Title	需要理論と双対性
Sub Title	Demand theory and duality
Author	川又, 邦雄
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1985
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.78, No.4 (1985. 10) ,p.370(54)- 394(78)
JaLC DOI	10.14991/001.19851001-0054
Abstract	
Notes	小特集 : レオン・ワルラス
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19851001-0054

小特集：レオン・ワルラス

需 要 理 論 と 双 対 性

川 又 邦 雄

1 序

競争市場における消費者の需要行動（とそれと並行して論じられる生産者の供給行動）に関する理論，そしてその依拠する主観的価値（効用）の理論の発展の歴史については，Schumpeter の『経済分析の歴史』(1954) をはじめ多くの学説史書で論じられている。とりわけ Gossen (1854)，Jevons (1871)，Walras (1874) に始まる近代需要理論の系譜については Stigler (1950) による詳細な展望があり，そこで論じられていない Slutsky (1915) より後の発展についても Samuelson (1974) による秀れた論述がある。また Diewert (1982) は，需要理論の双対性に焦点を合わせごく最近のものに至るまできわめて多数の文献を吟味・検討している。

本稿の基本テーマは，Diewert と同じく双対性の問題にある。需要理論の学説史について若干のコメントを補いながら，共役凸関数と劣微分の概念等を用いて双対性の理論の構造を明確にすることを主要な目的としている（とくに命題**4**，**4′**，**12**，**19**および (6.2) と (6.2)′ の関係)。二三の基本命題については，伝統的な証明の別の点からの接近法を示している（特に命題**7**，**15**，**18**など)。

財の双対概念として価格が存在するという認識を別とすれば，経済分析に最初に現われた双対性の概念は潜在価格としての意味を付加される Lagrange 乗数であろう。Walras の要請に対して Hermann Amstein が 1877 年 1 月 6 日付の書簡 (Jaffé (1965)) で答えたのがそれを用いた最初であったとされている。現代の経済分析においても Lagrange 乗数法は条件付最大化問題を解くための不可欠の用具であり，Kuhn Tuker の定理や二つの凸集合の分離平面の傾き等に関連づけられて，ますます有用性を高めている。本稿で多く言及する凸関数の共役関数や劣微分もそれらときわめて密接な関係をもつ概念である。なお，凸解析に関して，本文で定義されていない概念や証明に用いられた命題は，最後の節の数学註の中で説明されている。

2 生産関数と費用関数

$x=x_1, \cdots, x_n) \in R_+{}^n$ を投入量のベクトル $y \in R_+$ を産出量とするとき，生産関数

(2.1)　$y=F(x)$

をもつ企業を考える。[1] また $Q=(Q_1, \cdots, Q_n)\in R_+^n$ を投入量の価格を示すベクトルとし，

(2.2)　$q_i=\dfrac{Q_i}{Q_n}$　$(i=1, 2, \cdots, n)$

とおいて規準化した価格ベクトル $q=(q_1, \cdots, q_{n-1}, 1)$ を定義する。

生産関数に関する次の仮定はきわめて標準的なものである。

(A 1)（連続性）

各 $y\in R_+$ について

(2.3)　$F_+(y)\equiv\{x\in R_+^n|F(x)\geqq y\}$

は閉集合である。

(A 2)（単調性）

$x^2\geqslant x^1\geqslant 0$ なら $F(x^2)\geqslant F(x^1)$

となる。なお，上の条件に加えて x^2 が x^1 と異なるとき $F(x^2)$ も $F(x^1)$ と異なるなら強い単調性の条件が満たされているという。

(A 3)（擬凹性）

任意の x, $x'\in R_+^n$ と $0<t<1$ に対して，$F((1-t)x+tx')\geqq\min(F(x), F(x'))$ となる。なおこの結論が厳密な不等号で成立するとき，Fは強い意味で擬凹であるという。

生産量 $y\in R_+$ および生産要素価格 $Q\in R_+^n$ が与えられたとき，生産要素の費用関数は

(2.4)　$C(y, Q)=\inf\{Qx|F(x)\geqq y\}$

によって定義される。この最小値がある点 $x(y, Q)$ で達成されるとき，それを対応とみなしたものを生産要素の需要関数という。生産関数が強い意味で擬凹ならこれは一価である。

生産要素に関する次の性質は，さきの仮定（A 1)～(A 2）を用いることなく定義から直接証明できる。

命題 1（同次性）

すべての $y\in R_+$ と $Q\geqslant 0$ および $t>0$ について

(2.5)　$C(y, tQ)=tC(y, Q)$

注(1) R_+^n は n 次元の非負象現を，R_+ は R_+^1 を意味するものとする。

となる。

命題 2 （単調性）

(i) すべての $y \in R_+$ および2つの価格ベクトル Q^1, $Q^2 \in R_+{}^n$ について

(2.6) $Q^1 \geqslant Q^2$ なら $C(y, Q^1) \geqq C(y, Q^2)$

となる。また

(ii) すべての $Q \in R_+{}^n$ と2つの産出量ベクトル y^1, $y^2 \in R_+$ について

(2.7) $y^1 \geqq y^2$ なら $C(y^1, Q) \geqq C(y^2, Q)$

となる。

命題 3 （凹性）

任意の $y \in R_+$ について $C(y, Q)$ は Q についての凹関数である。

(i)の証明） Q^1, $Q^2 \in R_+{}^n$, $0 \leqq t \leqq 1$ とすると，

$$C(y, (1-t)Q^1+\lambda Q^2) = \inf\{(1-t)Q^1x+tQ^2x \mid F(x) \geqq y\}$$
$$\geqq (1-t)\inf\{Q^1x \mid F(x) \geqq y\} + t\inf_x\{Q^2x \mid F(x) \geqq y\}$$
$$= (1-t)C(y, Q^1) + tC(y, Q^2)$$

つぎに $y \in R_+$ を一定としたとき生産関数を x_n について解いた形に表現したものを（強い単調性の下ではそれが可能である（Kawamata (1974)）

(2.8) $x_n = f(y, \underset{\sim}{x})$, $\underset{\sim}{x} = (x_1, \cdots, x_{n-1})$

としよう。とくに混乱の心配のないときは x を省略して上の等量曲面の方程式を

(2.8)′ $x_n = f(\underset{\sim}{x})$ $\underset{\sim}{x} = x_1, \cdots, x_{n-1})$

と記すことにする。以下では，この関数が費用関数の双対関数であることを示すことにしよう。なお，$\underset{\sim}{x}$ が非負象現に属さない場合には $f(\underset{\sim}{x}) = +\infty$ と定義して f の定義域は R^{n-1} の全体であると考えることにする。

容易に示されるように（A 3）の仮定の下では $f(\underset{\sim}{x})$ は凸関数であり，しかも（A 1）の下では閉じた関数である（Kawamata (1974)）。また $x = (\underset{\sim}{x}, x_n) \in R_+{}^n \times R_+$ を第 n 財で規準化した価格 $q = (\underset{\sim}{q}, 1) \in R_+{}^n \times R$ で購入したときの支出額は

(2.9) $qx = \underset{\sim}{q}\underset{\sim}{x} + f(\underset{\sim}{x})$

と表現される。したがって $f(x)$ の共役関数を $f^*(\cdot)$ とおくと，その定義から（数学注M5参照），

(2.10) $f^*(\underset{\sim}{x}^*) = \sup_x(\langle \underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{x}^* \rangle - f(\underset{\sim}{x}))$

$$= -\inf_{\tilde{x}}(\langle \tilde{x},\ -\tilde{x}^* \rangle + f(\tilde{x}))$$

となる。このことから，

$$(2.11)\quad C(y,\ q) = \inf_{x}\{qx \mid F(x) \geqq y\}$$
$$= \inf_{x}\{\tilde{q}\tilde{x} + x_n \mid F(x) \geqq y\}$$
$$= \inf_{\tilde{x}}\{\tilde{q}\tilde{x} + f(\tilde{x})\}$$
$$= -f^*(-\tilde{q})$$

が導かれる。

上の最後の表現は凹関数（$-f$）の共役関数の値（$-f)_*$（q）と等しくなる[(2)]ので，費用関数は（$-f$）の共役関数（$-f)_*$ であることが知られる。この意味で費用関数は等量曲面の方程式と表裏の関係にあるということができる。

なお $f(\cdot)$ は閉じた凸関数で，ある点では有限の値をとり，どの点でも$-\infty$とならないという意味で純（Proper）凸関数である[(3)]。また，これらの性質は共役関数によっても保たれることが知られている。よってこれらの条件の下では，

$$(2.12)\quad f(\tilde{x}) = f^{**}(\tilde{x})$$
$$= (f^*)^*(\tilde{x})$$

が満たされ，凹関数（$-f$）についても同様の式が成り立つ[(4)]。このことから費用関数が与えられたときに等量曲面の方程式は前者の共役関数（の符号を変えたもの）として導出することができることが知られる。

命題 4（双対性定理）

連続性と強い単調性の下で，$y \in R_+$ を一定としたたき等量曲面が $x_n = f(\tilde{x},\ y)$ のように書けたとする。そのとき費用関数 $C(y,\ q)$ は凹関数$-f(\tilde{x},\ y)$ の共役関数になり，逆も真である。

一般に凸関数 $F: R^n \to \bar{R}$ が与えられるとき，$x^* \in R^n$ が F の x における劣微分であるとは，任意の $y \in R^n$ について

$$(2.13)\quad F(y) \geqq F(x) + \langle x^*,\ y - x \rangle$$

が成立することをいう。F の $x \in R^n$ における劣微分の全体を $\partial F(x)$ で示すことにし，それが空でない時にはFは点 x で劣微分可能であるという。

いまFのエピグラフと呼ばれるFのグラフの上方の集合を

$$(2.14)\quad \text{epi } F = \{(x,\ \alpha) : x \in R^n,\ \alpha \in R,\ \alpha \geqq F(x)\}$$

注（2），（3），（4）本稿の数学付録を参照のこと。

と定義すれば（2.13）は

(2.15)　$\langle(-x^*,\ 1),\ (x,\ F(x))\rangle \leqq (-x^*,\ 1)\mathrm{epi}\,F$

と同値である。したがってFがxで劣微分可能であるということは幾何学的には点（x, $F(x)$）を通って凸集合 epi F に垂直でない支持超平面が引けることを意味する。なおFがxにおいて微分可能である場合には通常の勾配ベクトルと一致し，

(2.16)　$\partial F=\left\{\dfrac{\partial F}{\partial x_1},\ \cdots\cdots,\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n}\right\}$

となることが知られている。

さて $q=(\underset{\sim}{q},\ 1)\in R^{n-1}\times R$ が与えられたとき，一定の $y\in R_+$ を産出するための費用が $x^0=(\underset{\sim}{x}^0,\ x_n^0)=(\underset{\sim}{x}^0,\ f(\underset{\sim}{x}^0))\in R_+^{n-1}\times R_+$ で最小になったとすると，y を産出するすべての $x\in R_+^{n+1}$ について

(2.17)　$qx\geq qx_0$

となる。この式を

(2.18)　$f(\underset{\sim}{x})\geqq f(\underset{\sim}{x}^0)-\underset{\sim}{q}(\underset{\sim}{x}-\underset{\sim}{x}^0)$

と書いてみれば，費用最小化の条件は

(2.19)　$-\underset{\sim}{q}\in\partial f(\underset{\sim}{x}^0)$

と表現できることが知られる。いうまでもなくこの条件は，古典的な費用最小化のためのつぎの命題に対応するものである。

命題 5（費用最小化条件）

規準化された要素価格ベクトル $q\in R_+^n$ が与えられたとき，一定の産出量 $y\in R$ を産出するための費用が R_+^n の内点 $x^0=x(y,\ Q)$ で最小になったとすると，

(2.20)　$\dfrac{F_i(x^0)}{F_n(x^0)}=q_i\quad(i=1,2,\cdots,\ n-1)$

となる。ただし F_i は $\partial F/\partial x_i$ を意味するものとし，関数Fは擬凹・単調増加で連続微分可能であるとしている。

（2.20）を（2.19）から導くには，陰関数定理によって $-f_i=F_i/F_n$ となることを確かめればよい。ラグランジュ乗数を用いた標準的証明は，Hicks（1939），Samuelson（1974）などに見られる。

さて Shephard の補題の名で呼ばれるつぎの命題は(2.19)と同様の関係を $-f$ の共役関数である $C(y,\cdot)$ の優偏分（$-C$の劣微分）について述べたものである。なお数学注 M 7を参照のこと。

命題 6 (Shephard の補題)

費用関数 $C(y,\ q)$ が q について凹関数で連続微分可能であるならば，各 $y \in R_+$ について

$$(2.21)\quad \frac{\partial C(y,\ q)}{\partial q_i} = x_i(y,\ q)$$

となる。ただし各辺は第 i 生産要素の需要量を示すものである。

この補題においては費用関数の微分可能性は仮定されているが，それを導出する生産関数の微分可能性についての情報はいらない。Shephard (1953) 以前の文献 (Hicks (1939, 1946, p. 331), Samuelson (1947, p. 68) など) にも同様の関係式が導かれているが，後者の微分可能性の条件を用いている。なおそれより早く Slutsky (1915, p. 41) にも $dS = x_i \cdot dp_i$ という形で同じ内容の式が記されている。

つぎに補題の内容と上に述べたことをより明確にするために，また費用関数が必ずしも凹でない場合に適用可能にするため，Shephard の定理をより一般的な形で述べ，それに，一つの初等的証明を与えることにする。これと似た方法は，Hurwicz=Uzawa (1971) によって積分可能性の問題との関係で用いられたことがある。

命題 7 (一般化された Shephard の補題)

$y \in R_+$ を一定とし，$x^1 = x(y,\ q^1)$, $x^2 = x(y,\ q^2)$ を生産要素の需要量とするとき，q^1 と q^2 は第 i 成分以外は同じで，$q_i^2 > q_i^1$ であるならば，

$$(2.22)\quad x_i^2 \leq \frac{C(y,\ q^2) - C(y,\ q^1)}{q_i^2 - q_i^1} \leq x_i^1$$

となり，$q_i^2 < q_i^1$ なら上等号の向きは逆になる。

証明) 仮定より $q^2 x^1 \geq q^2 x^2$ であるから

$$\begin{aligned}(2.23)\quad & C(q^2,\ y) - C(q^1,\ y) \\ &= q^2 x^2 - q^1 x^1 \\ &= q^2 (x^2 - x^1) + (q^2 - q^1) x^1 \\ &\leq (q^2 - q^1) x^1\end{aligned}$$

したがって q^1 と q^2 の i 番目の価格だけが異なり，$q_i^2 > q_i^1$ の場合には

$$(2.24)\quad \frac{C(q^2,\ y) - C(q^1,\ y)}{q_i^2 - q_i^1} \leq x_i^1$$

となる。もう一方の不等式は (2.23) で 1 と 2 の入れ換えることによって

$$(2.23)'\quad C(q^1,\ y) - C(q^2,\ y) \leq (q^1 - q^2) x^2$$

となることに注意すれば，同様にして導かれる。

(2.22) の q_i^2 を q_i^1 に近づけると，良く知られた $x(q)$ の連続性によって（Debreu (1959), Nikaido (1968), Arrow=Hahn (1971) を参照せよ），Shaphard の補題の結論が導かれる。

3　効用関数と最小支出関数

$x=(x_1, \cdots, x_n)\in R_+^n$ を消費量のベクトル，$U(\cdot): R_+^n\to R$ を効用関数とするとき，効用水準 $u\in R$ に対応する無差別曲面の方程式は

(3.1)　$U(x)=u$

と表現できる。また消費財の価格ベクトルを $P=(P_1, \cdots, P_n)\in R_+^n$ とし，それを第 n 財の価格を1として規準したものを $p=(p_1, \cdots, p_{n-1}, 1)$ と記すことにする。いうまでもなく

(3.2)　$p_i=\dfrac{P_i}{P_n} \quad (i=1, 2, \cdots, n-1)$

と定義されているものとする。

効用関数 U については，第2節の F についての仮定を U でおきかえたつぎの仮定をおくことにする。

(A 1)′　連続性

(A 2)′　単調性

(A 3)′　擬凹性

また効用水準 $u\in R$ および生産物の価格 $P\in R_+^n$ が与えられたときの消費者の最小支出関数を

(3.3)　$e(u, P)=\inf\{Px \mid U(x)\geqq u\}$

によって定義する。またこの最小値を達成する $x(u, P)$ を (u, P) との関数とみなしたときは，それを消費財の補償需要関数という。一般にはそれは多価でありうるが，以下では強い擬凹性の下でそれが一価であると仮定しよう。

このとき，前節で述べた費用関数についての諸命題が，適当な記号の読み替えによって，最小支出関数についても成立することは明らかである。ここでは特に顕著な性質だけを述べておく。

命題 3′（凹性）

任意の $u\in R^+$ について $e(u, P)$ は P についての凹関数である。

命題 4′（双対性定理）

仮定（A 1）と（A 3）の下で，$u \in R_+$ を一定としたとき無差別曲面が $x_n = f(\underset{\sim}{x}, u)$ のように書けたとする。そのとき最小支出関数 $e(u, p)$ は凹関数 $-f(\underset{\sim}{x}, u)$ の共役関数となり逆もまた真である。

命題 5′（支出最小化条件（Gossen（1854），Jevons（1871），Walras（1874）））

価格ベクトル $P \in R_+^n$ が与えられたとき，一定の効用水準 $u \in R_+$ を達成するための支出額が R_+^n の内点 $x^0 = x(u, P)$ で最小になったとすると

(3. 4) $\dfrac{U_i(x^0)}{U_n(x^0)} = \dfrac{P_i}{P_n}$ $(i=1, 2, \cdots, n-1)$

が満たされる。ただし，U_i は $\partial U/\partial x_i$ を意味するものとし，関数 U は強義擬凹で単調増加，かつ連続微分可能であるとする。

命題 6′（Shephard の補題）

最小支出関数 $e(u, P)$ が P について凹関数で微分可能であるならば，各 $u \in R_+$ について

(3. 5) $\dfrac{\partial e(u, P)}{\partial P_i} = x_i(u, P)$

となる。

消費者行動に関する上の Shephard の補題のきわめて重要な帰結は，

(3. 6) $S = \{\partial x_i(P, u)/\partial P_j\}$

で定義される代替行列の対称で負の定符号をもつことである。

命題 8（代替項の対称性と負の半定符号性）

仮定（A 1）′～（A 3）′ が満たされるものとし，補償需要関数 $x(P, u)$ が P に関して連続微分可能であるとする。そのとき代替行列は対称（$\partial x_i/\partial P_j = \partial x_j/\partial P_i$）で負の定符号を有する（すべての $z \in R^n$ について $z'Sz \leqq 0$ となる）。

次の証明は，Mckenzie（1956～57）によるものである。この命題は，上の仮定の補償需要関数の微分可能性の条件（それを導くことができる）を効用関数の微分可能性の条件でおきかえた形で Slutsky（1915）によって最初に証明された。さらに Hicks（1939）や Samuelson（1947）などによってその意味が検討され，需要理論の新しい発展の礎石となったことは周知の事実である。

証明） Shephard の補題を考慮すれば，仮定によって，支出関数は 2 階微分可能で

(3.7)
$$\frac{\partial x_i(P,u)}{\partial P_j}=\frac{\partial^2 e(P,u)}{\partial P_j \partial P_i}=\frac{\partial^2 e(P,u)}{\partial P_i \partial P_j}=\frac{\partial x_j(P,u)}{\partial P_i}$$

これで代替行列の対称性が証明された。負の半定符号性は，(3.7) の最初の式と最小支出関数が P についての凹関数であることから導かれる。

4　生産関数と利潤関数

$x=(x_1, \cdots, x_n)\in R_+^n$ を投入ベクトル，$y\in R_+$ を生産量とするとき，ある企業の生産関数が

(4.1)　$y=F(x)$

によって表現されるものとする。便宜上 $x\notin R_+^n$ のときは $F(x)=-\infty$ とする。また $q=(q_1, \cdots, q_n)\in R_+^n$ を生産物の価格を1としたときの投入物の価格を示すベクトルとする。

生産関数 F については，次の仮定をおく。生産関数の下の集合をハイポグラフというと，

<u>**(B 1)**</u>（連続性）

(4.2)　$\text{hypo } F\equiv\{(x, \beta)\in R_+^n\times R \mid \beta\leqq F(x)\}$

は閉集合である。

<u>**(B 2)**</u>（単調性）

$x^2\geqslant x^1\geqslant 0$ なら $F(x^2)\geqslant F(x^1)$ となる。

上の条件で $x^2\geqslant x^1\geqslant 0$，$x^2\neq x^1$ なら $F(x^2)>F(x^1)$ となるとき F は強い凸性を満たすという。

<u>**(B 3)**</u>（凹性）

$F(x)$ は凹関数である。

さて生産物の価格を1として規準化した生産要素の価格ベクトル $q\in R_+^n$ を所与とみなすとき，企業の最大利潤は

(4.2)　$\pi(q)=\sup_x\{F(x)-qx\}$

によって定義される。この最大値を達成する $x(q)$ を企業の生産要素需要関数という。

なお，右辺の sup は，$F(x)$ が凹関数であっても∞になる可能性があることに注意しておこう。

たとえば $F(x)$ が線型の場合にもそのことがおこりうるし，それに正の凹関数を加えたものも無限大の sup をもつことになる。この意味で最大利潤を与える点が定まるためには，$||x||$ が大きい時に $F(x)$ が費用 qx より小さくなることが必要であることがわかる。経済分析では通常そのような条件は仮定されている。

以上を注意しながら最大利潤関数 $\pi(q)$ についての基本的な性質を述べよう。

まず，生産物の価格を $P\in R_+$，生産要素の価格ベクトルを $Q=(Q_1, \cdots, Q_n)\in R_+{}^n$ とした時の利潤関数を

(4. 3)　$\Pi(P, Q)=\sup\{PF(x)-Qx\}$

とおくと，明らかに

(4. 4)　$\Pi(P, Q)=P\pi(q)$

であって，命題1～命題3に対応して次の結果が主張できる。

命題 9　(同次性)

任意の $t>0$ について $\Pi(\lambda P, \lambda Q)=\lambda\Pi(P, Q)$ となる。

命題10　(単調性)

二つの要素価格ベクトル q^1, $q^2\in R_+{}^n$ について $q^1\geqq q^2$ なら $\pi(q^1)\geqq\pi(q^2)$ となる。

命題11　(凸性)

$0<t<1$ とするとき，任意の二つの要素価格ベクトル q^1, $q^2\in R_+{}^n$ について

$$\pi((1-t)q^1+tq^2)\leq(1-t)\pi(q^1)+t\pi(q^2)$$

となる。

つぎに $G(x)=-F(x)$ とおけば，B(3) の下では $G(x)$ は x についての凸関数である。したがって G の共役関数を G^* とおくと，

(4. 5)　$G^*(x^*)=\sup_x(\langle x, x^*\rangle-G(x))$

$$=\sup_x(F(x)+\langle x, x^*\rangle)$$

であるから，(4. 2) によって，

(4. 6)　$\pi(q)=G^*(-q)$

$$=-F_*(q)$$

つまり，利潤関数は凹関数 F の共役関数（の符号を変えたもの）と等しくなる。

また仮定（B 1）によってFは閉じた関数であり，ある点で有限の値をとり，どの点でも$+\infty$の値をとらないという意味で純（proper）凹関数である。したがって，$G(x)=G^{**}(x)$（数学M 5 C）であるから，

$$(4.7)\quad \begin{aligned} F(x)&=-G^{**}(x)\\ &=-\sup_q\{\langle x,\ -q\rangle-G^*(-q)\}\\ &=-\sup_q\{\langle q,\ -x\rangle-\pi(q)\}\\ &=-\pi^*(-x)\\ &=-\pi_*(x)\end{aligned}$$

となることが知られた。

以上を要約すればつぎの命題が導かれる。

命題12（双対性定理）

仮定B 1とB 3の下で利潤関数は生産関数の共役関数（の符号を変えたもの）と一致する。逆に利潤関数の共役関数として生産関数（の符号を変えたもの）が導かれる。

つぎに価格 $q\in R_+^n$ の下での企業の利潤の最大値が $(x^0,\ y^0)=(x^0,\ F(x^0))\in R_+^n\times R_+$ で達成されたとする。すると，すべての $(x,\ y)=(x,\ F(x))\in R_+^n\times R_+$ について

$$(4.8)\quad F(x_0)-qx_0\geqq F(x)-qx$$

となるから，

$$(4.8)'\quad -F(x)\geqq -F(x_0)+\langle -q,\ x-x_0\rangle,$$

したがって，劣微分の定義から，

$$(4.9)\quad -q\in\partial(-F)$$

となる。このときqを凹関数Fの優微分であるといって

$$(4.9)'\quad q\in\partial F$$

と記すことにしよう。

いうまでもなくこの条件は，古典的な利潤最大化のためのつぎの命題に対応するものである。

命題13（利潤最大化条件）

生産物の価格を1として規準化された要素価格ベクトル $q\in R_+^n$ が与えられたとき，企業の利潤が R_+^n の内点 $x^0=x(q)$ を投入量として選んだときに最大になったとすると，

$$(4.10)\quad \frac{\partial F(x^0)}{\partial x_i}=q_i\qquad (i=1,\ 2,\cdots,\ n)$$

が満たされる。ただしFは強義の単調性と凹性を満たし，連続微分可能であるとしている。

さて Hotelling (1935) の補題の名で呼ばれるつぎの命題は（4.9）の関係を $-F$ の双対関数である利潤関数について述べたものである。

命題14（Hottelling の補題）

価格ベクトル $q\in R_+^n$ が与えられたときの企業の生産要素の需要量を $x^0=x(q)$ とすると，

$$(4.11)\quad \frac{\partial\pi(q)}{\partial q_i}=-x_i^0 \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

となる。ただし，π は q について単調減少な凸関数で，連続微分可能であるとする。

この命題は，Shephard の補題の場合と同様に，よりゆるい条件の下で確立することができる。

命題15（Hotelling の補題の一般化）

要素価格ベクトル q^1，$q^2\in R_+^n$ が与えられたとき，それぞれに対応する要素需要量が x^1 および x^2 に定まったとする。その時，もし q^2 と q^2 とは第 i 成分だけが異なり $q_i^2>q_i^1$ であるなら

$$(4.12)\quad -x_i^1\leq\frac{\pi(q^2)-\pi(q^1)}{q_i^2-q_i^1}\leq -x_i^2$$

となり，反対に $q_i^2<q_i^2$ なら逆向きの不等号が成立する。したがって q_i^2 を q_i^1 に近づけると，よく知られた $x(q)$ の連続性の条件（Debeu (1957), Nikaido (1968), Arrow=Hahn (1971) 等を参照）の下では Hotelling の補題の結論が得られる。

証明） 価格が q^2 の時の利潤は投入量が x^2 のときに最大になるから

$$\begin{aligned}(4.13)\quad &\pi(q^2)-\pi(q^1)\\ &=(F(x^2)-q^2x^2)-(F(x^1)-q^1x^1)\\ &=(F(x^2)-q^2x^2)-(F(x^1)-q^2x^1)\\ &\qquad-(q^2x^1-q^1x^1)\\ &\geqq\langle q^1-q^2,\ x^1\rangle\end{aligned}$$

したがって $q_i^2>q_i^1$ で他の要素はすべて等しい場合には

$$\frac{\pi(q^2)-\pi(q^1)}{q_i^2-q_i^1}\geqq -x_i^1$$

となる。

もう一方の不等式は

$$(4.14)\quad \pi(q^1)-\pi(q^2)\geq\langle q^2-q^1,\ x^2\rangle$$

となることに注意すれば，上と同様にして導出される。

5　効用関数と間接効用関数

$x=(x_1, \cdots, x_n)\in R_+{}^n$ を消費量のベクトル，$P=(P^1, \cdots, P^n)\in R_+{}^n$ をそれに対応する価格ベクトルとする。また

(5.1)　$p_i=\dfrac{P_i}{P_n}$　　$(i=1, 2, \cdots, n)$

として規準化した価格を要素とするベクトルを $p=(p_1, \cdots, p_n, 1)$ と記す。

いま効用関数 $U(x)$ と所得 M をもつ消費者がいて

$$(P)\begin{cases}\text{maximize } U(x)\\ \text{subject to } Px\leqslant M\end{cases}$$

の解として需要量 $x^0=x(P, M)$ を定めるものとする。

効用関数については第3節の（A 1)′～(A 3)′ の条件（(A 2)′, (A 3)′ は強い意味で）が満たされているものとする。

いま上の問題の最大値 $x(P, M)$ が各点で定義できれば，その対応を需要関数，あるいは（とくに補償需要関数 $x(P, u)$ と区別する必要があるときには）Marshall (1890) の需要関数という。この最大値に対応して間接効用関数が $v(P, M)=u(x(P, M))$ によって定義される。ある財の価格が0で最大値が達成されない心配がある一般の場合には

(5.2)　$v(P, M)=\sup\{U(x)|Px\leqslant M\}$

としておけばよい。

間接効用関数にはつぎのような良く知られた性質がある。

命題16（同次性）

すべての $P\in R_+{}^n$ と $M\in R_+$ について

(5.4)　$v(tP, tM)=v(P, M)$

となる。

命題17（単調性）

(i)　すべての $M\in R_+$ と $P^1\geq P^2$ を満たす任意の2つの価格ベクトル P^1, $P^2\in R_+{}^n$ について $v(P^2, M)\geq v(P^1, M)$ となる。

(ii) すべての $P\in R_+^n$ と $M^1\geqslant M^2$ を満たす任意の2つの所得水準 M^1, $M^2\in R_+$ について $v(P, M^1)\geq v(P, M^2)$ となる。

命題18 (擬凹性)

任意の $k>0$ と $M\in R_+$ について，集合 $\{P: v(P, M)\leqslant k\}$ は凸である。

証明) $v(P^1, M)\leqslant k$, $v(P^2, M)\leqslant k$ と仮定し $0<t<1$ とする。すると

$$
\begin{aligned}
(5.5)\quad & v((1-t)P^1+tP^2, M)\leqq \sup_x\{U(x)\,|\,(1-t)P^1+tP^2)x\leqslant M\} \\
& \leqq \sup\{U(x)\,|\,P^1x\leqslant M \text{ or } Px\leqslant M\} \\
& =\max(v(P^1, M), v(P^2, M)) \\
& \leqq k
\end{aligned}
$$

古典的問題 (P) の解を特色づける限界条件は，今ではきわめて良く知られている。もっとも標準的な方法は Lagrange 乗数法によるものであるが，後の話のため，ここでは先の分析との対応を考えることにしよう。

いま (A2)$'$ の単調性の仮定を強めて，強い単調性を仮定しよう (より一般的には，選好の局所的非飽和の仮定をおけばよい)。すると問題の (P) の解 $x^0=x(P, M)$ はその制約条件を等号で満たし，つぎの問題の解にもなっている。

$$
(P^*)\begin{cases} \text{minimize } Px \\ \text{subject to } U(x)\geqslant \bar{u} \\ \text{ここで } \bar{u}=u(x^0),\ x^0\in R_+^n \end{cases}
$$

じっさい，もし $x^0\in R_+^n$ が (5.6) の問題の最適解でないとすれば，ある $\hat{x}\in R_+^n$ が存在して

$$
\begin{aligned}
(5.7)\quad & P\hat{x}<Px^0=M \\
& U(\hat{x})\geqq \bar{u}
\end{aligned}
$$

となる。したがって $\varepsilon\in R_+^n$ をそのノルムの十分小さい正のベクトルとすると，$\bar{x}=\hat{x}+\varepsilon$ はやはり予算制約式を満たし，(A 2)$'$ により $\bar{u}$ より高い効用を与えるので $x^0=(P, M)$ が (5.2) の最適解であることに反してしまう。

逆に $\bar{u}=U(x(P, M))$ とおくと，問題 (P^*) の任意の解 $\hat{x}\in R_+^n$ はそれが R_+^n の内点にあるなら (P)の解になっていることが知られる。じっさい $\hat{x}$ が (P) の解でないとすると

$$
\begin{aligned}
(5.8)\quad & U(\bar{x})>U(\hat{x})\geqq \bar{u} \\
& P\bar{x}\leqslant M
\end{aligned}
$$

となる $\bar{x}\in R_+^n$ があり，したがって $\varepsilon\in R_+^n$ がノルムの十分小さな正のベクトルである場合には,

$\bar{\bar{x}}=\bar{x}-\varepsilon$ は，(5.8) の $\bar{x}$ を $\bar{\bar{x}}$ でおきかえた条件を満たし，しかも予算制約条件については厳密な不等号が成立する。これは $\hat{x}$ が（P^*）の最適解であることに反する。

なお $x(P,\ u)$ を（P^*）の解とするときには M を $M=P\cdot x(P,\ u)=e(P,\ U)$ とおいたときの（P）の解になっていることも知られる。

以上によって次の命題が示されたことになる。

命題15

効用関数 U が強い単調性の条件を満たすものとするとき，問題（P）の解 $x^0=x(P,\ M)$ は問題（P^*）の解にもなっている。逆に $x^0=x(P,\ \bar{u})$，$\bar{u}=v(P,\ M)$ が（P^*）の解で x^0 が R_+^n の内点にあれば，x^0 は（P）の解でもある。したがって $x(P,\ M)\in \mathrm{int}\,R^n$ が一意に定義できれば，

(5.9)　$x(P,\ M)=x(P,\ v(P,\ M))$

となる。また $x(P,\ u)\in \mathrm{int}\,R^n$ が一意に定義できるならば

(5.10)　$x(P,\ u)=x(P,\ e(P,\ M))$

ともなる。

双対性定理の著しい成果は Slutsky 方程式（1915）のきわめて容易な導出を 可能にすることである。以下に与える証明は McKenzie（1957）によるものである。

命題16　(Slutsky の方程式)

効用関数が強い意味で単調増加，強い意味で擬凹であり，かつ連続微分可能であるならば

(5.11)　$$\frac{\partial x_i(P,\ M)}{\partial P_j}=\frac{\partial x_i(P,\ u)}{\partial P_j}-x_j(P,\ M)\frac{\partial x_i(P,\ M)}{\partial M}\qquad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

となる。

証明）(5.10) の関係 $x_i(P,\ u)=x_i(P,\ e(P,\ M))$ $(i=1,2,\cdots,n)$ を P_j で微分すれば

(5.12)　$$\frac{\partial x_i(P,u)}{\partial P_j}=\frac{\partial x_i(P,\ M)}{\partial P_j}+\frac{\partial x_i(P,\ M)}{\partial M}\ \frac{\partial e(P,M)}{\partial P_j}\qquad (i,\ j=1,2,\cdots,n)$$

となる。ここで Shephard の補助定理 $\partial e(P,\ M)/\partial P_j=-x_j(P,\ M)$ を用いれば(5.25) が導かれる。

なお (5.12) の左辺の代替項から成る行列は対称で負の半定符号を有することについては先に述べた（命題8）。

さて効用最大化問題（P）に立ち返ろう。いま $x^0=(P, M)$ が R_+^n の内点にある（P）の解であるとし，$u=u(x^0)$ に対応する無差別曲面の方程式を（$\bar{u}$ が最低の効用水準でないので強い単調性を用いて）

(5.13)　$x_n=f(\underset{\sim}{x}, \bar{u})$

$\underset{\sim}{x}=(x_1, \cdots, x_{n-1})\in R_+^{n-1}$

と書こう。また $P\in R_+^n$ を第 n 財の価格を1として規準化した価格ベクトルとする。すると，x^0 は（P^*）の解であるから，(2.19) を導いたと同様に，条件

(5.14)　$-p=\partial f(\underset{\sim}{x}^0)$

を満たすことがわかり，しかも予算制約条件を等号で充足することになる。

以上によって導かれる次の定理は Gossen(1854)，Jevons (1871)，Walras (1874)等によっていくつかの限定的な仮定の下に導出され，以来多くの彫琢が加えられてきた消費者行動理論におけるもっとも基本的な命題である。Lagrange 乗数を用いた標準的証明は Hicks (1939) や Samuelson (1947) などに見い出される。

命題17　（効用最大化条件）

価格ベクトル $P\in R_+^n$ と所得 $M\in R_+$ が与えられた時，効用最大化問題（P）の解は，それが R_+^n の内点にあるとすれば，条件

(5.15)　$\dfrac{U_i(x)}{U_n(x)}=p_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$

(5.16)　$px=m$　　$m=M/P_n$

によって特色づけられる。ただし効用関数は強い意味で単調増加で，強い意味で擬凹，しかも連続微分可能であるとする。

さて先に見たように，補償需要関数 $x^0=x(p, u)$ は

(5.14)　$-p=\partial f(\underset{\sim}{x}^0, u)$

と双対的に，条件

(5.17)　$x(p, u)\in\partial e(p, u)$

によって，つまり最小支出関数の劣微分として導出される（Shephard の補題)。

これに対して Marshall の需要関数 $x^0=x(P, M)$ は強い単調性の下では，予算制約条件

(5.16)　$px^0=m$, $m=M/p_n$

と限界条件

(5. 18)　$-p=\partial f(\underset{\sim}{x}^0,\ u),\ u=u(x^0)$

を満たすものとして特色づけられた（(5. 11)（5. 12）参照)。

このとき（5. 14）と双対的条件として（5. 17）が導かれたという意味で，(5. 16）および（5. 18）の2つの条件のいわば双対として Marshall の需要関数を導き出すことができるであろうか。次の命題はこれに対して少なくとも部分的に答えるものである。この点については次節で再び述べることがある。

(5. 19）式は通常 Roy（1942）の恒等式の名でよばれているが，Antonelli (1886) の（24）式はこれとまったく同様のものであり，Allen（1933，p. 190）にも同じ式が登場する。Roy の論文の意義は（5. 13）と（5. 14）との双対性を強調した点にある。

命題18（Antonelli=Roy の恒等式）

間接効用関数 $v(P,\ M)$ が与えられたとすると需要関数は

(5. 19)　$\dfrac{v_i(P,\ M)}{v_M(P, M)}=x_i(P,\ M)$

の n によって与えられる。ただし $v_i=\dfrac{\partial v}{\partial P_i}$　$v_M=\dfrac{\partial v}{\partial M}$ であるとする。また効用関数は強い意味で単調増加で関接効用関数は（P，M）に関して連続微分可能であるとする（この最後の条件は，強い意味で擬凹で連続微分可能の場合には充足される)。

証明） 仮定によって $P^0\in R_+{}^n$，$v\in R_+$ が与えられたとき，$v(P^0,\ M^0)$ は

$$(P^*)\quad \text{minimize } P^0x(P,\ M)$$
$$\text{subject to } v(P,\ M)\geqslant v(P^0,\ M^0)$$

の解になっている。なぜなら $x(P^0,\ M^0)$ と同等以上に選好される財ベクトル $x(P,\ M)$ の P^0 の下での購入額は $P^0x(P^0,\ M^0)$ 以上できなければならないからである。

したがって，Lagrange 形式を

(5. 20)　$L(P,\ M,\ \lambda)=P^0x(P,\ M)-\lambda(P,\ M)-v(P^0,\ M^0)$

によって定義し，その極小のための一階の条件を求めると，制約条件を等号とした条件に加え

(5. 21)　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P_i{}^0\frac{\partial x^i}{\partial P_j}=\lambda v_j$　$(j=1, 2, \cdots, n)$

および

(5. 22)　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} P_i{}^0\frac{\partial x^i}{\partial M}=\lambda v_M$

の条件が導かれる。

他方，$P^0\cdot x(P^0,\ M)=M$ より，

(5.23)　$\sum P_i^0 \dfrac{\partial x_i}{\partial P_j} + x_j = 0$

および

(5.24)　$\sum P_i^0 \dfrac{\partial x_i}{\partial M} = 1$

が導かれる。これら4つの式から（5.19）を求めることは容易である。

Chipman=Moore（1976）によって示唆された上の証明においては，もとになる効用関数の微分可能性は仮定されていない。このことは応用上しばしば便利である。

効用関数の微分可能性を仮定した場合の証明もほぼ同様である。(5.15) より

(5.25)　$U_i = \alpha P_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$

と書けること，そして $Px=M$ の制約の下に $v(P, M)=u(x(P, M))$ を最大にすることから，(5.23) (5.24) で P^0 を P とした関係が成立することに注意して

(5.26)　$v_M = \sum_{i=1}^{n} U_i \dfrac{\partial x_i}{\partial M} = \alpha$

(5.27)　$v_j = \sum_{i=1}^{n} U_i \dfrac{\partial x_i}{\partial P_j} = \alpha x_j$

を導けばよい。

6　積分可能性問題への注解

Antonelli=Roy の定理を導出する際につぎのような議論をした。すなわち，すべてが連続微分可能な関数の場合についていえば，費用最小化の条件

(6.1)　$\dfrac{U_i(x)}{U_n(x)} = p_i$　$(i=1, 2, \cdots, n)$

と双対的な条件（Shephard の補題）

(6.2)　$\dfrac{\partial e_i(u, p)}{\partial p_j} = x_i(u, p)$　$(i=1, 2, \cdots, n-1)$

によって補償需要関数が導かれる。これと同じ意味で，一定の予算の下での効用最大化の条件

(6.3 i)　$\dfrac{U_i(x)}{U_n(x)} = p_i$

(6.3 ii)　$px = m$

の2つと表裏の関係にある条件は何であるかが答えられなければならないと。

いま

(6.4)　$\pi_i(x) = U_i(x)/U_n(x)$　$(i=1, 2, \cdots, n-1)$

を需要価格関数とよび

(6.5)　$\pi(x)=(\pi_1(x), \cdots, \pi_{n-1}(x))$

とおこう。また $x=(\underset{\sim}{x}, 1)\in R_+^{n-1}\times R$ として

(6.6)　$\Psi(x)=(\pi(x), \pi(x)\underset{\sim}{x}+x_n)$

と定義する。$\Psi(x)$ の最後の表現は $(\pi(x), 1)$ を価格として x を購入したときの支出額を示しており，$p=(\pi(x), 1)$ならそれは m に等しいことになる。以下では $\Psi(x)$ を拡大された需要価格（逆需要）関数とよぶことにしよう。つぎに第 n 財の価格を1とした価格ベクトルを $p\in R_+^n$，同じ単位での所得を $m\in R_+$ として需要関数を

(6.7)　$\Phi(p, m)=(x_1(p, m), \cdots, x_n(p, m))$

と記そう。すると関数の定義から，予算の制約下での効用最大化の条件（(5.15) と (5.16)）を用いると

(6.8)　$$\begin{aligned}\Phi(\Psi(x))&=\Phi(\pi(x), \pi(\underset{\sim}{x})x+x_n)\\&=\Phi(p, m)\\&=x\end{aligned}$$

そして

(6.9)　$$\begin{aligned}\Psi(\Phi(p, m))&=(\pi(x), \pi(x)\underset{\sim}{x}+x_n)\\&=(p, m)\end{aligned}$$

となり，これら合成関数はいずれも恒等写像となる。したがって，

命題19

需要関数 Φ と拡大された需要価格関数 Ψ とは互いに逆関数の関係にある。

このことから，Φ の Jacobian 行列

(6.10)　$$J_\Phi=\left(\begin{array}{c|c}\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j} & \dfrac{\partial x_i}{\partial m}\\\hline\dfrac{\partial x_n}{\partial p_j} & \dfrac{\partial x_i}{\partial m}\end{array}\right)$$

と Ψ の Jacobian 行列

(6.11)　$$J_\Psi=\left(\begin{array}{c|c}\dfrac{\partial \pi_i}{\partial x_j} & \dfrac{\partial \pi_i}{\partial x_n}\\\hline\dfrac{\partial \pi_n}{\partial x_j} & \dfrac{\partial \pi_n}{\partial x_n}\end{array}\right)$$

とは互いに逆行列の関係にあることがわかる（左上の小行列はいずれも $(n-1)\times(n-1)$ 次）。

Samuelson (1950) が記しているように，これら2つの行列に適当な行列を作用させると，

$$(6.12)\quad J_\Phi\left(\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline x_j & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial x_i}{\partial P_j}+\dfrac{\partial x_i}{\partial m}x_j & \dfrac{\partial x_i}{\partial m} \\ \hline \dfrac{\partial x_n}{\partial P_i}+\dfrac{\partial x_n}{\partial m}x_j & \dfrac{\partial x_n}{\partial m} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} S_{ij} & \dfrac{\partial x_i}{\partial m} \\ \hline S_{in} & \dfrac{\partial x_i}{\partial m} \end{array}\right)$$

(S_{ij} は 第 n 財の価格を1とし たときの Slutsky の代替項)

および

$$(6.13)\quad J_\Psi=\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline x_j & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \dfrac{\partial \pi_i}{\partial x_j}, & \dfrac{\partial \pi_i}{\partial x_n} \\ \hline \dfrac{\partial \pi}{\partial x_j} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline x_j & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} a_{ij} & \dfrac{\partial \pi_i}{\partial x_n} \\ \hline \dfrac{\partial \pi}{\partial x_j} & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline \pi_j & 1 \end{array}\right]$$

となることがわかる。ただし

$$(6.14)\quad a_{ij}=\frac{\partial \pi_i}{\partial x_j}-\pi_j\cdot\frac{\partial \pi_i}{\partial x_n}\quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

であって，a_{ij} を要素とする $(n-1)\times(n-1)$ 次の行列を第 n 財を価値尺度とする Antonelli 行列という。

(6.12)，(6.13) と J_Φ と J_Ψ とが逆行列であるから，左上の $(n-1)$ 次行列を比べることにより次の命題が導かれる。

命題20

第 n 財を価値尺度とする Autonelli 行列と $(n-1)$ 次の Slutsky 行列とは，互いに逆行列の関係にある。

学説史上，双対性の概念が問題の解決にきわめて有効に適用され，それがまたさまざまな接近方法の差を明確にするものに，いわゆる「積分可能性」の問題がある。需要関数が与えられたとき，「もし効用最大化行動を行なったとすれば，それを導くであろう効用関数を求める」というのが問題のエッセンスである。その伝統的定式化においては，偏微分方程式の解を積分として求めることの可否を問うためにこの名がある。現代的アプローチは，Houthakker (1950)，Richter (1966) などに典型が見出されるように，いわば大域的方法ともいうべきものを用いている。

さて上に見たように，Φ と Ψ とが互いに逆関数として相互に求められるから，観察可能なデータとして与えられた関数が需要関数であるか需要価格関数であるかは問うところではない。Antonelli（1886）は，需要価格関数 $\pi(x)$（Antonelli の記号では $Q(A, B, \cdots)$）が与えられたときに $U(x)$（同じく $U(A, B, \cdots)$）が（6.4）の解として与えられなければならないとし，その偏微分方程式の解の存在条件を求めたのであった（Antonelli の（20）式)。

数学的定理からそのための条件は，ある種の限定の下では（いわゆる Antonelli 作用素）

（6.15）　$A_j(U)=\pi_j U_n - U_j$

が Jacobian 系を形成することである。Antonelli はそれが具体的には Antonelli 行列の対称性に帰することを明確に述べている（22式の一つ上の番号のない式)。Chipman=Moore（1976, Appendix 4A）にはこの種の古典的解法についての詳細な説明が与えられている。なお，Hurwicz Richter（1979）が指摘しているように Antonelli 行列の対称性が積分方程式の解の存在のための条件を与えることは Frobenius の定理（Dieudonné（1969）10.9.4 および 10.9.5）を用いれば直ちに明らかなことである。

Samuelson（1950）は，上の記号での Ψ（拡大された需要価格関数）と Φ（需要関数）とが互いに逆関数の関係にあることに着目しつつ，後者が与えられた場合の積分可能性の問題を Antonelli の問題に帰着させることによって解決した。ただし形式上は（6.4）ではなく，それと密接に関連した（伝統的な条件の下では $\partial x_n/\partial x_i=-U_i/U_n$ だから，実は同値な）偏微分方程式体系

（6.4)′　$\dfrac{\partial x_n}{\partial x_i}=-\pi_i(x)$　$(i=1, 2, \cdots, n-1)$

の解を求める（$\pi^i(x)$ を既知として $\underset{\sim}{x}=(x, \cdots, x_{n-1})$ を x_n の関数として解く）という方針によっている。（6.2）と（6.4)′ の関数および変数の間には，きわめて自然な双対的な対応関係が存在することに注意しておこう。

以上を要約すれば，次の命題がえられる。

<u>**命題20**</u>（積分可能性定理 Antonelli（1886），Samuelson（1950））

$\pi(x)$ を連続微分可能な需要価格関数とするとき，次の条件は同値である。

（a）$(n-1)\times(n-1)$ 次の Antonelli 行列 $A(x)=(a_{ij}(x))$ が x^0 のある近傍で対称（$a_{ij}=a_{ji}$）である。

（b）$x^0=(\underset{\sim}{x}^0, x_n^0)$ のある近傍 $N_1\times N_2\subset R^{n-1}\times R^n$ があって偏微分方程式

（6.4)′　$\dfrac{\partial x^n}{\partial x^i}=-\pi_i(x)$　$(i=1, 2, \cdots, n)$

が任意の点 $\bar{x}\in N_2$ を通る C^1 級の解 $x^n=\varphi(\underset{\sim}{x}, \bar{x})$, $\varphi: N_1\times N_2\to R$ をもつ。

（c）x^0 のある近傍 N があって，N 上で $U_n>0$ を満たすすべての $x\in N$ に対して偏微分方程

式

$$(6.4)\quad \frac{U_i(x)}{U_n(x)}=\pi_i(x) \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

が C^1 級の解をもつ。

これに対して Hurwicz=Uzawa (1971) の特色は，財の数量の空間における偏微分方程式 (6.4)′ ではなく，それと対をなす価格と所得（最小支出関数を効用関数としているので）の空間における偏微分方程式 (6.2) を解くという方法によっていることが特徴的である。それによって二人は別の方法では微分不可能になる場合についての解の存在を保証する条件を与えることができた。この場合の古典的解法も Chipman=Moore (1976) に詳しく説明されている。

Fisher (1892) は，この問題の解の存在条件に気付いていたが，Pareto は Volterra に指摘されるまで，積分可能性条件についての理解を欠いていた事情等は Chipman et al (1971, pp. 321～331) に説明されている。

なお積分可能性の問題の内容に，(6.4)′ あるいは (6.2) という偏微分方程式を解くという純粋に数学的問題の他に，求められた効用関数（無差別曲面の方程式）が原点に対して凸であることを示す必要があるということは，Allen (1932) その他によって指摘されてきた。その条件が Slutsky 行列（Antonelli 行列）の負の半定符号性によって与えられることはよく知られている。

7　数学註――凸解析学の若干の結果

ここには，凸解析学の中で本文で十分に説明できなかった概念，および証明なしに用いた結果をまとめてある。ここに述べた主要結果のほとんどすべては Luenberger (1968), Rockafellar (1970), Stoer and Witzgall (1970) あるいは Ioffe and Tihomirov (1979) のいずれの中にも含まれている。

なお，ここで考察の対象となっている空間は，位相的には n 次限ユークリッド空間 R^n（実数の上のベクトル空間ともみなす）であるが，述べられた結果の多くは，より一般的なベクトル空間にも拡張可能である（たとえば Luenberger (1963) や Ioffe and Tihomirov (1979) などを見よ)。

〔**M 1**〕

(a)　$f: R^n \to \bar{R}$ が凸関数であるとは，$f(x)<\alpha$, $f(y)<\beta$ を満たす任意の α, $\beta \in R$ に対して

(1)　$f((1-t)x+ty)<(1-t)f(x)+tf(y)$　for $0<t<1$

となることである。f がどこでも $-\infty$ の値をとらないときは，上の条件は

(1)′ $f((1-t)x+ty) \leqq (1-t)f(x)+tf(y) \quad \text{for } 0<t<1$

と同値である。

もしfが R^n のある凸部分集合Sで定義されている関数で(1)を満たすならば，$x \notin S$について$f(x)=\infty$とすることによって R^n の全体に定義域を拡長することができる。以下では，必要な場合にはそのように拡張された関数を考察の対象とする。

(b) 凸関数fは，すべての $x \in R^n$ について $f(x)>-\infty$ となり，少なくとも1つの点について $f(x)<\infty$ である場合に純（proper）凸関数であるという。

(c) 純凸関数の有効定義域は

$\text{dom } f=\{x \in R^n : f(x)<\infty\}$

によって定義される。

(d) $g : R^n \to \bar{R}$ が凹関数であるとは，$-g$ が凸関数であることである。

〔M 2〕

(a) 凸関数 $f : R^n \to \bar{R}$ は，すべての $\alpha \in R$ について

$S_\alpha=\{x \in R^n : f(x) \leqq \alpha\}$

が閉集合であるとき，閉凸関数であるという。

〔M 3〕 一般の関数 $f : R^n \to \bar{R}$ のエピグラフを

$\text{epi } f=\{(x, \alpha) \in R^n \times R,\ \alpha \geqq f(x)\}$

によって定義する。fが凸関数であることは epi$f$ が凸であることと同値である。

〔M 4〕 純凸関数 $f : R^n \to \bar{R}$ が強い意味で凸であるとは，

$f((1-t)x+ty)<(1-t)f(x)+tf(y) \quad \text{for } 0<t<1$

となることをいう。

〔M 5〕

(a) 凸関数 $f : R^n \to \bar{R}$ の共役関数 $f^* : R^n \to \bar{R}$（Young＝Fenchel の変換という）を

$f^*(x^*)=\sup_x\{\langle x,\ x^*\rangle-f(x)\}$

によって定義する。

(b) f が（純）凸関数の場合は f^* も（純）凸関数になる。

(c) f の第二共役関数を $f^{**}=(f^*)^*$ で定義すると，fが閉じた純凸関数なら $f^{**}=f$ となる。

(d) $g=-f$ が凹関数のとき，その共役関数 g_* を，$g_*(x^*)=-f^*(-x^*)$ で定義する。

〔M 6〕

（a） $x^* \in R^n$ が凸関数 $f: R^n \rightarrow \bar{R}$ の劣微分（subgradient）であるとは，

(1) $f(y) \geqq f(x) + \langle x^*, y-x \rangle$ for any $y \in R^n$

が成り立つことをいう。また x における劣微分の全体を $\partial f(x)$ と記し，それが空集合でないとき，f は x において劣微分可能であるという。

（b） f が $x \in R^n$ で劣微分可能であるための条件は $(x, f(x))$ において epi f が垂直でない支持超平面をもつことである。

（c） 純凸関数 f の劣微分は int(dom f) の各点において空でない。

〔M 7〕 閉じた純凸関数については，$x \in \partial f^*(x^*)$ であるための必要十分条件は $x^* \in \partial f(x)$ となることである (Rockafellar (1970, p. 219))。

Reference

Allen R. G. D. (1932), "The Fondations of a Mathematical Theory of Excange" *Econometrica* 12 (May 1932) pp. 197～236.

———— (1933), "Marginal Utillity of Money and Its Application" *Econometrica* 13 (May 1933) pp. 186～209.

Antonelli, G. B. (1886), *Sulla teoria matematica bella economia politica,* Pisa nella Tipografia del Folcetto, Reprinted in the *Giornale degli Economistie e Annali di Economia* N. S., 10 (May-June 1951) pp. 223～63, English translation "On the Mathematical Theory of Political Economy," in Chipman, Hurwicz, Richter and Sonnenschein *Preferences. Utility and Demand,* pp. 322～64.

Arrow, K. J., and F. H. Hahn (1971), *General Competitive Analysis,* Holden-Day Inc. and Oliver & Boyd.

Chipman, J. S., and J. C. Moore (1976), "The Scope of Consumers Surplus Arguments," *Evolution, Welfare, and Time in Economics,* pp. 69～124, Lexington Books.

Chipman, J. L., Hurwicz, M. K. Richter and H. Sonnenschein (1971), *Prefereuce Utillity and Demand,* New York, Harcourt Brace and Javanovich, Inc.

Debreu, G., (1959), *Theory of Value,* Wiley, New York.

Dieudonné, J., (1969), *Foundations of Modern Analysis,* New York: Academic Press, 1969.

Diewert, W. E., (1982), "Duality Approaches to Microeconomic Theory" *Handbook of Mathematical Economics* Vol. II, pp. 535～599, North-holland, Amsterdam, New Yowk, Oxford.

Gossen, H., (1854), *Entwicklung der gesetze des menschlichen verkehrs,* Berlin.

Hicks, J. R., (1939), *Vaule and Capital,* Oxford Clavendon Press, 2nd ed., 1946.

Hotelling, H., (1935), "Demand Functions with Limited Budgets" *Econometrica,* 3, 66～78.

Houthakker, H. S., (1950), "Revealed Preference and the Utillity Function," *Econometrica,* N. S. 17, 159～174.

Hurwicz, L., (1971), "On the Problem of Integrability of Demand Functions," In Chipman, Hurwicz, Richter and Sonnenschein *Preferences, Utility and Demand,* pp. 174～214.

———— and M. K. Richter, (1979), "Ville Axioms and Consumer Theory" *Econometrica,* Vol. 47, No.

3, May 1979, pp. 603～620.

────── and H. Uzawa, (1971), "On the Integrability of Demand Functions." In Chipman, Hurwicz, Richter and Sonnenschein, *Preferences, Utility and Demand,* pp. 114～48.

Ioffe, A. D., and V. M. Tihomirov, (1979), *Theory of Extremal Problems,* North-holland, Amsterdam, New York, Oxford.

Jaffé, W., (1965), *Correspondence of Léon Walras and Related Papers,* 3 vols., Amsterdam, North-holland for Royal Netherlands Academy of Sciences and Letters.

Jevons, W. S., (1871), *The Theory of Political Economy,* London and New York: Macmillan and Co., 2nd ed., 1879, 3rd ed., 1888, 5th ed., New York: Kelley & Millman, Inc., 1957.

Kawamata K., (1974), "Price Distortion and Potential Welfare", *Econometrica,* Vol. 42, No. 3, pp. 435 ～460.

Luenberger, D. G., (1968), *Optimization by Vector Space Methods,* John Willey & Sons., Inc., New York., London, Sydney, Toronto.

Marshall, A., (1890), *Principles of Economics,* London, Macmillan, 1890, 1920.

McKenzie, L. W., (1957), "Demand Theory without a Utility Index." *Review of Economic Studies* 24 (June 1957) pp. 185～89.

Nikaido, H., (1968), *Convex Structures and Economic Theory* Academic Press, New York and London.

Rockafellar, R.T., (1970), *Convex Analysis,* Princepton University Press.

Roy, René, (1942), *De lútilité Contribution à la théorie des choix,* Paris, Hermann & C[ie], Editeurs.

Richter, M. K., (1966), "Revealed Preference Theory," *Econometrica* 34, pp. 635～645.

Samuelson, P. A., (1974), "Complementarity. An Essay on the 40th Anniversary of the Hicks-Allen Revolution in Demand Theory," *Journal of Economic Literature* 12 (December 1974) 1255～89.

────── (1947), *Foundations of Economic Analysis,* Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1947.

────── (1950), "The Problem of Integrability in Utility Theory" *Economica,* N. S., (Nov. 1950) 17, pp. 355～85, CSP I. Ch. 10, pp. 75～105.

Schumpeter, J. A., (1854), *History of Economic Analysis,* Oxford University Press.

Shephard, R. W., (1953), *Cost and Production Functions,* Princeton University Press, 1953.

Slutsky, E., (1915), "Sulla teoria del bilancio del consumatore" *Giornale degli Economisti e Rivista di Statistica* [3] 51 (July 1915), English translation: "On the Theory of the Budget of the Consumer," In *Readings in Price Theory,* edited by G. J. Stigler and K. E. Boulding, Homewood Ill: Richard D. Irwin, Inc., 1952, pp. 27～56.

Stigler, G. J., (1950), "The Development of Utility Theory" *Journal of Political Economy* 58 (August, October 1950) 307—27, 373—96. Reprinted in Stigler, G. J. *Essays in the History of Economics,* Chicago: The University of Chicago Press, 1965, pp. 66—155.

Stoer, J., and C. Witzgall (1970), *Convexity and Optimization in Finite Dimensions I,* Springer Verlag, New York, Heidelberg. Berlin.

Walras, L., (1874), *Élements déconomie politique pure* Lausanne: Imprimerie L. Carbaz et C[ie], 1877, Definitive edition, Lausanne: F. Rouge, 1926.

（経済学部教授）