{t+1}$ を満たす任意の $(p^t,p^{t+1})\in R_{++}^{2n}$ に対して，$f_t^t(p^t,p^{t+1})\leqq\omega_t^t-\varepsilon^t$ とすることができる

を追加することにする。

仮定2′は，どの個人も「老年期」には財の初期賦存量をもつことができず，したがって後半生の消費のためにどうしても貨幣を持ち越さねばならないことを意味している。他方仮定3は，p^t が p^{t+1} に対してどれほど安くなったとしても，なお t 期の需要 x_t^t は賦存量 ω_t^t を越えることがなく，それより小さい範囲にとどまりつづけることを意味している。これらはいずれもきびしい仮定であるが，読者はたとえば効用関数がコブ＝ダグラス型ないしは負のパラメターをもつ CES 型である場合に，仮定2′が仮定3を含意することを確かめてみることができるであろう。

定理 2 仮定1，2′および3が満たされていれば，無限期重複世代経済には競争均衡が存在する。

定理そのものを証明する前に，あらかじめつぎの補助定理を証明しておくことにしよう。

補助定理 1 定理2と同じ仮定が満たされていれば，任意の $t\geqq1$ と任意の $p\in W(\tau)$, $\tau=t+1,t+2,\cdots\cdots$ に対して

$$0\leqq p^s\leqq\beta^s \quad \text{for } s=1,2,\cdots\cdots,t$$

となるような $\beta^t\in R_{++}^n(t=1,2,\cdots\cdots)$ が存在する。

この補助定理が主張するところは，t 均衡の価格 $p^1,p^2,\cdots\cdots,p^{t-1}$ に対してそれぞれかならず上限が存在し，しかもそれらの上限は t を延長しても変らないということである。換言すれば，t を $t+1$ に延長した場合，当然 p^t の上限 β^t が新たに加わるが，それまでの $\beta^1,\beta^2,\cdots\cdots,\beta^{t-1}$ は，$p^1,p^2,\cdots\cdots,p^{t-1}$ が $p^{1\prime},p^{2\prime},\cdots\cdots,p^{t-1\prime}$ に変っても，そのまま生きるということが主張されているのである。

補助定理の証明

仮定3の ε^t を用いて，$\beta^{t,j}\equiv M/\varepsilon^{t,j}$ と定義する。そのとき任意の $t\,(t\geqq 1)$，$\tau\,(\tau\geqq t+1)$，$p\in W(\tau)$，$s\,(1\leqq s\leqq t)$ および $j\,(1\leqq j\leqq n)$ に対して

$$p^{s,j}\leqq\frac{M}{\varepsilon^{s,j}}$$

となることを示せばよいわけである。

そこでまず仮定2′を考慮することにより，$p\in W(\tau)$ から，すべての $s=1,2,\cdots\cdots,\tau$ について

$$f^s_{s-1}(p^{s-1},p^s)+f^s_s(p^s,p^{s+1})=\omega^s_s$$
$$p^s f^s_{s-1}(p^{s-1},p^s)=M$$

となっているから，後者を用いて

$$p^{s,j}f^{s,j}_{s-1}(p^{s-1},p^s)=M-\sum_{i\neq j}p^{s,i}f^{s,i}_{s-1}(p^{s-1},p^s)\leqq M,$$

ゆえに前者の式から

$$\frac{M}{p^{s,j}}\geqq f^{s,j}_{s-1}(p^{s-1},p^s)=\omega^{s,j}_s-f^{s,j}_s(p^s,p^{s+1}) \tag{4.1}$$

である。ところが，$p\in W(\tau)$ $(\tau\geqq t+1)$ であることから

$$f^{s+1,j}_s(p^s,p^{s+1})+f^{s+1,j}_{s+1}(p^{s+1},p^{s+2})=\omega^{s+1,j}_{s+1},$$

したがって

$$f^{s+1,j}_s(p^s,p^{s+1})\leqq\omega^{s+1,j}_{s+1}$$

となっているから，仮定3が使え，その結果

$$\omega^{s,j}_s-f^{s,j}_s(p^s,p^{s+1})\geqq\varepsilon^{s,j} \tag{4.2}$$

となる。よって (4.1)，(4.2) を併せて

$$\frac{M}{p^{s,j}}\geqq\varepsilon^{s,j},$$

すなわち

$$p^{s,j}\leqq\frac{M}{\varepsilon^{s,j}}$$

であることになる。証了。

定理2の証明

$$S\equiv\left\{p\in\prod_{t=1}^{\infty}R^n_+\;\middle|\;0\leqq p^{t,i}\leqq\beta^{t,i}\quad\text{for all }t,i\right\}$$

とすれば，チホノフの定理(6)によって S はコンパクト集合である。そこで $\overline{W(t)}$ を $W(t)$ の直積位

注（6） チホノフの定理については N. Bourbaki, *Topologie générale, I,* 1971, p. 63, 日本数学会編『岩波数学辞典』第3版，1985, p. 30 など参照。

相に関する閉包として

$$V(t) \equiv \overline{W(t)} \cap S$$

と定義し，$V(t)$ が非空の閉集合となることをまず示す。

そのために補助定理の t を $t+1$ に，また τ を $t+2$ に選べば，$W(t+2) \neq \emptyset$ であることから，ある $p \in W(t+2)$ が存在して，$0 \leqq p^s \leqq \beta^s (s=1, 2, \cdots\cdots, t+1)$。そして $W(t) \supset W(t+2)$ であるから，$p \in W(t)$ でもある。そこで p^β を

$$p^\beta = (p^1, p^2, \cdots\cdots, p^{t+1}, \beta^{t+2}, \beta^{t+3}, \cdots\cdots)$$

で定義すれば，いうまでもなく $p^\beta \in S$ で，しかも p^β が p と相違するのは $t+2$ 期以降の部分のみであるから，$p \in W(t)$ なら $p^\beta \in W(t)$，したがって当然 $p^\beta \in \overline{W(t)}$ となり，$p^\beta \in V(t)$ となって，$V(t)$ は非空であることが知られる。

他方 $V(t)$ が閉であることは，S がコンパクトで $\overline{W(t)}$ が閉であることから自明である。

こうして $V(t)$ は S の非空閉部分集合になることが分り，また $V(t)$ の定義から

$$V(1) \supset V(2) \supset \cdots\cdots \supset V(t) \supset V(t+1) \supset \cdots\cdots$$

の成り立つことが分っている。これは $\{V(t)\}$ が有限交叉性を満たすことにほかならないから，結局

$$\bigcap_{t=1}^{\infty} V(t) \neq \emptyset$$

であることが保証され，よって $p^* \in \bigcap_{t=1}^{\infty} V(t)$ とすれば，どんな t をとっても $p^* \in V(t)$，したがって $p^* \in \overline{W(t)}$ となる。

ここから進んでさらにどんな t についても $p^* \in W(t)$ となることを示すのが証明の最終目標であるが，いまそのためのステップとして，すべての $t=1, 2, \cdots\cdots$ に対し $p^* \in \overline{W(t)}$ であることがつぎの含意をもつことに注目しよう。すなわちそのことからわれわれは，それぞれの $W(1)$，$W(2)$，$\cdots\cdots$ のなかに，いずれも p^* に収束する点列 $\{p^\mu_{(1)}\}$，$\{p^\mu_{(2)}\}, \cdots\cdots$ が存在すること，したがってそれらの各点列のなかから点 $p^{\sigma(1)}_{(1)}$，$p^{\sigma(2)}_{(2)}, \cdots\cdots$ を1個ずつとり出して，

$$p^{\sigma(\nu)}_{(\nu)} \to p^* \quad \text{as } \nu \to \infty$$

$$p^{\sigma(\nu)}_{(\nu)} \in W(\nu) \quad \text{for } \nu = 1, 2, \cdots\cdots$$

を満たすような新たな点列 $\{p^{\sigma(\nu)}_{(\nu)}\}$ をつくりうること，を主張することができる。そこに含まれるそれぞれの $p^{\sigma(\nu)}_{(\nu)}$ 自体が $(p^{1, \sigma(\nu)}_{(\nu)}, p^{2, \sigma(\nu)}_{(\nu)}, \cdots\cdots, p^{t, \sigma(\nu)}_{(\nu)}, \cdots\cdots)$ という無限個の価格ベクトルを含んでいるわけであるから，ここで任意に t を固定して，各 $p^{\sigma(\nu)}_{(\nu)}$ のなかから t 期の価格ベクトルのみをとり出し，

$$\{p^{t, \sigma(1)}_{(1)}, p^{t, \sigma(2)}_{(2)}, \cdots\cdots, p^{t, \sigma(\nu)}_{(\nu)}, \cdots\cdots\}$$

という点列を考えてみる。$p^{\sigma(\nu)}_{(\nu)}$ が p^* に収束するのである以上，$p^{t, \sigma(\nu)}_{(\nu)}$ は当然 p^* の第 t ベクトル

p^{t*} に収束することになるが，以下では $\nu\to\infty$ のとき，$p_{(\nu)}^{t,\sigma(\nu)}$ の成分がいずれも 0 にはならないこと，すなわち p^{t*} の成分がみな正となることを証明する。

この主張の証明にあたっては $\nu\to\infty$ のときのことを考えているのであるから，一般性を失うことなく $\nu\geqq t$ として議論を進めてよいであろう。

いまもし前記の主張に反し，$p_{(\nu)}^{t,\sigma(\nu)}$ のある成分が 0 に収束したとすれば，前と同様，境界条件が成立することと，各 $p_{(\nu)}^{\sigma(\nu)}$ が $W(\nu)\subset W(t)$ に属することの双方から，$p_{(\nu)}^{t,\sigma(\nu)}$ のすべての成分が 0 に収束するのでなくてはならない。ところがこれは貨幣市場の均衡条件

$$p_{(\nu)}^{t,\sigma(\nu)}\omega_t^t - p_{(\nu)}^{t,\sigma(\nu)}f_t^t(p_{(\nu)}^{t,\sigma(\nu)},\ p_{(\nu)}^{t+1,\sigma(\nu)})=M$$

に矛盾する。よって $p^{t*}>0$ でなくてはならないのである。

ここであらためて任意に t を固定し，最後に $p^*\epsilon W(t)$ となることを主張したい。しかし，この主張は，以上のところですでに確立されている諸命題

$\nu\geqq t$ であれば $p_{(\nu)}^{\sigma(\nu)}\epsilon W(\nu)\subset W(t)$

$p_{(\nu)}^{\sigma(\nu)}\to p^*$ as $\nu\to\infty$

$p^{s*}>0$ for $s=1,2,\cdots\cdots,t+1$

需要関数は厳密に正の価格上で連続

を同時に考慮すれば，成立することが明らかである。しかもこれは任意の t について成立するのであるから，

$$p^*\epsilon\bigcap_{t=1}^{\infty}W(t)$$

となることも明らかであろう。よって $\bigcap_{t=1}^{\infty}W(t)$ の非空となることが確立され，所望の目的が達成された。

福 岡 正 夫（経済学部教授）
須 田 伸 一（経済学部助手）