Title	推測的変動に関する寡占均衡の比較静学と予想の戦略的決定について
Sub Title	Comparative static Analysis of the oligopoly equilibrium with respect to conjectural variations and their strategic determination
Author	川又, 邦雄
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1985
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.78, No.1 (1985. 4) ,p.1- 13
JaLC DOI	10.14991/001.19850401-0001
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19850401-0001

推測的変動に関する寡占均衡の比較静学と予想の戦略的決定について

川　又　邦　雄

1　序

均質的生産物を産出する企業から成る寡占市場において，各企業 i が推測的変動 $\beta_i(i=1,2,3,\cdots\cdots,n)$ を一定とみなし，産出量を戦略変数として利潤を最大にするとときの一般化されたクールノー＝ナッシュ型の均衡が存在するための条件[(1)]は前稿において解明された。本稿では，そこで一定とされた推測的変動のパラメター β_i が変化するとき，産出量，価格，利潤，そして経済厚生等がどのような影響をうけるかを分析する。また各企業が利潤を最大にするように β_i を変化するとき，どのような値が均衡として定まるかを考察してみたい。

分析はすべて標準的な部分均衡理論の枠組の中で行われている。推測的変動を一定とする第一段階の分析をゲームとみなせば，戦略変数は産出量であり，利得関数は対応する利潤によって与えられる。このゲームの戦略変数の均衡値が定まれば，それに応じて価格や費用，経済厚生等も評価される。つぎに第二段階のゲームでは，各企業は上の分析で自らの推測的変動に応じて利潤がどう変化するかを知って，それが極大になるように推測的変動のパラメターを選択する。そのときの均衡がそこでの分析の中心テーマとなる。本稿においては，特に言及しないかぎり企業の結託の可能性は考慮されていない。主要な結論は7つの定理に要約して示されている。

2　基本的仮定

以下の分析に必要な記号と基本的な仮定は前稿と同様であるが，便宜上ここに略述する。まず，産業内の企業の数を n で示し，

x_i：企業 i の産出量（$i=1,2,\cdots\cdots,n$）

x_{-i}：i 以外の企業の産出量の合計（$i=1,2,\cdots\cdots,n$）

注（1）川又（1985）を参照されたい。

x：総需要量

p：生産物の価格

のように記号を定めよう。

逆需要関数は

(1)　$p=f(x)$

のように与えられ，$f(\cdot)$ は

A 1

(i)　$f(0)>0$

(ii)　$f'(x)>0$

(iii)　$f'(x)+xf''(x)<0$

を満たすものとする。

つぎに生産技術に関しては，各企業 i について総費用関数 $C_i(x_i)$ $(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ が定義され，各 i について

A 2

(i)　$C_i(0)\geqq 0$

(ii)　$C_i'(x_i)>0$

(iii)　$C_i''(x_i)\geqq 0$

の条件を満たすものとする。

市場の需給均衡の条件は

(2)　$x=x_1+\cdots\cdots+x_n$

$=x_i+x_{-i}\qquad(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$

のように記述される。この条件が満たされている場合には x を総生産量とよぶことがある。

企業 i の利潤は

(3)　$\pi_i(x_i, x)=f(x)x_i-C_i(x_i)$

のように表現することができる。ここで以後の分析結果を有意味なものとするため，つぎの仮定をおく。

A 3

各 $i=1, 2, \cdots\cdots, n$ について

(1)　$f(0)>C_i'(0)$

で，ある $x_i>0$ について

(ii) $f(x_i)<C_i'(x_i)$

となり，

(iii) $\pi_i(x_i, x_i)>0$

となる $x_i>0$ が存在する。

この最後の不等式は企業 i だけが生産を行った場合にプラスの利潤を獲得できることを意味している。これらの条件が満たされない場合には対象となる経済は興味に乏しいものとなってしまうだろう。

3　一定の推測的変動の下における経済均衡の存在

企業の行動目標が利潤の最大化であるとしても，他の企業の技術や行動ルールについての予想いかんによって，当該企業の決定する生産量は異なってくる。ここでは各企業 i は，産業の産出量 x が自らの産出量 x_i に比例して変動すると予想するものとし，その比例定数を α_i とおくことにしよう。このことは他の企業の産出量の合計 x_{-i} が x_i に比例して変化すると予想することに等しく，その比例定数を β_i とおけば(2)より

(4) $\alpha_i=\beta_i+1 \qquad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$

が成立しなければならない。β_i は通常企業 i の推測的変動とよばれており，α_i はここでは総推測的変動とよぶことにしよう。$\beta_i=-1$ ($\alpha_i=0$) の場合は価格需要者の予想を，$\beta_i=0$ ($\alpha_i=1$) の場合はクールノー＝ナッシュ型の予想を示すことに注意しておこう。

$\beta_i=\dfrac{dx_{-i}}{dx_i}$ を一定として $\Pi_i(x_i, x_i+x_{-i})$ を最大にする x_i を x_{-i} に対応させる関数は，

(5) $x_i=x_i(x_{-i})$

のように書けるが，クールノー型の予想の場合にならってこれを企業 i の反応関数 (reaction function) とよぶことにしよう。マクメイナス (1964) は上の反応関数に他の企業全体の産出量を加えた関数

(6) $X_i(x_{-i})=x_i(x_{-i})+x_{-i}$

を総反応関数 (combined reaction function) とよんでいる。

さて企業 i の利潤極大のための条件を求めるために $\alpha_i=dx/dx_i$ を一定として(3)を x_i に関して微分することにしよう。一階の条件として

(7) $R_i(x_i, x, \alpha_i)=f(x)+\alpha_i x_i f'(x)-C_i'(x_i)=0$

がえられる。A1, A2 より $0\leqq\alpha_i\leqq1$ であるかぎり $\Pi_i(x_i, x)$ は x_i についての強い凹関数であることが知られる。したがって $\Pi_i(x_i, x)$ を最大にする x_i は適当な範囲の x に対して一意に定まる。これを総生産量に対する反応関数といい

(8) $x=\tilde{x}_i(x)$

のように表記しよう。

いま(7)で $x_i=0$ とおいたときの解を $\overline{X}_i$ とおくと，

(9) $\underline{X}_i=f^{-1}\cdot C_i(0)$

となる。また $x_i=x$（すなわち $x_{-i}=0$）とおいたときの解，すなわち

(10) $f(x)+\alpha_i xf'(x)-C_i'(x)=0$

の解を $\underline{X}_i(\alpha_i)$ とおけば，それも各 α_i について一意に定まる。以下とくに混乱のおそれのない場合にはこれをたんに $\underline{X}_i$ と記すことにする。すると仮定A1，A2と条件 $0\leqq\alpha_i\leqq1$ が満たされる場合には，反応関数(8)上の点で $x_i\geqq0$ および $x\geqq x_i$ と両立する x の範囲は区間 $[\underline{X}_i, \overline{X}_i]$ で与えられることが知られる。(2) ここで $\underline{X}_i$ は $+\infty$ の可能性もゆるすものとし，その場合には上の区間の右端は開いているものと解釈する。なお $f'+\alpha_i x_i f''$ が負の場合には(8)の曲線は右下りになることに注意しておこう。

定義 $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n)$ を所与とするとき $E(\alpha)=(x_1^*, x_2^*, \cdots\cdots x_n^*, x^*)\in R^{n+1}$が αー寡占均衡であるとは

(i) $x_i^*=\tilde{x}_i(x^*)$ $\qquad (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$

および

(ii) $x^*=\sum_{i=1}^{n} x_i^*$

を満たすことをいう。

上の条件(i)は各企業が与えられた予想の下で利潤を最大にしていることを意味し，(ii)は市場の需給バランスの条件を与えるものである。寡占均衡 $E(\alpha)$ の存在と α に関する微分可能性についてのつぎの結果は，前稿で証明されている。

定理 1 仮定A1～A3の下で各 $i=1, 2, \cdots\cdots, n$ について $0\leqq\alpha_i\leqq1$ が与えられているとき

(i) α-寡占均衡が存在するための必要十分条件は，

(i) $\overline{X}\geqq\underline{X}(\alpha)$

注（2） くわしくは川又（1985）を見よ。なお $\overline{X}_i\geqq\underline{X}_i$ となることも知られる。

および

(ii)　$\bar{X} \geqq \sum \tilde{x}_j(\bar{X})$

が成立することである。ただしここで $\bar{X}=\min_i \bar{X}_i$, $\underline{X}(\alpha)=\max_i \underline{X}_i(\alpha_i)$ と定義されているものとする。また均衡は存在する場合には一意であり，$E(\alpha)$ は α に関して連続微分可能となる。

4　推測的変動に関する比較静学

前節の定理 1 のように，適当な前提条件の下では(2)および(7)の解が寡占均衡 $E(\alpha)$ を与え，しかもそれは α に関して連続微分可能となる。本節ではこれらの条件が満たされているものとして $E(\alpha)$ が各 α_i の変化によってどのような影響をうけるかを分析することにしよう。

まず(2)および(7)を α_i に関して微分すれば各 $i=1, 2, \cdots\cdots, n$ と $j \neq i$ について

(11a)　$$(f'+\alpha_i x_i f'')\frac{\partial x}{\partial \alpha_i}+(\alpha_i f'-C_i'')\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_i}=-x_i f'$$

(11b)　$$(f'+\alpha_j x_j f'')\frac{\partial x}{\partial \alpha_i}+(\alpha_j f'-C_j'')\frac{\partial x_j}{\partial \alpha_i}=0$$

が導かれる。ここで各 $i=1, 2, \cdots\cdots, n$ に対して $\gamma_i=\gamma_i(x_i, x, \alpha_i)$, $\delta_i=\delta_i(x_i, x, \alpha_i)$ を

(12)　$$\gamma_i=\frac{f'+\alpha_i x_i f''}{\alpha_i f'-C_i''}$$

(13)　$$\delta_i=\frac{x_i f'}{\alpha_i f'-C_i''}$$

とおけば，仮定A1，A2の下では 各 $0 \leqq \alpha_i \leqq 1$ に対して $\delta_i>0$ となり，さらに $\alpha_i x_i \leqq x/2$ の場合には $\gamma_i>0$ となる。またこの変換により(11)は

(11a)′　$$\gamma_i \frac{\partial x}{\partial \alpha_i}+\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_i}=-\delta_i$$

(11b)′　$$\gamma_j \frac{\partial x}{\partial \alpha_i}+\frac{\partial x_j}{\partial \alpha_i}=0$$

のように記される。したがって(2)に注意しつつ(11)′をすべての j について加え合わせて

(14)　$$v=1+\sum_{j=1}^{n}\gamma_j$$

とおけば，

(15)　$$\frac{\partial x}{\partial \alpha_i}=-\delta_i/v$$

が導かれる。したがって (11a)′, (11b)′ より各 $i=1, 2, \cdots\cdots, n$ と $j \neq i$ について

(16) $\dfrac{\partial x_i}{\partial \alpha_i}=-\delta_i(1-\gamma_i/v)$

(17) $\dfrac{\partial x_j}{\partial \alpha_i}=\delta_i\gamma_j/v$

となることが知られる。なおA1〜A3の仮定の下で各 i について $0\leqq\alpha_i\leqq1$ が成立する場合には $v>0$ および $v-\gamma_i>0$ となることが容易に確められる。(川又（1985）補助定理2）

以上の結果をまとめるとつぎの命題が得られる。

定理 2 仮定A1〜A3の下で各 i $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ について，$0\leqq\alpha_i\leqq1$ ならば

(i) $\partial x/\partial\alpha_i=-\delta_i/v<0$

(ii) $\partial x_i/\partial\alpha_i=-\delta_i(v-\gamma_i)/v<0$

(iii) $\partial x_j/\partial\alpha_j=\delta_i\gamma_j/v$

となる。この最後の表現は，$\alpha_i x_i\leqq\frac{1}{2}x$ の場合には正となる。

つぎに企業 i の市場占拠率 s_i $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ を

(18) $s_i=x_i/x$

と定義すれば定理2よりつぎの命題が導かれる。

系 1 定理2の仮定の下で各 i について $\partial s_i/\partial\alpha_i<0$，また $j\neq i$ について $\partial s_j/\partial\alpha_i>0$ となる。

証明） $j\neq i$ について

(19) $$\frac{\partial s_j}{\partial\alpha_i}=\frac{1}{x}\frac{\partial x_j}{\partial\alpha_i}-\frac{x_i}{x^2}\frac{\partial x}{\partial\alpha_i}=\frac{1}{x}\frac{\delta_i}{v}\left(\gamma_i+\frac{x_i}{x}\right)$$
$$=\frac{1}{x}\frac{\delta_i}{v}\frac{(x+\alpha_i x_i)f'+\alpha_i x_i x f''-x_i C_i''}{x(\alpha_i f'-C_i'')}>0$$

また $\sum s_i=1$ ゆえ $\partial s_i/\partial\alpha_i<0$ となる。　　　　（証明終り）

つぎに企業 i の価格ー費用マージン m_i を

(20) $m_i=(p-C_i')/p$

と定義すれば，これについてつぎの命題が成立する。

系 2 定理2の仮定の下で

(i) $\partial m_i/\partial\alpha_i>0$

となり

(ii) $j \neq i$ について $1>2/\varepsilon+1/\eta_j$ であれば $\partial m_j/\partial\alpha_i>0$，また $f''<0$，$\eta_j<1$ ならば $\partial m_j/\partial\alpha_i<0$ となる。ただし ε は需要の弾力性 η_j は企業 j の供給の弾力性を示すものとする。

証明）(i)は

(21) $$\frac{\partial m_i}{\partial\alpha_i}=-\frac{1}{f^2}\left(fC_i''\frac{\partial x_i}{\partial\alpha_i}-f'C_i'\frac{\partial x}{\partial\alpha_i}\right)$$

に定理2を適用すればよい。

(ii) の証明については

(22) $$\frac{\partial m_j}{\partial\alpha_i}=-\frac{1}{f^2}\left(fC_j''\frac{\partial x_j}{\partial\alpha_i}-f'C_j'\frac{\partial x}{\partial\alpha_i}\right)=-\frac{1}{f^2}\frac{\delta_i}{v}(fC_j''\gamma_j+C_j'f')$$

であること，したがって，かっこの中の表現が

$$1+\frac{ff''}{(f')^2}-\frac{C_j'}{x_jC_j''}>0$$

であれば負になり，逆の場合には正になることより導かれる。じっさい $xf''>2f'$ と仮定されていたから

$$\frac{ff''}{(f')^2}>\frac{2f}{f'x}=\frac{-2}{\varepsilon}$$

となるから，$1>2/\varepsilon+1/\eta_j$ であれば

$$\begin{aligned}&1+\frac{ff''}{(f')^2}-\frac{C_j'}{x_jC_j''}\\&>1-\frac{2}{\varepsilon}-\frac{1}{\eta_j}\\&>0\end{aligned}$$

となる。また $f''<0$，$\eta_j<1$ ならば

$$\begin{aligned}&1+\frac{ff''}{(f')^2}-\frac{C_j'}{x_jC_j''}\\&<1-\frac{1}{\eta_j}\\&<0\end{aligned}$$

となる。

つづいて企業 i の（総）推測的変動の変化が利潤および経済的厚生に与える影響について述べよう。利潤の変化についてはつぎの命題が主張できる。

定理 3 仮定A1～A3が満たされ，しかもすべての i について $0 \leqq \alpha_i \leqq 1$ であるとする。そのとき

(i) $\partial \Pi_i / \partial \alpha_i$ は α_i が十分ゼロに近いときは正で，α_i が十分1に近いときには負になる。また各 α_j $(j \neq i)$ が $0 < \alpha_j < 1$ を満たすなら Π_i は dx/dx_i の予想値 α_i がその実現値（すなわち $\frac{\partial x}{\partial \alpha_i}$ および $\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_i}$ を(15)，(17)で定義したとき $\frac{\partial x}{\partial \alpha_i} \Big/ \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_i}$）に等しいときに最大となる。

(ii) 各 $j \neq i$ について $\partial \Pi_j / \partial \alpha_i > 0$ となる。

(iii) 企業 i の予想の弾性値 $\alpha_i x_i / x$ が最小（すなわち $\alpha_i x_i \leqq \alpha_k x_k$ all k）であるなら $\partial (\sum \Pi_k) / \partial \alpha_i > 0$ となる。

証明）(i)について(7)および(16)，(17)を用いると，

$$
\text{(23)} \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Pi_i}{\partial \alpha_i} &= (f - C_i') \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_i} + f' x \frac{\partial x}{\partial \alpha_i} \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_i} - \alpha_i \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_i} \right) x_i f' \\ &= - x_i f' \delta_i [(1 - \alpha_i) - \alpha_i \sum_{k \neq 1} \gamma_k] / v \end{aligned}
$$

となる。ここで定理1より(40)の最後の表現の各項は $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n)$ の連続関数とみなすことができる。また本定理の仮定の下では，$\alpha_i = 0$ のときは正で，$\alpha_i = 1$ のときは負となる。したがって Π_i の最大値は区間〔0, 1〕の内点で達成され，(23)の中間の表現より，それは $\frac{\partial x}{\partial \alpha_i} = \alpha_i \frac{\partial x}{\partial \alpha_i}$ を満たさなければならない。

(ii) (7)および(15)(17)を用いると

$$
\text{(24)} \quad \begin{aligned} \frac{\partial \Pi_j}{\partial \alpha_i} &= (f - C_i') \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_i} + f' x_j \frac{\partial x}{\partial \alpha_i} \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_i} - \alpha_j \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_i} \right) x_j f' \\ &= -(1 + \alpha_j \gamma_j) x_j f' \end{aligned}
$$

となり，この最後の表現は正となることが知られる。

(iii) 上の(i)と(ii)を用いると

$$
\text{(25)} \quad \begin{aligned} \frac{\partial (\sum \Pi_k)}{\partial \alpha_i} &= f' \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_i} x - \sum \alpha_k x_k \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i} \right) \\ &= f' \left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_i} (x - \alpha_i x_i) + \sum_{k \neq i} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i} (x - \alpha_k x_k) \right) \end{aligned}
$$

$$\geqq f'\left(x-\alpha_i x_i\right)\frac{\partial x}{\partial \alpha_i}$$
$$\geqq 0$$

つぎに企業 i の α_i の変動が経済厚生に及ぼす効果について考察しよう。ここでは経済厚生を，消費者余剰および生産者余剰の総和に等しい。

(26) $$W=\int_0^x f(y)dy-\sum_{k=1}^n C_k(x_k)$$

によって測ることにしよう。つぎの定理は α_i の減少が経済厚生を増大するための条件を与えるものである。

定理 4　仮定A1～A3が成立し，すべての i について $0\leqq\alpha_i\leqq1$ であるとする。そのとき（C）$\alpha_i x_i\geqq\alpha_k x_k$ all k（企業 i の予想の弾力性 $\alpha_i x_i/x$ が最大である）ならば，$\dfrac{\partial W}{\partial \alpha_i}<0$ となる。

証明）(7)を用いると定理の仮定より

(27) $$\frac{\partial W}{\partial \alpha_i}=f\frac{\partial x}{\partial \alpha_i}-\sum_k C_k'\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i}$$
$$=-\left(\sum\alpha_k x_k\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i}\right)f'$$
$$\leqq-\alpha_i x_i f'\sum\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i}$$
$$=-\alpha_i x_i f'\frac{\partial x}{\partial \alpha_i}$$

となる。したがって定理 2 より結論が導かれる。

系 1　定理 4 の仮定の下で α_i を増加するとき，総利潤の増加は経済厚生増大のための必要条件である。α_i を減少するときは総利潤の増加は経済厚生減少のための十分条件である。

証明）(25)，(27)より

(28) $$\frac{\partial(\sum\Pi_k)}{\partial \alpha_i}=f'\frac{\partial x}{\partial \alpha_i}x+\frac{\partial W}{\partial \alpha_i}$$

となることに注意して定理 2 を応用すればよい。

5　推測的変動の戦略的選択

定理 1 では，一定の条件の下で，$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\cdots\cdots,\alpha_n)$ が与えられると均衡産出量ベクトル $\boldsymbol{x}=(x_1,$

……, x_n）が定まることが明らかにされた。したがって各企業の利潤ベクトル $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\alpha})=(\Pi_1[\boldsymbol{\alpha}],\cdots\cdots,\Pi_n[\boldsymbol{\alpha}])$ が定まることになる。また定理3では α_i の変動がいかに Π_i に影響を及ぼすかを明らかにした。いま各企業が，自身の α_i の変化が Π_i にどのような影響を及ぼすかを知っているとして，α_i を戦略的に選ぶものと想定してみよう。そのようなゲームの均衡点の存在およびそれを特色づける性質について吟味することが本節のテーマとなる。

つぎの二つの定義は以下の分析を行うにあたって基本的な概念を規定するものである。

定義 2 企業 i の推測が斉合的である（consistent）であるとは，$\partial x/\partial\alpha_i$, $\partial x_i/\partial\alpha_i$ を(15)および(16)で定まる均衡解として現実する値であるとするとき，

$$(29)\quad \alpha_i=\frac{\partial x/\partial\alpha_i}{\partial x_i/\partial\alpha_i}$$

が成り立つことをいう。またすべての企業の予想が斉合的であるような $\boldsymbol{\alpha}$-寡占均衡 $E(\boldsymbol{\alpha})$ を斉合的均衡であるという。

定義 3 $(x_1^*,\cdots\cdots,x_n^*,x^*,\alpha_1^*,\cdots\cdots,\alpha_n^*)$ あるいはより簡潔には $\boldsymbol{\alpha}^*=(\alpha_1^*,\cdots\cdots,\alpha_n^*)$ が $\boldsymbol{\alpha}$ を戦略とするゲームの（局所）均衡であるとは(i) $(x_1^*,\cdots\cdots,x_n^*,x^*)$ が $\boldsymbol{\alpha}^*$ 寡占均衡であり，しかも（$\boldsymbol{\alpha}^*$ のある近傍内の）すべての $\boldsymbol{\alpha}$ に対して

$$(30)\quad \Pi_i[\boldsymbol{\alpha}^*]\geqq\Pi_i[\boldsymbol{\alpha}^*/\alpha_i]\quad(i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

が成立することをいう。ここで右辺の関数は $\boldsymbol{\alpha}^*$ の第 i 成分のみを α_i でおきかえ推測的変動のベクトルに対応する均衡利潤を意味するものとする。したがっお(30)式はどの企業も自らの推測的変動のみを変えることによって利潤を増すことができないことを要請している。

斉合的寡占均衡の存在については，二次の費用関数と線型の需要関数の場合についてはプレスナハン（1981），すべての企業の技術が同一である場合についてはペリー（1982）によって分析されたが，つぎの結果はそれらが扱わない一般的なケースについて存在を主張するものである。

定理 5 仮定A1～A4の下では(i) $\boldsymbol{\alpha}$ を戦略するゲームの（局所的）均衡における各企業の推測的変動は斉合的である。また(ii) $n\geqq3$ である場合，あるいは $n=2$ であって，$f'+xf''<0$ である場合にはすべての i について $0<\alpha_i^*<1$ となる斉合的 $\boldsymbol{\alpha}^*$ 均衡が存在する。

証明） 定理3(i)によれば Π_i の α_i に関する最大値は条件(29)を満たす，したがって $\boldsymbol{\alpha}^*$ を戦略とするゲームの局所的均衡における各企業の推測的変動は斉合的でなければならない。

(ii) 斉合的均衡の存在を示すためには(23)より方程式体系

(31) $\alpha_i=\dfrac{1}{1+\sum_{k\neq i}\gamma_k(\alpha)}\qquad(i=1,2,\cdots\cdots,n)$

に解があることを示せばよい。いま上の右辺の関数と $\phi_i(\alpha)$ とおいて α が単位立方体

(32) $I^n=\{\alpha\in R^n\,|\,0\leqq\alpha_i\leqq 1,\ i=1,2,\cdots\cdots,n\}$

の中の値をとるものとする。すると $\phi=(\phi_1,\phi_2,\cdots\cdots,\phi_n)$ は I^n から I^n の中への写像となることが知られる。まず $f'+xf''<0$ の場合には各 γ_k が正となるからこのことは明らかであり，そうでなくとも，$n\geqq3$ の場合には $\sum_{k\neq i}\gamma_k$ は正であることが以下のようにして示される。じっさい $f''<0$ の場合はこのことは自明であるから，$f''>0$ として，一般性を失うことなく $\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i$ が正であることを示してみよう。いま便宜上 $C_1''/\alpha_1\leqq C_i''/\alpha_i\quad i=2,\cdots\cdots,n-1$ とすると，各 i について $\alpha_i/(\alpha_i f'-C_i'')\geqq\alpha_1/(\alpha_1 f'-C_1'')$ であるから，

(33) $$\sum_{i=1}^{n-1}\gamma_i=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{f'}{\alpha_i f'-C_i''}+f''\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\alpha_i x_i}{\alpha_i f'-C_i''}$$
$$\geqq\frac{2\alpha_1 f'}{\alpha_1 f'-C_1''}+f''\frac{\alpha_1 x}{\alpha_1 f'-C_1''}$$
$$\geqq 0$$

となり，たしかに示すべき結果がえられる。

ここで定理1を考慮すれば ϕ は I^n から I^n への連続な写像であることが知られる。したがってブラウワーの不動点定理によって $\phi(\alpha^*)=\alpha^*$ を満たす $\alpha^*\in I^n$ が存在することになり，しかもどの i についても $\alpha_i^*=0$ あるいは $\alpha_i^*=1$ の場合が排除されることはただちにわかる。この α^* は(31)を満たすから定理が証明されたことになる。

推測的変動 α_i を企業 i の戦略とするゲームの均衡においては，各企業の利潤 Π_i は α_i を変化させたときの定常値をとらねばならず，そのことが企業の予想が斉合的であることを意味すること，そして斉合的均衡が存在することは上の定理で証明された。しかし α_i を戦略とするゲームの均衡であるためには，利潤がその定常値で極大になっていることを示さなければならない。以下ではその均衡が存在するための十分条件を示そう。なお以下では，必要な場合には，f および C_i は3次の連続な導関数をもつものと仮定する。

定理 6 仮定A1～A3の下ですべての企業の技術が同一であるならば，α を戦略とするゲームの均衡 α^* ですべての α_i^* が同一で0と1の間にあるものが存在する。

証明） (23)式においてすべての x_i と x_j が等しいとした場合，$\partial\Pi_i/\partial\alpha_i\geqq 0$ となるための必要条件は

(34) $g(\alpha_i)\equiv(f'+(n-1)x_if'')\alpha_i^2+((n-2)f'-C_i'')\alpha_i+C_i''\geqq 0$

となることである。しかるに $g(0)>0$, $g(1)<0$ で $g(\cdot)$ は連続であるから，$g(\alpha_i^*)=0$ であって，そこで g が減少しているような（典型的には $g'(\alpha_i^*)<0$ となるような）$0<\alpha_i^*<1$ が存在する。したがって Π_i は α_i^* において（局所的に）最大になっている。つくり方からすべての企業が α_i^* を選んだ場合は $\boldsymbol{\alpha}$ を戦略とするゲームの（局所的）均衡になっている。

利潤関数 Π_i が α_i に関して強い凹関数である場合には $\partial\Pi_i/\partial\alpha_i=0$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ を与える(31)の解は $\boldsymbol{\alpha}$ を戦略とするゲームの均衡になっていることは明らかである。しかし一般には極大のための条件 $\partial^2\Pi_i/\partial\alpha_i^2<0$ が満たされていることを示すのは容易ではない。それを示すために，つぎの条件をおくことにしよう。

A 4 すべての $x>0$ に対して $f''(x)\geqq 0$, $f'(x)+xf''(x)<0$, $f'''(x)\leqq 0$ およびすべての i と $x_i>0$ について $C_i'''(x_i)\geqq 0$ が成り立つ。

この条件は需要関数が線型で，費用関数が2次関数の場合には明らかに満たされている。

定理 7 仮定A1～A4および定理1の条件(i)および(ii)が $\alpha_i=0$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ について成り立つなら $\boldsymbol{\alpha}$ を戦略とするゲームの均衡 $(x_1^*,\cdots\cdots,x_n^*,x^*,\alpha_1^*,\cdots\cdots\alpha_n^*)$ ですべての i について $0<\alpha_i^*<1$ となるものが存在する。

証明） 定理5の証明のように，$\partial\Pi_i/\partial\alpha_i=(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ の解ですべての i について $0<\alpha_i<1$ を満たすものが存在する。つぎにその定常解において $\partial\Pi_i^2/\partial\alpha_i^2=0$ がすべての i について満たされていることを証明しよう。まず(23)より定常解において変数を評価すれば，

$$(35)\quad \frac{\partial^2\Pi_i}{\partial\alpha_i^2}=\frac{x_if'\delta_i}{v}\left(1+\sum_{k\neq i}\gamma_k+\alpha_i\sum_{k\neq i}\frac{\partial\gamma_k}{\partial\alpha_i}\right)$$
$$=\frac{x_if'\alpha_i\delta_i}{v}\left(\frac{1}{\alpha_i^2}+\sum_{k\neq i}\frac{\partial\gamma_k}{\partial\alpha_i}\right)$$

となる。ここで ν は(14)で定義されているものとする。以下では(35)の右辺が負であること，すなわち最後の表現のかっこの中が正であることを示そう。

さて $k\neq i$ とすれば，(15)(17)より

$$(36)\quad \frac{\partial\gamma_k}{\partial\alpha_i}=\frac{1}{\alpha_kf'-C_k''}\times\left[(f''+\alpha_k x_kf''')\frac{\partial x}{\partial\alpha_i}+\alpha_kf''\frac{\partial x_k}{\partial\alpha_i}-\gamma_k\left(\alpha_kf''\frac{\partial x}{\partial\alpha_i}-C_k'''\frac{\partial x_k}{\partial\alpha_i}\right)\right]$$
$$=\frac{\delta_i}{v(\alpha_kf'-C_k'')}[\alpha_kx_kf'''-C_k'''\gamma_k+f''(1-2\alpha_k\gamma_k)]$$

となる。

(36)の大かっこの中の最初の2つの項は仮定によって負である。したがって(35)より定理の証明は

$$\text{(37)}\quad \frac{1}{\alpha_i^2} > \frac{\delta_i}{v}\sum_{k \neq i}\left|\frac{(1-2\alpha_k\gamma_k)f''}{\alpha_k f' - C_k''}\right|$$

を示せば完結する。この不等式を確立するために，まず δ_i, γ_i, ν の定義式より

$$\begin{aligned} &\delta_i \leqq x_i/\alpha_i && (i=1, 2, \cdots\cdots, n) \\ \text{(38)}\quad &\alpha_i\gamma_i \leqq 1 && (i=1, 2, \cdots\cdots, n) \\ &v \geqq 1 \end{aligned}$$

が成立することに注意しよう。この第二の不等式は $|1-2\alpha_i\gamma_i| \leqq 1$ を含意するから，

$$\begin{aligned} \text{(39)}\quad \frac{\delta_i}{v}\sum_{k \neq i}\left|\frac{f''}{\alpha_k f' - C_k''}\right| &< \frac{x_i}{\alpha_i}\sum_{k \neq i}\left|\frac{f''}{\alpha_k f' - C_k''}\right| \\ &= \frac{1}{\alpha_i}\sum_{k \neq i}\gamma_k\left|\frac{-x_i f''}{f' + \alpha_k x_k f''}\right| \\ &\leqq \frac{1}{\alpha_i}\sum_{k \neq i}\gamma_k = \frac{1}{\alpha_i}\left(\frac{1}{\alpha_i} - 1\right) \end{aligned}$$

となる。この最後の等号は，(31)によるものである。以上によって(37)が導出されたから定理の証明は完結した。

例　$n=2$ で

$$p = -ax + b$$

$$C_i(x_i) = c_i x_i^2 + d_i x_i + e_i \qquad (i=1, 2)$$

である場合には(31)は

$$\text{(31)}'\quad \alpha_i = \frac{a\alpha_j + 2c_j}{(1+\alpha_j)a + 2c_j} \qquad (i, j=1, 2, i \neq j)$$

となる。したがって $i \neq j$ として

$$\text{(42)}\quad \alpha_i = [-c_i + \sqrt{(a+c_i)(ac_j/(a+c_j)+c_i)}]/a$$

が求める（総）推測的変動の均衡を与える。

引用文献

〔1〕 Bresnahan, T. F. "Duopoly Models with Consistent Conjectures," *American Economic Review* Vol. 71 (1981) pp. 934—945.

〔2〕 川又邦雄「推測的変動と寡占均衡の存在について」『三田学会雑誌』第77巻6号，1985.

〔3〕 McManus, M. „Equilibrium, Numbers and Size in Cournot Qligopoly", *Yorkshire Bulletin of Economic and Social Research,* Vol. 16, No.2 (1964).

〔4〕 Perry, M. K. "Oligopoly and Consistent Conjectural Varitions", The Bell Journal of Economics Val. 13, No.1 (1982).

（経済学部教授）