貨幣と重複世代モデル

福岡正夫
須田伸一

1　本稿は筆者の1人がすでに別途の目的のために執筆した論文(1)の一部をさらに敷衍し改善し拡充したもので，そのもっぱらの狙いは貨幣が存在する無限期の重複世代モデルにおいて，厚生経済学の第一基本定理がいかにして成立するかを示すことにおかれている。貨幣を明示的に持ち込むにせよ持ち込まないにせよ類似の主題をとり扱った論文としては，すでに奥野＝チルハとバラスコ＝シェルがあるが(2)，それらとわれわれのアプローチとの異同については行論が進むにつれておのずから明らかになっていくであろう。

2　重複世代モデル（overlapping-generations model）は，サミュエルソンがこれを「精確な消費貸付モデル」（"exact consumption-loans model"）の名の下に初めて導入して以来(3)，多くの理論家たちによってさまざまな用途に使われてきており(4)，現在そのモデル構造を詳しく説明することは不要であろう。このモデルが想定する世界は，将来に向かって限りなく一方的に展開されていく継起的経

注（1） Shinichi Suda, "Pareto Optimality and Monetary Competitive Equilibrium in the Overlapping-Generations Model", *Keio Economic Studies,* Vol. XXIII, No. 1, 1986.

（2） M. Okuno and I. Zilcha, "On the Efficiency of a Competitive Equilibrium in Infinite Horizon Monetary Economies", *Review of Economic Studies,* July 1980, Y. Balasko and K. Shell, "The Overlapping-Generations Model I: The Case of Pure Exchange without Money", *Journal of Economic Theory,* December 1980, *ditto,* "The Overlapping-Generations Model II: The Case of Pure Exchange with Money", *Journal of Economic Theory,* February 1981.

（3） Paul A. Samuelson, "An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money", *Journal of Political Economy,* December 1958, reprinted in J. E. Stiglitz ed., *The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson,* Volume I, 1966.
なおサミュエルソンのモデルのやさしい解説としては，岩井克人「無限性の経済学」（『日本経済新聞』，1986年9月6・8・9・10・12日号連載）の参照が有益である。

（4） たとえば N. Wallace, "The Overlapping-Generations Model of Fiat Money", in J. Kareken and N. Wallace eds., *Models of Monetary Economics,* Federal Reserve Bank of Minneapolis, 1980, Y. Balasko and K. Shell, "Lump-sum Taxes and Transfers: Public Debt in the Overlapping-Generations Model", in W. P. Heller, R. M. Starr and D. A. Starrett eds., *Equilibrium Analysis: Essays in Honor of Kenneth J. Arrow,* Volume II, 1986, F. Gagey, G. Laroque, and S. Lollivier, "Monetary and Fiscal Policies in a General Equilibrium Model", *Journal of Economic Theory,* August 1986 など。

済（sequence economy）のそれであるが，そこに登場する個別取引主体は，当然のことながらそれぞれある一定の有限期間しか生きられない。いま考察を簡単にするために，各主体の生命の長さがみな同じであると想定し，それを前半期すなわち「若年期」と後半期すなわち「老年期」の2期に区切るとすれば，毎期の経済は，その期の期首に生まれさらにもう1期生きのびる若年期の個人と，すでに人生の後半期にあり今期末には死を迎える老年期の個人の2世代によって構成されるわけであり，交換はもっぱら世代が重複するこれらの個人のあいだで行われうるにすぎない。

このような経済についてとりわけ注目すべきは，それがつぎのような二つの点において伝統的なワルラス流の（ないしはドブリュー流の）一般均衡モデルと相異なった構造的性格をもっていることである。まず一つには，この経済では視野が未来永却にわたって無限に拡がっているところから，世代の交代が永遠に繰り返され，したがって主体の数が可付番無限個にならざるをえない。またもう一つには，各世代の個人がそれぞれ有限期間しか生きられないところから，彼らの全員が一堂に会して同時に取引に参加することは許されない。というのは，すでに死亡してしまった個人とか，あるいはまだ生まれてきていない個人とかと取引する機会をもつことは，明らかに不可能なことだからである。

ところで，そのようなモデルをつうじてサミュエルソンが提起したいくつかの問題のうち，目下のわれわれの視点からもっとも重要と思われるのは，もし当該の経済が個人の主体的行動の合理性や市場・情報構造の完全性，そして不確実性や外部性の欠如といったような標準的な仮定のすべてを満たしていたとしても，なおその経済の競争均衡がパレート最適配分を達成するとはかぎらないということ，しかし貨幣のような，それ自体は効用をもたなくても一般的受容性をもつ資産持越し手段があるならば，事態を救済して競争均衡をパレート最適ならしめる途が開かれるということである。従来の競争経済モデルの場合には現われなかったこれらのややパラドキシカルな帰結が生じてくるについては，一体上記のモデルのどの側面がその基本的原因をなしているのであろうか。また貨幣のような富の時間的移転手段がある場合には，どうして問題の解決がもたらされるのであろうか。われわれはこれらの点をめぐって，まず次節では直観的な見地からする若干の予備的説明を与え，そののちにいっそう精確な数学的定式化をつうじて，当該貨幣経済モデルでの第一基本定理の成立を証明することにしたいと思う。

3　先述したようにこのモデルでは，毎期の期首に新しい個人が誕生し，期末にはもう1期前の期首に生まれた個人が死亡するという形で，世代の交替が繰り返されていく。そしてそれらの個人は自分たちが生きる2期間のライフ・スパンにわたってみずからの消費計画を立て，それらから得られる効用を，各期の初期賦存量と市場価格に依存する予算制約式の下で最大化すると想定される。

いまもし彼らの選好と相対的に初期賦存量が若年期にはゆたかに，老年期には乏しく与えられる

とするならば，上記の行動をつうじて決定される彼らの最適消費の形態は，若いときに利用可能な初期賦存量のすべてを消費してしまわず，その残余を何らかの形で持ち越して，老年期になってからそのときの初期賦存量を越える消費を享受するパターンになるはずである。しかし，もし財のすべてがいわゆる perishable commodity であり，そのままでは次期まで持越し不可能なものであるとすれば，上記のような最適消費のパターンは自分で財を蓄えるといったアウタルキー的行動をつうじては達成することができない。つまりその場合，各個人が所期の目的を果たすためには，かならず若年期に余分の財を売却し，その見返りとして老年期になってからそのときの若い個人から財を購入するという形をとらざるをえないであろう。

ところが目下の重複世代構造の下においては，そのような両世代間の取引は実現することができないのである。なぜかといえば，若い個人が老後に備えるため今期余分の財をそのときの老人に売却しようとしても，老人の側からはその代価として提供できるものが何もないからである。つまり今期の若者は，今期の老人が所望している財を余分にもってはいるものの，その若者が老人になったときに必要とする次期の財をもっているのは，今期の老人ではなくて，次期に生まれてくる若者でしかない。こうして当面の仕組みの下においては，あいにく老人と若者とのあいだに欲求の二重の一致が成立せず，どの期についてみても両者は相互的な交換関係を結ぶことができないのである。

ところが，この社会にひとたび貨幣が導入されれば，事態の様相は一変する。いまモデルの初期時点において老年期を迎える老人が何らかの紙片を貨幣と宣言し，それが財の特定量と同価値をもつことを将来の世代に認めさせえたと想定しよう。すると，それらの老人は実物的には何ももっていなくても，その紙片を手渡すだけで今期の若者から所望の財を受けとりうることになる。というのは，今期の若者は老人から受けとった紙片を，自分が老人になるつぎの期に，またその期の若者に手渡せば，代りに所望の財を受けとることができるからである。こうして順繰りに貨幣が老人から若者へと引き渡たされていくことにより，やはり順繰りに所望の財が若者から老人へと引き渡たされていくことになるのである。

このようなプロセスをつうじて，毎期毎期の若者が問題の紙片を貨幣として老人から受け入れるのは，いうまでもなくつぎの期に生まれる若者がやはりそれを貨幣として受け入れてくれるであろうと予想されるからである。そしてつぎの期の若者がそれを貨幣として受け入れるのも，やはり同様につぎのつぎの期に生まれる若者がそれを貨幣として受け入れてくれるであろうと予想されるからである。

詮じつめてみれば，結局その紙片が貨幣として通用するのは，将来生まれてくる人々が上記のような予想をいつまでももちつづけるからなのであって，そのことが保証されなくなれば，たちまちそれは貨幣としての価値を失ってしまう。この点を理解するには，いま世界がある有限の期間で終

ってしまうとすれば何が起こるかを考えてみればよい。その場合には，最終期の若者にとって，貨幣とはもはやそれと交換に他のいかなる財をも得ることのできないたんなる紙片を意味するにすぎず，したがって彼は当然それを老人から受けとることを拒否するであろう。ということは，その老人たちにとっても，それはもはや財と交換しえないたんなる紙片と化することを意味し，そのことが予想されれば，1期前においても彼らはそれをその期の老人から受けとることを拒むであろう。すると同じ推論をつぎつぎに適用していくことによって，最初の時点においても貨幣は何の価値もないたんなる紙片となってしまい，それに託された特異な機能を果しえなくなることが分かる。

以上を要するに，貨幣とは世界に終末がなく，当該の経済社会が永遠に続いていくからこそ，貨幣となるのである。シェルが指摘した，貨幣経済と「無限の部屋数をもつホテル」の話との類推は[(5)]，まさしくこの点に根拠をもっている。ガモフの著名な寓話によれば，すでに満室になっているホテルに新しい客が来た場合，部屋数が有限であればどうやってみてもやり繰りがつかない。しかし，部屋数が無限であれば話は別である。その場合には，支配人はいままで1号室に泊まっていた客を2号室に移し，2号室に泊まっていた客を3号室に移し，……というように順繰りに客を移していけばよいのであって，かならず1号室を空け，その客を受け入れることができるのである。

4　上記のようなモデルの含意を念頭におきつつ，ここでその精確な数学的定式化にとりかかることにしよう。当該の経済は第1期に始まり，以後各期 $t=1,2,\cdots\cdots$ にわたって継起的に展開されていく。取引主体はどの期の期首に生まれたかに応じて，その期の世代番号 $t=0,1,2,\cdots\cdots$ をもっているが，簡単化のため2期間にわたってのみ生きられるものとし，したがって一般に世代 t の個人は第 t 期の期首に登場して，第 t 期と第 $t+1$ 期の2期の取引に参加する。また本稿では相異なる世代間の取引に興味の焦点がおかれるから，デモグラフィックなモデル構造としてはその点をもっとも直截先鋭にあらわすものを構想し，各世代はおしなべてただ1人の個人のみから成ると想定する。すなわち各期の経済は，その期の初めに生まれる1人の若者と，その期に後半生を迎える1人の老人から構成され，つねにそれら2人の規模で進行していくと考えるのである。

他方，彼らがそれぞれの期に消費できる財の種類は n 種類あり，それらはすべて perishable commodity であって，つぎの期へは持越しがきかず，そのほかの生産活動もいっさい行われないものと想定する。これらの財のほかに，この経済には，それ自体効用をもたないが次期に持越し可能な財として貨幣があり，その総量 M（>0）は時間をつうじて一定であると想定される。

各個人の消費可能集合は，$t=0$ の個人については $X_0\equiv R^n_+$ で，また $t=1,2,\cdots\cdots$ の個人についてはそれぞれ $X_t\equiv R^{2n}_+$ で与えられる。個人 t（$t=0,1,\cdots\cdots$）の期間 s（$s=1,2,\cdots\cdots$）における財 i

注（5） K. Shell, "Notes on the Economics of Infinity", *Journal of Political Economy*, September/October 1971, p. 1003. 言及されている寓話は G. Gamow, *One Two Three...Infinity: Facts and Speculations in Science*, 1961 から引用されたものである。

$(i=1, 2, \cdots, n)$ の消費量を $x_t^{s,i}$ と書くことにし，

$$x_t^s=(x_t^{s,1},\ x_t^{s,2}, \cdots\cdots,\ x_t^{s,n})$$

と定義すれば，各世代の個人の t 期の消費計画は，いっそう簡単に

$$x_0=x_0^1 \quad \text{for } t=0$$
$$x_t=(x_t^t,\ x_t^{t+1}) \quad \text{for } t=1, 2, \cdots\cdots$$

のようにあらわされる。個人 t $(t=0, 1, \cdots\cdots)$ はそれぞれ自分の消費計画に対して消費可能集合の上で定義される効用関数 u_t: $X_t \to R$ をもち，それについてはつぎのような仮定を設ける。

仮定 1 u_t $(t=0, 1, \cdots\cdots)$ は連続，微分可能，単調かつ強い意味で擬凹である。

仮定 2 X_t のどの内点を通る無差別曲面も X_t の内部に含まれる。

前者の仮定は標準的なものであるから，注釈は不要であろう。他方，後者の仮定は議論を単純化するため，コーナー型の解を排除する目的で導入されるもので，結果として当該モデルでの各個人への配分はすべて厳密にプラスの成分ばかりからなると考えてよいことになる。

各世代の個人 t はさらにその生存期間の各期首に

$$\omega_0=\omega_0^1=(\omega_0^{1,1},\ \omega_0^{1,2}, \cdots\cdots,\ \omega_0^{1,n}) \in R_{++}^n \quad \text{for } t=0$$
$$\omega_t=(\omega_t^t,\ \omega_t^{t+1})=(\omega_t^{t,1},\ \omega_t^{t,2}, \cdots\cdots,\ \omega_t^{t,n},\ \omega_t^{t+1,1},\ \omega_t^{t+1,2}, \cdots\cdots,\ \omega_t^{t+1,n}) \in R_{++}^{2n}$$
$$\text{for } t=1, 2, \cdots\cdots$$

であらわされる各財のプラスの初期賦存量を与えられ，また世代 0 の個人はこれに加えて第 1 期の期首に $\bar{m}_0$ であらわされる貨幣のプラスの初期賦存量を与えられる。上述の想定の下で

$$\bar{m}_0=M$$

となることはいうまでもないであろう。

つぎに市場については，どの財の場合も各期ごとに現物市場のみが開かれ，そこではその期の財と貨幣の需給のみが整合されると仮定される。この仮定の下では，各市場は時間をつうじて互いに独立となるから，価格は各期のそれぞれについて規準化することができ，したがって貨幣の価格はどの期についてもつねに 1 にひとしいとしてよいであろう。そこでそのように測った第 t 期の財 i の価格を $p^{t,i}$ であらわせば，価格ベクトル p^t は

$$p^t=(p^{t,1}, p^{t,2}, \cdots\cdots, p^{t,n}) \in R_{++}^n$$

のように定義され，各期の価格ベクトルの列 p は

$$p=(p^1, p^2, \cdots\cdots, p^t, p^{t+1}, \cdots\cdots)$$

としてあらわされる。これらの価格はすべての個人によって前もって正しく予想されると仮定され，したがって本稿では予想価格と現実価格との乖離の問題は生じてこない。そのような仮定は現実の

記述としてはまったく不適切であろうが，最適性を考察する見地からすれば欠かすことのできないものである。

以上の構成から，無限期の経済全体にとっての配分 x は，各世代の個人への配分 x_t の列として

$$x=(x_0,x_1,\cdots\cdots,x_t,\cdots\cdots)$$

のように書かれ，前述の仮定から x の集合 X は

$$X=\prod_{t=0}^{\infty}(\text{int } X_t)=R^n_{++}\times\prod_{t=1}^{\infty}R^{2n}_{++}$$

となる。他方，価格はやはり前述の仮定からどの期についても厳密にプラスとなるから，p の集合 P もまた

$$P=\prod_{t=1}^{\infty}R^n_{++}$$

のように書かれることになる。

5　さて世代0の個人は考察が開始される第1期の段階ですでに後半の老年期にあるわけであるから，所与の価格 $p^1\in R^n_{++}$ と予算制約式

$$p^1x^1_0\leqq p^1\omega^1_0+\bar{m}_0$$

の下で，効用関数

$$u_0(x^1_0)$$

の値を最大にするような後半期の需要量 $x_0\equiv x^1_0$ のみを決定する。他方，世代1以降の個人は自分の全ライフ・スパンにわたる2期間の需要決定の問題に当面しており，一般に第 t 期に，所与の価格（p^t，p^{t+1}）$\in R^{2n}_{++}$ と予算制約式

$$p^tx^t_t+m_t\leqq p^t\ \omega^t_t$$
$$p^{t+1}x^{t+1}_t\leqq p^{t+1}\ \omega^{t+1}_t+m_t$$

の下で，効用関数

$$u_t(x^t_t,\ x^{t+1}_t)$$

の値を最大にするように需要量 $x_t\equiv(x^t_t,\ x^{t+1}_t)$ と貨幣需要量 m_t とを決定する。仮定1および2によって，これらの最大値問題にはかならず一意的な解があり，したがってそれらと価格との対応関係として財および貨幣に対する需要関数 $f_0:R^n_{++}\to R^n_{++}$，$f_t=(f^t_t,f^{t+1}_t):R^{2n}_{++}\to R^{2n}_{++}$，$f^m_t:R^{2n}_{++}\to R$ が定義されることになる。これらの需要関数は

$$x_0 = f_0(p^1) \quad \text{for } t=0$$
$$x_t = f_t(p^t, p^{t+1}) \quad \text{for } t=1, 2, \cdots\cdots$$
$$m_t = f_t^m(p^t, p^{t+1}) \quad \text{for } t=1, 2, \cdots\cdots$$

のようにあらわされるが，ここで貨幣の需要関数の値については，それがマイナスになる潜在的可能性も含まれていることに注意されたい。

つぎに経済全体の状態に目を移すならば，t 期の市場にあらわれる需要は，世代 $t-1$ の個人の後半期の需要 x_{t-1}^t と世代 t の個人の前半期の需要 x_t^t であり，またその期に利用可能な供給は，世代 $t-1$ の個人の後半期の初期賦存量 ω_{t-1}^t と世代 t の個人の前半期の初期賦存量 ω_t^t であるから，財の需給均衡条件は

$$f_0^1(p^1) + f_1^1(p^1, p^2) = \omega_0^1 + \omega_1^1 \quad \text{for } t=1$$
$$f_{t-1}^t(p^{t-1}, p^t) + f_t^t(p^t, p^{t+1}) = \omega_{t-1}^t + \omega_t^t \quad \text{for } t=2, 3, \cdots\cdots$$

としてあらわされることになる。また貨幣については，毎期供給量が一定に保たれるところから，その需給均衡条件が

$$f_t^m(p^t, p^{t+1}) = M \quad \text{for } t=1, 2, \cdots\cdots$$

となることはいうまでもないであろう。したがって当該経済にとっての競争均衡とは，上記の主体的均衡と需給均衡の条件をことごとく満たす価格 $p \in P$ と配分 $x \in X$ の組にほかならないのである。

他方，この経済における達成可能な配分の集合を

$$A \equiv \{x \in X \mid x_{t-1}^t + x_t^t = \omega_{t-1}^t + \omega_t^t, \ t=1, 2, \cdots\cdots\}$$

として定義するならば，ある配分 x がパレート最適であるとは，

$$u_t(y_t) \geqq u_t(x_t) \quad \text{for } t=0, 1, \cdots\cdots$$

で，しかも上記の不等式の少なくとも1個が厳密な不等号で成立するような配分 y が A のなかに存在しないということである。

また以下の推論で重要な踏み石の役割を果す短期パレート最適（short-run Pareto-optimal）の概念は，つぎのように定義される。(6) ある配分 x が短期パレート最適であるというのは，上記のパレート最適の定義にさらに加えて，ある有限の t' が存在して

$$y_t = x_t \quad \text{for } t=t', \ t'+1, \cdots\cdots$$

という条件が満たされることをいう。すなわち，当該の配分 x がある有限の t' 以降はまったく配分

注（6） Balasko and Shell, "The Overlapping-Generations Model I", p. 286 参照。

を同じくするあらゆる配分 $y \in A$ に対して，t' より前の相違にのみもとづき

$$u_t(y_t) \geqq u_t(x_t) \quad \text{for } t=0, 1, \cdots\cdots$$

かつ少なくとも1個の不等式は厳密な不等号で成立，という形で劣るのでないかぎり，x は短期パレート最適であると定義されるのである。

どんな $y \in A$ もが x に勝りえないのである以上，$t<t'$ の配分のみが x と異なる $y \in A$ が x に勝りえないのは当然のことであるから，x がパレート最適であれば，それはいうまでもなく短期パレート最適である。しかし，明らかにその逆はかならずしも真ではない。すなわち短期パレート最適な配分であるからといって，そのすべてがかならずパレート最適な配分になるわけではない。実は無限期の重複世代経済の場合，第一基本定理の証明がかならずしも簡単には運ばない原因の一つは，この点に由来しているのであって，したがってわれわれの考察もその点をめぐってはいささか慎重で手の込んだものにならざるをえない。以下での行論の手筈としては，われわれはまず短期パレート最適の概念が有限期経済の通常のパレート最適概念と本質的に異なっていない点にかんがみ，最初に当該の無限期貨幣経済での競争均衡がかならず短期パレート最適になることを証明する。そしてつぎの推論の段階として，そのような短期パレート最適が真のパレート最適となるための必要かつ十分条件を明らかにし，その意味において真のパレート最適配分となりうる短期パレート最適配分を特性化することを試みる。無限期貨幣経済における厚生経済学の第一基本定理は，これら二段階の議論を経，その結果を総合することによって，はじめて確立される運びとなるであろう。

6　無限期貨幣経済の競争均衡がかならず短期パレート最適になることは，通常の手法をつうじてきわめて容易に示すことができる。本節では，まずそのための準備作業としてつぎの補助定理を成立せしめたのちにおいて，それを用いて当該の主張を証明することにしよう。

補助定理 1　個人の効用最大化問題

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{aligned} & p^t x_t^t + m_t \leqq p^t \omega_t^t \\ & p^{t+1} x_t^{t+1} \leqq p^{t+1} \omega_t^{t+1} + m_t \\ & (x_t^t,\ x_t^{t+1}) \in X_t \end{aligned}$$

の下で $u_t(x_t^t,\ x_t^{t+1})$ を最大にすること

と，同じく

$$(\mathrm{II}) \qquad \begin{aligned} & p^t x_t^t + p^t x_t^{t+1} \leqq p^t \omega_t^t + p^t \omega_t^{t+1} \\ & (x_t^t,\ x_t^{t+1}) \in X_t \end{aligned}$$

の下で $u_t(x_t^t,\ x_t^{t+1})$ を最大にすること

とは等値である。

証　明

（Ⅰ）の制約条件を満たす（x_t^t, x_t^{t+1}）の集合をB_t^{I} であらわし，（Ⅱ）の制約条件を満たす（x_t^t, x_t^{t+1}）の集合をB_t^{II} であらわすことにしよう。すると，$B_t^{\mathrm{I}}=B_t^{\mathrm{II}}$ となることを示せば，定理の主張が成立することになる。なぜなら，目的関数の $u_t(x_t^t,\ x_t^{t+1})$ は両者でまったく同一だからである。

（a）　$B_t^{\mathrm{I}}\subset B_t^{\mathrm{II}}$となること。

すべての（x_t^t, x_t^{t+1}）$\epsilon B_t^{\mathrm{I}}$ に対して，いうまでもなく適当な m_t が存在して

$$p^t x_t^t+m_t \leqq p^t \omega_t^t$$

$$p^{t+1} x_t^{t+1} \leqq p^{t+1} \omega_t^{t+1}+m_t,$$

したがってこれらの不等式を足し合わせれば，両辺から m_t が消去されて

$$p^t x_t^t+p^{t+1}x_t^{t+1} \leqq p^t\omega_t^t+p^{t+1}\omega_t^{t+1}$$

となる。よって（x_t^t, x_t^{t+1}）$\epsilon B_t^{\mathrm{II}}$ でもある。

（b）　$B_t^{\mathrm{I}}\supset B_t^{\mathrm{II}}$ となること。

すべての（x_t^t, x_t^{t+1}）$\epsilon B_t^{\mathrm{II}}$ について，m_t を

$$m_t=p^t\omega_t^t-p^t x_t^t$$

と定義すれば，

$$p^t x_t^t+m_t=p^t \omega_t^t \tag{6.1}$$

が成り立つことは自明。他方（x_t^t, x_t^{t+1}）$\epsilon B_t^{\mathrm{II}}$ から

$$p^t x_t^t+ p^{t+1} x_t^{t+1} \leqq p^t \omega_t^t+ p^{t+1}\omega_t^{t+1}$$

であるから，この両辺から（6.1）を辺々差し引くことによって

$$p^{t+1} x^{t+1}-m_t \leqq p^{t+1} \omega_t^{t+1},$$

ゆえに

$$p^{t+1} x_t^{t+1} \leqq p^{t+1} \omega_t^{t+1}+m_t \tag{6.2}$$

を得る。よって（6.1），（6.2）から

$$(x_t^t,\ x_t^{t+1})\ \epsilon B_t^{\mathrm{I}}$$

となる。

定理 1　(p, x) を当該貨幣経済の競争均衡とすれば，x はかならず短期パレート最適となっている。

証　明

x が短期パレート最適ではなかったとしてみると，定義から，ある有限の t の値 $t'\geqq 0$ とある達成可能な配分 $y=(y_0, y_1, \cdots\cdots, y_t, \cdots\cdots)$ が存在して，それらについて

$$(6.3)\qquad y^t_{t-1}+y^t_t=x^t_{t-1}+x^t_t \quad \text{for } t=1, 2, \cdots\cdots$$

$$(6.3)\qquad y_t=x_t \quad \text{for } t=t', t'+1, \cdots\cdots$$

$$(6.5)\qquad u_t(y_t)\geqq u_t(x_t) \quad \text{for } t=0, 1, \cdots\cdots$$

が成り立ち，しかも最後の不等式のなかで少なくとも1個は厳密な不等号で成り立つのでなくてはならない。

すると（6.5）から世代0の個人については

$$p^1 y^1_0 \geqq p^1 x^1_0$$

が，また一般に世代 t（$t=1, 2, \cdots\cdots$）の個人については，前の補助定理の帰結にもとづき

$$p^t y^t_t + p^{t+1} y^{t+1}_t \geqq p^t x^t_t + p^{t+1} x^{t+1}_t \qquad \text{for } t=1, 2, \cdots\cdots$$

が成り立たねばならず，これらの不等式のうち少なくとも1個は厳密な不等号で成り立たねばならない。そこでこれらを t についてすべて足し合わせ，(6.4)から t' 以後の t については $y_t=x_t$ となっていることを考慮に入れれば，

$$\begin{aligned} &p^1 y^1_0 + p^1 y^1_1 + \cdots\cdots + p^{t'-1} y^{t'-1}_{t'-1} + p^{t'} y^{t'}_{t'-1} \\ &\quad > p^1 x^1_0 + p^1 x^1_1 + \cdots\cdots + p^{t'-1} x^{t'-1}_{t'-1} + p^{t'} x^{t'}_{t'-1} \end{aligned}$$

となる。ところが（6.3）から

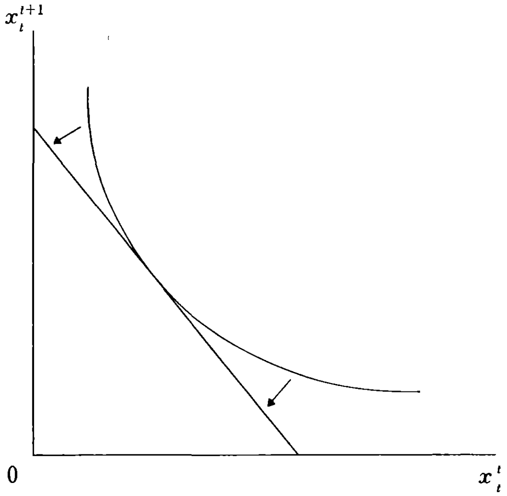
$$y^t_{t-1}+y^t_t=x^t_{t-1}+x^t_t \quad \text{for } t=1, 2, \cdots\cdots, t'$$

であるから，これらにそれぞれ $p^1, p^1, \cdots\cdots, p^{t'}$ をかけて足し合わせ．$y^{t'}_{t'}=x^{t'}_{t'}$ であることを考慮すれば，明らかに上記の不等式と矛盾した結果を得る。証了。

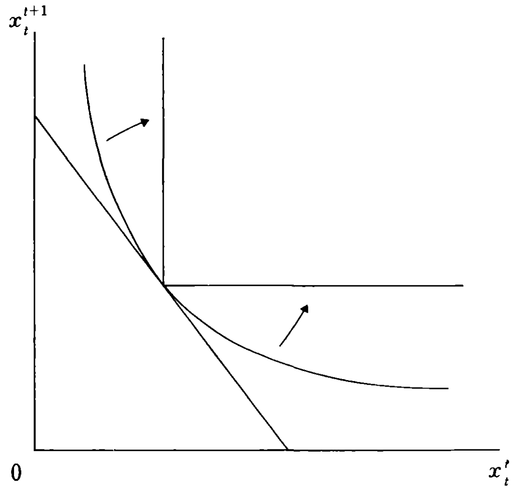
7　前節の議論からさらに進んで競争均衡と無限期のパレート最適との関係を確立するためには，各個人の無差別（超）曲面の曲率に関して一様にある種の仮定を課することが必要となる。というのは，目下のモデル経済では期間が無限の将来に拡がっているところから，それぞれの t に応ずる無差別曲面は原点に対して厳密に凸であっても，t を無限大に近づけるにつれてそれは平面に近づくかもしれず，その場合には競争均衡がパレート最適とはならない事例が生じうるからである[7]。そ

注（7） たとえば Shell, *op. cit.*, pp. 1003-1006 参照。

れゆえわれわれは下記のような論法をつうじて，各個人の無差別曲面の曲率が一様に下から有界であることを仮定し，またのちに明らかになる理由からそれらが一様に上からも有界であることを仮定する。これは2次元の図で平易にあらわせば，t を∞に近づけても，各個人の無差別曲線が第1a図のように直線形に近づいたり，第1b図のようにL字形に近づいたりしないことを意味している。



第1a図



第1b図

この仮定を精確に記述するには，無差別曲面の曲率に対していっそう厳密な定義を下すことが必要となるが，その点についてはわれわれはボーグリン＝ケイディングがその最近の論文[8]で導入した接双曲面による曲率測度の定義をより一般化したものを採択する。無差別曲線が双曲線に類する形態をとることを考えれば，この定義のほうが他の定義たとえばバラスコ＝シェルが用いた接球面による定義（いわゆるガウス曲率[9]）や奥野＝チルハの接放物面による定義[10]などよりもはるかに自然なものであるということができよう。

いまそのための準備として $\bar{x}=(\bar{x}_t^t,\ \bar{x}_t^{t+1})\in R_{++}^{2n}$, $\bar{p}=(\bar{p}^t, \bar{p}^{t+1})\in R_{++}^{2n}$, $a\in R_+$ について

$$
\begin{aligned}
C(\bar{x},\bar{p},a)\equiv\{(x_t^t,\ x_t^{t+1})\in R_{++}^{2n} \mid\ & \bar{p}^t(x_t^t-\bar{x}_t^t)+\bar{p}^{t+1}(x_t^{t+1}-\bar{x}_t^{t+1}) \\
& \geqq -\frac{a}{\bar{p}^t\bar{x}^t}(\bar{p}^t(x_t^t-\bar{x}_t^t)\cdot\bar{p}^{t+1}(x_t^{t+1}-\bar{x}_t^{t+1})), \\
& \bar{p}^t(x_t^t-\bar{x}_t^t)+\bar{p}^{t+1}(x_t^{t+1}-\bar{x}_t^{t+1})\geqq 0\}
\end{aligned}
$$

注（8） A. Borglin and H. Keiding, "Efficiency in One-Sector, Discrete-Time, Infinite-Horizon Models", *Journal of Economic Theory*, June 1984.

（9） Balasko and Shell, *op. cit.*, pp. 296 ff.

（10） Okuno and Zilcha, *op. cit.*, pp. 803-804.

のように定義すれば，$C(\bar{x},\ \bar{p},\ a)$ は $(\bar{x}_t^t,\ \bar{x}_t^{t+1})$ を通る接双曲面の凸包であり，$(\bar{p}^t,\ \bar{p}^{t+1})$ が点 $(\bar{x}_t^t,\ \bar{x}_t^{t+1})$ でのその接平面の法線ベクトルとなっている。そしてわれわれは，a の増減に対して，$C(\bar{x}, \bar{p}, a)$ がつぎのように対応することを容易に確かめることができるであろう。

補助定理 2 (i) $a \geqq a' \geqq 0$ とすれば，$C(\bar{x}, \bar{p}, a) \subset C(\bar{x}, \bar{p}, a')$ である。

(ii) $a \to 0$ とすれば，$C(\bar{x}, \bar{p}, a)$ は

$$\{(x_t^t,\ x_t^{t+1}) \in R_+^{2n} \mid \bar{p}^t (x_t^t - \bar{x}_t^t) + \bar{p}^{t+1} (x_t^{t+1} - \bar{x}_t^{t+1}) \geqq 0\}$$

に収束する。

(iii) $n=1$ のとき，$a \to \infty$ とすれば，$C(\bar{x}, \bar{p}, a)$ は

$$\{(x_t^t,\ x_t^{t+1}) \in R_+^{2n} \mid x_t^t \geqq \bar{x}_t^t,\ x_t^{t+1} \geqq \bar{x}_t^{t+1}\}$$

に収束する。

証　明

(i) $(x_t^t,\ x_t^{t+1}) \in C(\bar{x}, \bar{p}, a)$ とすれば，定義により

$$\begin{aligned} &\bar{p}^t (x_t^t - \bar{x}_t^t) + \bar{p}^{t+1} (x_t^{t+1} - \bar{x}_t^{t+1}) \\ &\geqq -\frac{a}{\bar{p}^t \bar{x}^t} (\bar{p}^t (x_t^t - \bar{x}_t^t) \cdot \bar{p}^{t+1} (x_t^{t+1} - \bar{x}_t^{t+1})) \end{aligned} \tag{7.1}$$

$$\bar{p}^t (x_t^t - \bar{x}_t^t) + \bar{p}^{t+1} (x_t^{t+1} - \bar{x}_t^{t+1}) \geqq 0 \tag{7.2}$$

である。

そこでいまケースを二つに分け，最初に $\bar{p}^t (x_t^t - \bar{x}_t^t) \cdot \bar{p}^{t+1} (x_t^{t+1} - \bar{x}_t^{t+1}) \geqq 0$ であるとすれば，$a' \geqq 0,\ \bar{p}^t \bar{x}_t^t > 0$ であることから

$$-\frac{a'}{\bar{p}^t \bar{x}_t^t} (\bar{p}^t (x_t^t - \bar{x}_t^t) \cdot \bar{p}^{t+1} (x_t^{t+1} - \bar{x}_t^{t+1})) \leqq 0$$

ゆえに (7.2) から

$$\begin{aligned} &\bar{p}^t (x_t^t - \bar{x}_t^t) + \bar{p}^{t+1} (x_t^{t+1} - \bar{x}_t^{t+1}) \\ &\geqq -\frac{a'}{\bar{p}^t \bar{x}_t^t} (\bar{p}^t (x_t^t - \bar{x}_t^t) \cdot \bar{p}^{t+1} (x_t^{t+1} - \bar{x}_t^{t+1})) \end{aligned}$$

を得る。よって

$$(x_t^t,\ x_t^{t+1}) \in C(\bar{x}, \bar{p}, a')$$

となる。

つぎに $\bar{p}^t (x_t^t - \bar{x}_t^t) \cdot \bar{p}^{t+1} (x_t^{t+1} - \bar{x}_t^{t+1}) < 0$ であるとすれば，$a \geqq a'$ であるところから

$$-\frac{a}{\bar{p}^t\bar{x}^t_t}(\bar{p}^t(x^t_t-\bar{x}^t_t)\cdot\bar{p}^{t+1}(x^{t+1}_t-\bar{x}^{t+1}_t))$$

$$\geqq-\frac{a'}{\bar{p}^t\bar{x}^t_t}(\bar{p}^t(x^t_t-\bar{x}^t_t)\cdot\bar{p}^{t+1}(x^{t+1}_t-\bar{x}^{t+1}_t)),$$

したがって (7.1) から

$$\bar{p}^t(x^t_t-\bar{x}^t_t)+\bar{p}^{t+1}(x^{t+1}_t-\bar{x}^{t+1}_t)$$
$$\geqq-\frac{a'}{\bar{p}^t\bar{x}^t_t}(\bar{p}^t(x^t_t-\bar{x}^t_t)\cdot\bar{p}^{t+1}(x^{t+1}_t-\bar{x}^{t+1}_t))$$

でもある。よってこの場合も

$$(x^t_t,\ x^{t+1}_t)\in C(\bar{x},\bar{p},a')$$

となることが判明した。

(ii) $$C_0\equiv\{(x^t_t,\ x^{t+1}_t)\in R^{2n}_{++}|\bar{p}^t(x^t_t-\bar{x}^t_t)+\bar{p}^{t+1}(x^{t+1}_t-\bar{x}^{t+1}_t)\geqq0\}$$

とすれば，明らかに $C(\bar{x},\bar{p},0)=C_0$ である。ゆえに定理の成立は $C(\bar{x},\ \bar{p},\ a)$ が a の 連続的対応であることから自明。

(iii) $n=1$ であるから，$C(\bar{x},\bar{p},a)$ は双曲線であって，その漸近線は

$$x^t_t=\bar{x}^t_t-\frac{\bar{x}^t_t}{a},\ x^{t+1}_t=\bar{x}^{t+1}_t-\frac{\bar{x}^t_t\bar{p}^t}{a\bar{p}^{t+1}}$$

である。よって $a\to\infty$ のとき，これらの漸近線が $x^t_t=\bar{x}^t_t$ および $x^{t+1}_t=\bar{x}^{t+1}_t$ に近づくことは明らかである。証了。

さて上記の $C(\bar{x},\bar{p},a)$ と，いわゆる優標高集合 $U(\bar{x}_t)\equiv\{x_t\in X_t|u_t(x_t)\geqq u_t(\bar{x}_t)\}$ を用い，$\bar{x}_t$ における $U(\bar{x}_t)$ の支持価格ベクトルを $\bar{p}$ とした上で,[11]

$$a_t(\bar{x}_t)\equiv\sup\{a|U(\bar{x}_t)\subset C(\bar{x}_t,\bar{p},a)\}$$

が定義する曲率を $\bar{x}_t$ における $U(\bar{x}_t)$ の外曲率と呼び，また

$$b_t(\bar{x}_t)\equiv\min_{i,j\in\{1,2,\cdots\cdots,n\}}\inf\{a|C_{ij}(\bar{x}_t,\bar{p},a)\subset U_{ij}(\bar{x}_t)\}$$

が定義する曲率を同じく $\bar{x}_t$ における $U(\bar{x}_t)$ の内曲率と呼ぶことにしよう。ただし後者の定義のなかの $C_{ij}(\bar{x}_t,\bar{p},a)$ と $U_{ij}(\bar{x}_t)$ はそれぞれ

注 (11) そのような支持価格ベクトルの存在は，仮定1によって保証されている。

$$C_{ij}(\bar{x}_t, \bar{p}, a) \equiv C(\bar{x}_t, \bar{p}, a) \cap \{(x_t^t,\ x_t^{t+1}) \in R_+^{2n} \mid x_t^{t,k} = \bar{x}_t^{t,k} \text{ for all } k \neq i,$$

$$x_t^{t+1,l} = \bar{x}_t^{t+1,l} \text{ for all } l \neq j\}$$

$$U_{ij}(\bar{x}_t) \equiv U(\bar{x}_t) \cap \{(x_t^t,\ x_t^{t+1}) \in R_+^{2n} \mid x_t^{t,k} = \bar{x}_t^{t,k} \text{ for all } k \neq i,$$

$$x_t^{t+1,l} = \bar{x}_t^{t+1,l} \text{ for all } l \neq j\}$$

とおいたものである。このように定義された外曲率は，明らかに $\bar{x}_t$ を通って $U(\bar{x}_t)$ を含む最小の接双曲面で測られており，また内曲率は $\bar{x}_t$ を通り，しかもすべての $i, j \in \{1, 2, \cdots\cdots, n\}$ について $U_{ij}(\bar{x}_t)$ に含まれる最大の接双曲面で測られている。さきの補助定理2から，a_t, b_t は存在することが保証され，しかも支持価格ベクトルが一意であるところから，それは $\bar{p}$ から独立である。さらに仮定1を考慮に入れれば，むしろかなり大きな経済のクラスが $a_t>0$，$b_t<\infty$ を満たすということができるであろう。

そこで以上の定義にもとづき，本稿で採用する曲率の仮定に明確な表現を与えるならば，つぎのとおりである。

仮定 3　すべての $t=1, 2, \cdots\cdots$ について $a_t(x_t)>\bar{a}$ となるような $\bar{a}$ が存在する。

仮定 4　すべての $t=1, 2, \cdots\cdots$ について $b_t(x_t)<\bar{b}$ となるような $\bar{b}$ が存在する。

すなわち，このように厳密に定義された意味において，各個人の無差別曲面は一様に下あるいは上から有界の曲率をもつと仮定されるのである。

8　仮定3および仮定4を設定することによって，われわれは初めて真のパレート最適配分となりうる短期パレート最適配分を特性化することができ，したがって当該の無限期貨幣経済における第一基本定理の証明を完うする途を切り開くことができる。

いま $\bar{x}=(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \cdots\cdots, \bar{x}_t, \cdots\cdots)$ が短期パレート最適配分であるとし，$\bar{p}=(\bar{p}^1, \bar{p}^2, \cdots\cdots, \bar{p}^t, \cdots\cdots)$ がそれを支持する価格列であるとしよう(12)。すると，ただちにつぎの二つの基本命題が成立する。

命題 1　短期パレート最適配分 $\bar{x}$ において仮定3が満たされているとき，

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{\bar{p}^t \bar{x}_t^t} = \infty$$

であるならば，$\bar{x}$ はパレート最適配分となる。

命題 2　同じく短期パレート最適配分 $\bar{x}$ において仮定4が満たされているとき，$\bar{x}$ がパレート最適配分となるためには，

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{\bar{p}^t \bar{x}_t^t} = \infty$$

注 (12)　$\bar{p}$ の存在証明については，Balasko and Shell, *op. cit.*, pp. 292-293, Lemma 4, 3 のとおりであるから，ここでは繰り返さない。

が成立しなければならない。

以下われわれはこれらの基本命題を順次に証明するが，そのためにはあらかじめつぎの二つの補助定理を証明しておくのが便利であろう。いま任意のある配分 $x \in A$ に対して達成可能な再配分列

$$\varepsilon=(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots\cdots, \varepsilon_t, \cdots\cdots)$$
$$\varepsilon_0=\varepsilon_0^1=-\varepsilon_1^1 \quad \text{for } t=0$$
$$\varepsilon_t=(\varepsilon_t^t, \varepsilon_t^{t+1})=(\varepsilon_t^t, -\varepsilon_{t+1}^{t+1}) \quad \text{for } t=1, 2, \cdots\cdots$$

を考え

$$u_0(x_0^1+\varepsilon_0^1)\geqq u_0(x_0^1) \quad \text{for } t=0$$
$$u_t(x_t^t+\varepsilon_t^t,\ x_t^{t+1}+\varepsilon_t^{t+1})\geqq u_t(x_t^t,\ x_t^{t+1}) \quad \text{for } t=1, 2, \cdots\cdots$$

で，しかもこれらの不等式のうち少なくとも1個が厳密な不等号で成り立つ場合に，そのような ε をパレート改善的な再配分列と呼ぶことにしよう。すると

補助定理 3(13)　短期パレート最適な配分 $\bar{x}$ に対して再配分列 ε がパレート改善的であるとき，$\varepsilon_t\neq 0$ となるような最小の t ($t=1, 2, \cdots\cdots$) を t' とすれば，t' 以降の t についてもかならず $\varepsilon_t\neq 0$ でありつづける。

証　明

いま $s>t'$ のようなある s について $\varepsilon_s=0$ となったとする。すると目下のモデルの構造から，上記の再配分列 ε を $(0, \cdots\cdots, 0, \varepsilon_{t'}, \cdots\cdots, \varepsilon_{s-1})$ の部分と $(\varepsilon_s, \varepsilon_{s+1}, \cdots\cdots)$ の部分に分割して考えることができ，そこで新たに後者の部分をすべて0とおいた再配分列

$$\varepsilon'=(0, \cdots\cdots, 0, \varepsilon_{t'}, \cdots\cdots, \varepsilon_{s-1}, 0, \cdots\cdots)$$

を考えれば，ε' もまた明らかに達成可能である。そして配分 $\bar{x}'=\bar{x}+\varepsilon'$ については，当然

$$u_t(\bar{x}_t+\varepsilon'_t)\geqq u_t(\bar{x}_t) \quad \text{for } t=0, 1, \cdots\cdots$$

で，しかもそれは $t=t', \cdots\cdots, s-1$ のところで確実にもとの配分 $\bar{x}$ と異なっている。ゆえに任意の実数 $\alpha, 0<\alpha<1$ について新しい配分 $\bar{x}''=\alpha\bar{x}'+(1-\alpha)\bar{x}=\bar{x}+\alpha\varepsilon'$ を構成すれば，$\bar{x}''$ はやはり達成可能で，$t', \cdots\cdots, s-1$ の個人については

$$u_t(\bar{x}_t+\alpha\varepsilon_t')>u_t(\bar{x}_t)$$

が成り立たねばならない。またつくり方から $t\geqq s$ の t については，いうまでもなく

注 (13)　Balasko and Shell, *op. cit.*, p. 295, Lemma 5. 4 参照。

$$\bar{x}_t+\alpha\varepsilon_t'=\bar{x}_t$$

となっているから，これは明らかに $\bar{x}$ が短期パレート最適であるという仮定と矛盾する。証了。

補助定理[14] 4　短期パレート最適な配分を $\bar{x}$，その支持価格列を $\bar{p}$ とし，$\bar{x}$ に対してパレート改善的な再配分列を ε とすれば，すべての t について

$$p^{t+1}\varepsilon_{t+1}^{t+1}\leqq p^t\varepsilon_t^t\leqq\cdots\cdots\leqq p^1\varepsilon_1^1\leqq 0$$

となる。また前の補助定理で定義した t' 以降の t については，不等号がすべて厳密な形で成立する。

証　明

証明は帰納法による。

まず仮定から

$$u_0(\bar{x}_0^1+\varepsilon_0^1)\geqq u_0(\bar{x}_0^1)$$

であるから，

$$\bar{p}^1(\bar{x}_0^1+\varepsilon_0^1)\geqq\bar{p}^1\bar{x}_0^1$$

が成立し，したがって

$$\bar{p}^1\varepsilon_0^1\geqq 0,$$

そして $\varepsilon_0^1=-\varepsilon_1^1$ であることから

$$\bar{p}^1\varepsilon_1^1\leqq 0$$

である。また $\varepsilon_0^1\neq 0$ ならば，効用関数の強擬凹性から，明らかに上記の不等式は厳密な不等号で成立する。

つぎに

$$\bar{p}^t\varepsilon_t^t\leqq\bar{p}^{t-1}\varepsilon_{t-1}^{t-1}\leqq\cdots\cdots\leqq\bar{p}^1\varepsilon_1^1\leqq 0$$

で，しかも1から $t-1$ までの τ のなかではじめて $\varepsilon_\tau\neq 0$ となる τ を t' とするとき，t' 以降は不等号が厳密な形で成り立つことを仮定して，

$$\bar{p}^{t+1}\varepsilon_{t+1}^{t+1}\leqq\bar{p}^t\varepsilon_t^t\leqq\bar{p}^{t-1}\varepsilon_{t-1}^{t-1}\leqq\cdots\cdots\leqq\bar{p}^1\varepsilon_1^1\leqq 0 \tag{8.1}$$

注 (14)　Balasko and Shell, *op. cit.*, pp. 295-296, Lemma 5.5参照。

が成り立つこと，および1から t までの τ のなかではじめて $\varepsilon_\tau \neq 0$ となる τ を t'' とするとき，t'' 以降は不等号が厳密に成り立つことを証明する。

まず（8.1）が成り立つことをいうためには，明らかに

$$\bar{p}^{t+1}\varepsilon_{t+1}^{t+1} \leqq \bar{p}^t \varepsilon_t^t$$

となることだけをいえばよい。これは前と同様，ε がパレート改善的であることから

$$u_t(\bar{x}_t^t+\varepsilon_t^t,\ \bar{x}_t^{t+1}+\varepsilon_t^{t+1}) \geqq u_t(\bar{x}_t^t,\ \bar{x}_t^{t+1}),$$

したがって

$$\bar{p}^t \varepsilon_t^t + \bar{p}^{t+1}\varepsilon_t^{t+1} \geqq 0$$

となり，また ε の達成可能性から $\varepsilon_t^{t+1} = -\varepsilon_{t+1}^{t+1}$ となることを考えれば，明らかであろう。

ついで後半の主張の証明であるが，いまもし t'' が $1,\cdots\cdots,t-1$ のいずれかであるとすれば，そのいずれであっても，仮定と前の補助定理の帰結とから，当該の不等式はかならず厳密な不等号で成立することになるから，結局 t'' が最後の t になるとき，すなわち $\varepsilon_t = 0$ となるときに

$$\bar{p}^{t+1}\varepsilon_{t+1}^{t+1} < \bar{p}^t \varepsilon_t^t$$

となることをいえばよいわけである。しかし，これはふたたび効用関数の強擬凹性を使えば明らかである。すなわち $\varepsilon_t \neq 0$ である以上，$\bar{x}_t+\varepsilon_t \neq \bar{x}_t$ であるから，

$$\bar{p}^t \varepsilon_t^t + \bar{p}^{t+1}\varepsilon_t^{t+1} > 0$$

とならざるをえず，それに $\varepsilon_t^{t+1} = -\varepsilon_{t+1}^{t+1}$ を代入することによって，所期の結果が成立するほかはない。よって証了。

ここで以上の補助定理の帰結にもとづいて，いよいよ前掲の二つの基本命題の証明にとりかかることにしよう。

命題1の証明

$\bar{x}$ がパレート最適ではなかったと想定してみる。するとパレート改善的な再配分列 ε があって，定義から

$$(\bar{x}_t^t+\varepsilon_t^t,\ \ \bar{x}_t^{t+1}+\varepsilon_t^{t+1}) \in U(\bar{x}_t),$$

ゆえに仮定3から $a_t(\bar{x}_t)$ に下限 $\bar{a}$ があることと，補助定理2から $a_t(\bar{x}_t)$ が小さくなれば $C(\bar{x}_t, (\bar{p}^t, \bar{p}^{t+1}), a_t)$ がむしろ拡がることから，

$$(\bar{x}_t^t+\varepsilon_t^t,\ \bar{x}_t^{t+1}+\varepsilon_t^{t+1})\in C(\bar{x}_t,\ (\bar{p}^t,\bar{p}^{t+1}),\ \bar{a})$$

となる。よって $C(\bar{x}_t,\ (\bar{p}^t,\ \bar{p}^{t+1}),\ \bar{a})$ の定義から

$$\bar{p}^t\varepsilon_t^t+\bar{p}^{t+1}\varepsilon_t^{t+1}\geqq-\frac{\bar{a}}{\bar{p}^t\bar{x}_t^t}\bar{p}^t\varepsilon_t^t\cdot\bar{p}^{t+1}\varepsilon_t^{t+1}$$

あるいは

$$-\bar{p}^t\varepsilon_{t-1}^t+\bar{p}^{t+1}\varepsilon_t^{t+1}\geqq\frac{\bar{a}}{\bar{p}^t\bar{x}_t^t}\bar{p}^t\varepsilon_{t-1}^t\cdot\bar{p}^{t+1}\varepsilon_t^{t+1}$$

となるが，ここで $\varepsilon_t\neq0$ となる最小の t を $t'-1$ とすれば，補助定理4によって t' 以降のすべての t については $\bar{p}^t\varepsilon_{t-1}^t=-\bar{p}^t\varepsilon_t^t>0$, $\bar{p}^{t+1}\varepsilon_t^{t+1}=-\bar{p}^{t+1}\varepsilon_{t+1}^{t+1}>0$ となり，したがって

$$\bar{p}^t\varepsilon_{t-1}^t\cdot\bar{p}^{t+1}\varepsilon_t^{t+1}>0\quad\text{for } t=t',t'+1,\cdots\cdots$$

となって，前の不等式の両辺を $\bar{p}^t\varepsilon_{t-1}^t\cdot\bar{p}^{t+1}\varepsilon_t^{t+1}$ で割ることができ，

$$-\frac{1}{\bar{p}^{t+1}\varepsilon_t^{t+1}}+\frac{1}{\bar{p}^t\varepsilon_{t-1}^t}\geqq\frac{\bar{a}}{\bar{p}^t\bar{x}_t^t}\quad\text{for } t=t',\ t'+1,\cdots\cdots$$

が得られる。

これらの式を t' からある T までについて足し合わせれば，各式の左辺の第1項はつぎの式の同じく左辺の第2項と相殺され，結局

$$\sum_{t=t'}^{T}\frac{\bar{a}}{\bar{p}^t\bar{x}_t^t}\leqq\frac{1}{\bar{p}^t\varepsilon_{t-1}^t}-\frac{1}{\bar{p}^{T+1}\varepsilon_T^{T+1}}<\frac{1}{\bar{p}^t\varepsilon_{t-1}^t}$$

となる。T を大きくしていけば補助定理4から $\bar{p}^{T+1}\varepsilon_T^{T+1}=-\bar{p}^{T+1}\varepsilon_{T+1}^{T+1}$ は次第に大きくなり，したがって右辺は次第に大きくなるが，いずれにしてもそれは $1/\bar{p}^t\varepsilon_{t-1}^t$ を越えることはない。また他方 $\bar{a}/\bar{p}^tx_t^t$ を $t=0,\cdots,\ T-1$ にわたって加えたものは有限個の正数の和にすぎないから，以上を総合して

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{\bar{a}}{\bar{p}^t\bar{x}_t^t}<\infty$$

という帰結が導かれたことになる。ところがこれは明らかに命題の仮定と矛盾する。証了。

命題2の証明

もし結論に反して

$$B\equiv\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{\bar{p}^t\bar{x}_t^t}<\infty$$

であれば，$\bar{x}$ に対してパレート改善的な再配分列が見出され，したがって $\bar{x}$ がパレート最適とはな

れないことを示せばよい。

まず上記の背理法の仮定が成り立つならば，

$$\lim_{t\to\infty} \bar{p}^t \bar{x}_t^t = \infty$$

となるから，ある t' 以降はかならずどの t についても

$$\bar{p}^{t,i(t)} \bar{x}_t^{t,i(t)} \geqq 1$$

となるような財 $i(t) \in \{1, 2, \cdots\cdots, n\}$ が見出されるのでなくてはならない。そこでそのような $i(t)$ を用いて，問題の再配分列をつぎのような要領で構成することにする。

まず数列 $\delta_t(t=1, 2, \cdots\cdots)$ を下記のように定めることにしよう。

$$\delta_t = 0 \quad \text{for } t < t'$$

$$\delta_t = \frac{1}{\bar{p}^{t,i(t)}(1+\bar{b}B)} \quad \text{for } t = t'$$

以降，逐次的に

$$\frac{1}{\bar{p}^{t+1,i(t+1)}\,\delta_{t+1}} = \frac{1}{\bar{p}^{t,i(t)}\,\delta_t} - \frac{\bar{b}}{\bar{p}^t\,\bar{x}_t^t} \quad \text{for } t \geqq t'.$$

すると，つくり方から $t > t'$ のどの t についても

$$\frac{1}{\bar{p}^{(t+1),i(t+1)}\,\delta_{t+1}} = \frac{1}{\bar{p}^{t',i(t')}\,\delta_{t'}} - \sum_{\tau=t'}^{t} \frac{\bar{b}}{\bar{p}^\tau\,\bar{x}_\tau^\tau}$$

$$= 1 + \sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{\bar{b}}{\bar{p}^\tau\,\bar{x}_\tau^\tau} - \sum_{\tau=t'}^{t} \frac{\bar{b}}{\bar{p}^\tau\,\bar{x}_\tau^\tau}$$

$$\geqq 1$$

となるから，δ_{t+1} はすべて一意的に定義され，すべての $t=1, 2, \cdots\cdots$ について

$$0 \leqq \bar{p}^{t,i(t)}\,\delta_t \leqq 1$$

である。そこでわれわれは上記の $\{\delta_t\}$ にもとづいて，ある再配分列 $\varepsilon \equiv \{\varepsilon_t\}$ を

$$\varepsilon_t = (\varepsilon_t^t, \varepsilon_t^{t+1}) = (-\delta_t e_{i(t)}, \delta_{t+1}\, e_{i(t+1)})$$

のように構成する。ここで $e_{i(t)}$ は第 $i(t)$ 成分のみが 1 で他のすべての成分が 0 にひとしい n 次元ベクトルである。

こうしてつくった再配分列 ε は，δ_t が

$$0 \leqq \delta_t \leqq \bar{x}_t^{t,i(t)}$$

の条件を満たすところから[15]，明らかに達成可能であり，またそれを用いて

$$\tilde{x}_t^t = \bar{x}_t^t + \varepsilon_t^t$$

$$\tilde{x}_t^{t+1} = \bar{x}_t^{t+1} + \varepsilon_t^{t+1}$$

と定義すれば，$\tilde{x}_t = (\tilde{x}_t^t, \tilde{x}_t^{t+1})$ は $\bar{x}_t$ の優標高集合 $U(\bar{x}_t)$ に含まれることが容易に分かる。事実

$$\begin{aligned}
&\bar{p}^t(\tilde{x}_t^t - \bar{x}_t^t) + \bar{p}^{t+1}(\tilde{x}_t^{t+1} - \bar{x}_t^{t+1}) \\
&= -\bar{p}^t\,\delta_t\, e_{i(t)} + \bar{p}^{t+1}\,\delta_{t+1}\, e_{i(t+1)} \\
&= -\bar{p}^{t,i(t)}\,\delta_t + \bar{p}^{t+1,i(t+1)}\,\delta_{t+1} \\
&\overset{(16)}{\geqq} \frac{\bar{b}}{\bar{p}^t \bar{x}_t^t} \bar{p}^{t,i(t)}\delta_t \cdot \bar{p}^{t+1,i(t+1)}\,\delta_{t+1} \\
&= -\frac{\bar{b}}{\bar{p}^t \bar{x}_t^t} \bar{p}^t(\tilde{x}_t^t - \bar{x}_t^t) \cdot \bar{p}^{t+1}(\tilde{x}_t^{t+1} - \bar{x}_t^{t+1})
\end{aligned}$$

となり，またこの結果にもとづいて $\bar{p}^t(\tilde{x}_t^t - \bar{x}_t^t) + \bar{p}^{t+1}(\tilde{x}_t^{t+1} + \bar{x}_t^{t+1}) \geqq 0$ となることも自明であるから，仮定4の条件 $b_t(\bar{x}_t) < \bar{b}$ を考慮すれば

$$\begin{aligned}
&\tilde{x} \in C(\bar{x}_t, (\bar{p}^t, \bar{p}^{t+1}), \bar{b}) \\
&\quad \subset C(\bar{x}_t, (\bar{p}^t, \bar{p}^{t+1}), b_t(\bar{x}_t)) \subset U(\bar{x}_t)
\end{aligned}$$

とならねばならないのである。そして $\{\delta_t\}$ は非ゼロであるから，$\tilde{x}$ は $\bar{x}$ と相異なる配分であり，したがって仮定1の効用関数の強擬凹性から，かならず $\bar{x}$ よりパレートの意味でより優れた配分 $\alpha\tilde{x} + (1-\alpha)\bar{x} \in A$，$0 < \alpha < 1$ が存在するのでなくてはならない。これは明らかに $\bar{x}$ がパレート最適であるという仮定と両立しない。よって証了。

9　以上でわれわれは本稿での主要な分析をほぼ終了したことになる。こうして命題1，命題2が確立されれば，それらを総合することによってつぎの基本定理が成立することはいうまでもないであろう。

定理2　短期パレート最適配分 $\bar{x}$ において，仮定3，仮定4がともに成立しているとすれば，$\bar{x}$ は条件

注（15）δ_t のつくり方から $t < t'$ の t については $\delta_t = 0$，また $t \geqq t'$ の t については

$$0 \leqq \bar{p}^{t,i(t)}\,\delta_t \leqq 1 \leqq \bar{p}^{t,i(t)}\bar{x}_t^{t,i(t)}$$

である。

（16）$t < t'-1$ の場合は，$\delta_t = \delta_{t+1} = 0$ であるから，不等式は $0=0$ の自明な形で成立する。$t = t'-1$ の場合は，式の右辺は $0 + (1/1 + \bar{b}B) > 0$，左辺は $=0$ となるから，それは厳密な不等号で成立する。$t > t'-1$ の場合は，定義式から

$$\frac{1}{\bar{p}^{t,i(t)}\delta_t} - \frac{1}{\bar{p}^{t+1,i(t+1)}\delta_{t+1}} = \frac{1}{\bar{p}^t \bar{x}_t^t},$$

ゆえにその両辺に $\bar{p}^{t+1,i(t+1)}\delta_{t+1} \cdot \bar{p}^{t,i(t)}\delta_t$ をかけることにより，厳密な等式で成立する。

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{\bar{p}^t\,\bar{x}_t^t}=\infty$$

が満たされるとき，そしてそのときのみパレート最適配分となる。

そして定理2をさらに前の定理1と結びつけることによって，所期の厚生経済学の第一基本定理が成立することも明らかであろう。

系（厚生経済学の第一基本定理）

$(\bar{p},\ \bar{x})$ を当該重複世代経済の競争均衡とし，$\bar{x}$ において仮定3，仮定4がともに成立しているとする。すると $\bar{x}$ は条件

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{\bar{p}^t\,\bar{x}_t^t}=\infty$$

が満たされるとき，そしてそのときにのみパレート最適配分となる。

ところで上記の議論において枢要な役割を演じた条件

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{\bar{p}^t\,\bar{x}_t^t}=\infty$$

は，もしそれが満たされないとすると，価値和の列 $\{\bar{p}^t\,\bar{x}_t^t\}$ が無限に発散してしまうことを意味している。これはその経済学的な内容に即していえば，(1)価格の列 $\{\bar{p}^t\}$ が限りなく上昇するか，あるいは(2)数量の列 $\{\bar{x}_t\}$ が限りなく成長するか，そのいずれかを意味しているということができよう。前者の事態が生じる場合には，貨幣の相対価格したがってその購買力がほとんどゼロとなるために，また後者の事態が生じる場合には，所得に対する貨幣の比重がほとんど無視しうるほどのものとなるために，価値貯蔵手段としての貨幣の機能が失われるにいたると考えられる。そこでその種の事態が起きないような経済的環境を確保するために，この条件が要請されていると解すればよいであろう。

問題の条件が満たされない場合には，競争均衡下の配分であってもパレート最適とはなりえないような事例を示すことは容易である。いま1種類の財のみから成る経済を想定して，各世代の個人の効用関数が

$$u_0(x_0^1)=\log x_0^1 \quad \text{for} \quad t=0$$
$$u_t(x_t^t,\ x_t^{t+1})=\log x_t^t+\log x_t^{t+1} \quad \text{for} \quad t=1,2,\cdots\cdots$$

で定義され，財および貨幣の初期賦存量が

$$\omega_0^1=2,\ M=1 \quad \text{for} \quad t=0$$

$$(\omega_t^t,\ \omega_t^{t+1})=(4,\ 2) \quad \text{for} \quad t=1,2,\cdots\cdots$$

で与えられるとしてみよう。すると効用最大化の計算の結果，需要関数は

$$f_0(p^1)=\frac{2p^1+1}{p^1} \quad \text{for} \quad t=0$$

$$f_t(p^t,\ p^{t+1})=\left(\frac{2p^t+p^{t+1}}{p^t},\ \frac{2p^t+p^{t+1}}{p^{t+1}}\right) \quad \text{for} \quad t=1,2,\cdots\cdots$$

$$f_t^m(p^t, p^{t+1})=2p^t-p^{t+1}$$

のように求められるから，需給均衡の条件を考慮することによって

$$p^{t+1}=2p^t-1,\ \ p^t>0 \quad \text{for} \quad t=1,2,\cdots\cdots$$

であらわされる複数の競争均衡解が得られることになる。たとえば $\bar{p}^1=1$ とおけば

$$\bar{p}=(1,1,\cdots\cdots,1,\cdots\cdots)$$

$$\bar{x}=(3,(3,3),\cdots\cdots,(3,3),\cdots\cdots)$$

が一つの競争均衡解となり，また $\bar{p}^1=2$ とおけば

$$\bar{p}=(2,3,\cdots\cdots,\ 2^{t-1}+1,\cdots\cdots)$$

$$\bar{x}=\left(\frac{5}{2},\ \left(\frac{7}{2},\ \frac{7}{3}\right),\ \cdots\cdots,\ \left(\frac{2^{t+1}+3}{2^{t-1}+1},\ \frac{2^{t+1}+3}{2^t+1}\right),\ \cdots\cdots\right)$$

がもう一つの競争均衡解となる。ところが，前者の配分はパレート最適となるが，後者の配分はパレート最適とはならない。事実このモデルでは $\bar{p}^1>1$ のような $\bar{p}^1$ を選べば，問題の条件は決して成立せず，いかなる競争均衡配分もパレート最適とはなりえないことを示すことができる。すなわち前記の均衡条件から

$$p^{t+1}=2^{t-1}(p^1-1)+1$$

となるから，$\bar{p}^1>1$ とすれば，すべての $t=1,2,\cdots\cdots$ について $\bar{p}^t>1$，したがってすべての $t=1,2,\cdots\cdots$ について $\bar{x}_t^t \geqq 3$ となり，

$$\begin{aligned}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{\bar{p}^t\,\bar{x}_t^t}&=\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{(2^{t-1}(\bar{p}^1-1)+1)\bar{x}_t^t}\\&<\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{2^{t-1}(\bar{p}^1-1)\cdot 3}\\&=\frac{1}{3(\bar{p}^1-1)}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{2^{t-1}}\\&=\frac{2}{3(\bar{p}^1-1)}<\infty\end{aligned}$$

となって，前述の条件は満たされないことが分かる。ゆえに命題2によって，このモデルで競争均衡がパレート最適となるためには，$\bar{p}^t=1$ となるのでなくてはならない。

他方 $\bar{p}^t=1$ であれば，すべての t について $\bar{p}^t=1$，$\bar{x}_t^t=\bar{x}_t^{t+1}=3$ となるから

$$\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{\bar{p}^t\,\bar{x}_t^t}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots=\infty$$

となり，命題1からこの競争均衡はかならずパレート最適となるのである。

10　以上にとり扱ってきた本稿のモデルでは，貨幣がもっぱらある世代からつぎの世代へと将来に向かって繰り越されていき，その工夫をつうじて各世代の後半生の最適消費水準が確保される仕組みになっている。このようなパターンが結果するのは，もともとどの世代の個人にとっても，その選好と相対的に考えられた初期賦存量ないしは所得が若いときにむしろゆたかであり，年とったときに乏しくなると想定されるからである。

いまこれとは反対に，選好に比しての所得が若いときに相対的に乏しく，大成してからゆたかになるとするならば，どうであろうか。明らかにその場合の最適消費計画は，若年期に所得を上回る消費を行い，その不足分を老年期の所得から補うというパターンをとるはずである。しかし，将来の財賦存量を現在の購買力に転換する手段がないかぎり，ここでもふたたびアウタルキー的行動をつうじては当該の最適消費計画を実現することは不可能である。それは，そのような若者が将来財を担保として借金をすること，すなわち借用証書を発行して不足分の支払いを1期だけ繰り延べすることによってのみ可能であろう。

ところが注意すべきことには，このような異時的取引の可能性は，1世代1個人という目下のモデルの想定の下では排除されざるをえないということである。なぜなら，その種の取引に応じうるのは同世代の若者のみであり，来期死を迎える老人はいうまでもなく相手にはなりえないはずだからである。換言すれば，同じ世代に複数の若者がいる場合には，余分の財をもつ若者はそれを老人に売り渡して，その代金である貨幣の形で富を持ち越しうるばかりでなく，またそれを同時代の若者に売り渡して，債権すなわち1期後の支払請求権の形でも富を持ち越しうるわけであるが，それは選好と財賦存量のタイプを異にする複数の若者が併存する場合に可能となるにすぎないのである。

1世代の人口を1人と想定する重複世代モデルは，もっとも簡明直截な形で無限の世代交替から生じる問題の一端を先鋭に提示する効能をもつが，いま言及したような内部貨幣現象を捨象している点からすれば，たしかに一面的すぎるという誇りを免れない。この点を拡張したより一般的な重複世代モデルを構築することは，今後に残された重要課題というべきであろう。

福 岡 正 夫（経済学部教授）
須 田 伸 一（経済学部助手）