Title	丸山徹君学位授与報告
Sub Title	
Author	丸山, 徹
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1983
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.76, No.5 (1983. 12) ,p.727(115)- 731(119)
JaLC DOI	
Abstract	
Notes	学位授与報告
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19831201-0115

学位授与報告

丸山　徹君学位授与報告

報 告 番 号　甲第676号
学位の種類　経済学博士
授与の年月日　昭和57年9月24日
学位論文題名　「Variational Problems in Economic Analysis
—Existence of Optimal Solutions—
経済分析における変分問題
—最適解の存在—」

内 容 の 要 旨

1　現代の経済分析を特徴づける基調は，レオン・ワルラスの伝統に従う一般均衡理論の思想と分析手法の中に凝縮されている。この均衡理論の数理構造を主として函数解析学の立場から明澄に把握し，かつ展開することが，過去10年間における私の主要な研究課題のひとつであった。本論文は，その一環として私が行なってきた経済分析における変分学的方法の研究のうち，とくに視野を解の存在条件論に限定して論じようとするものである。

当初，変分学が経済学に導入される契機となったのは投資理論や最適成長理論の開発であったが，今日ではその適用範囲も大きく拡大され，古典的変分法の手法はもとより，ポントリャーギンの最大値原価など，より現代的な最適制御理論の成果も活用されるにいたった。ただその際，最適解の性質やその特徴づけについては比較的詳しい研究がなされてきたのであるが，解そのものの存在を厳密に論証する試みは，南雲道夫らの先駆的結果が知られるにすぎなかった。この問題は解析学の新しい動向——非線形函数解析，凸解析そして多価写像の理論など，ごく最近の進展を俟って漸く統一的方法論にもとづく研究の糸口が見出されたと言うべきであろう。ここに提出する私の研究もまた，学界におけるこの状況を反映するものであり，経済均衡理論の数理構造の明確化とその深化とに，いささかなりとも寄与しうるところがあれば幸いである。

2　この論文で取り扱う変分問題を最も単純な形式で要約すれば次のようである。

(A)　Aumann-Perles 型変分問題。$u:[0,\ 1]\times R^l_+\to R$, $g:[0,\ 1]\times R^l_+\to \bar{R}^l_+$ を所与の可測写像とし，$\omega\varepsilon R^l_+$ を定ベクトルとする。このとき

$$\int_E g(t,\ x(t))dt\leqq\omega$$

なる制約条件の下で，

$$J(x,\ \mathrm{E})=\int_E u(t,\ x(t))dt$$

を最大化する可測写像 x: $[0,\ 1]\to R^l_+$ と可測集合E $\subset[0,\ 1]$を求める問題は（拡張された）Aumann Perles 型変分問資と呼ばれ，資源配分の理論やゲーム論において重要な役割を果たす。この問題に解が存在するための条件を，われわれは第Ⅲ章で究明する。その目的を達するために，いわゆる Radon 測度の積分々解の理論を活用するので，積分々解に関するいくつかの新しい結果を，あらかじめ第Ⅱ章で論じ，第Ⅲ章への準備としたい。

(B)　Arkin-Levin 型変分問題。$u:[0,\ 1]^2\times R^l_+\to R$, $g:[0,\ 1]^2\times R^l_+\to R^l_+$, $\omega:[0,\ 1]\to R^l_+$ を所与の可測写像とするとき，

$$\int_0^1 g(s,\ t,\ x(s,\ t))ds\leqq\omega(t)\,a.c.$$

なる制約条件の下で

$$J(x)=\int_0^1\int_0^1 u(s,\ t,\ x(s,\ t))ds\,dt$$

を最大化する可測写像 $x:[0,\ 1]^2\to R^l_+$ を求める問題は Arkin-Levin 型変分問題と呼ばれる。われわれはこの問題に対する解の存在証明を第Ⅳ章で行なう。そのためには，non-atomic な有限次元ベクトル測度の値域に関する凸性定理を，無限次元 Banach 空間に値をとるベクトル測度の場合に拡張しなければならない。この点に関する新しい結果も，多価写像の積分論への応用と併せて同じ章で論ぜられる。

(C)　最適経済成長問題。$u:R^2_+\to R_+$ および $f:R^2_+\to R_+$ を所与の可測函数，λ および δ を正の定数とするとき，

$$\dot{k}(t)=s(t)f(t,\ k(t))-\lambda k(t)$$
$$k(0)=\bar{k}\ (\text{所与})$$

なる制約条件の下に，

$$J(k,\ s)=\int_0^\infty u(t,(1-s(t))f(t,k(t)))\cdot e^{-\delta t}dt$$

を最大化する $k:R_+\to R_+$, $s:R_+\to[0,\ 1]$ を求める問題は，最適成長理論の原型である。この問題に対する解の存在証明が第Ⅴ章において述べられるが，（非

線形）積分作用素 J のいわゆる upper closure property の証明が重要な鍵となるであろう。その際，加重 Sobolev 空間の理論が技術的な便宜を提供してくれることにも注意したい。

さて，これらすべての理論をつうじて多価写像の解析が強力な威力を発揮するが，これは解析学の中でもかなり特殊な問題である。そこでこの点についての簡略な説明を第I章に述べておいた。より詳細な叙述としては拙著『函数解析学』（昭和55年）第6章を参照されたい。

3　ここに報告された殆どすべての結果は Proc. Japan Acad. その他の雑誌に，いくつかの独立な論文として既に発表され，また理論・計量経済学会，日本数学会，アメリカ数学会等における講演としても公にされたものである。

論文審査の要旨

経済問題の変分法によるとり扱いは，周知のごとく1928年のフランク・ラムゼイによる最適貯蓄理論の定式化に始まり，近時にいたってサムエルソン，クープマンス，キャス，ヤーリなどによる最適成長理論のルネッサンスに，それからまたこれとは一応別個なインヴェントリー・コントロールに関するアロー，カーリン，スカーフなどの研究に例示される最適制御理論の進展に，その隆盛と繁栄を示している。丸山徹君の学位請求論文 "Variational Problems in Economic Analysis: Existence of Optimal Solutions"（「経済分析における変分問題――最適解の存在」）は，このような最適化理論に見られるいくつかのタイプの変分問題を対象として，それらに最適解が存在するための十分条件を厳密に解明し，著者の専門とする関数解析の見地から問題の数学的構造に統一的な相を賦与しようとする興味ある試みである。同君の論文は五つの章から構成され，三つの型の変分問題，すなわち(1)いわゆるオーマン＝ペルレス型の変分問題，(2)いわゆるアルキン＝レヴィン型の変分問題，および(3)無限計画期間をもつ最適成長モデルの変分問題，の最適解の存在を，それぞれ第3章，第4章および第5章において証明することを主目的としている。そしてそのために欠くことのできない数学的手段なかんずく通常の標準書ではとり扱われる機会の少ない関数解析の若干のトピックスについて系統的な予備説明を与えるのが，最初の二つの章の目的である。

第1章では主として可測多価写像から可測一価関数を選択するいわゆる可測選択子の問題が関数解析的に考察され，また変分法においてしばしば重要な役割を演ずるカラテオドリーの関数と正規被積分関数の有用な性質が究明されている。前者すなわち可測多価写像における可測選択子の存在定理は，フォン・ノイマンによって先鞭をつけられたところであるが，これは関数解析，確率論ならびに最適化理論のある種の問題に対して不可欠な，枢要な基礎を提供するものであり，また後者のカラテオドリーの関数や正規被積分関数も，変分法，最適制御理論の分野において決定的な役割を演ずる基本的用具であるといわねばならない。

つぎに第2章では，測定（measure）の斜積すなわち積分分解の概念の説明と，そのいわゆる＊弱収束に関する定理の証明とが与えられている。これらの結果は，第3章で著者が拡張されたオーマン＝ペルレスの変分問題を解くさいに，きわめて有効に活用されるところとなる。

これら数学的予備考察の部分における著者の説明は，当該の概念構造の本質的骨格を無駄なく捉えており，また他にあまり類例が見られないところから，数学者にとっても有益な展開あるいは要約と称してよいものであろう。

上記の2章を準備として，第3章以下では，いよいよ本来の主題である三つのタイプの変分問題が順次にとり上げられる。まず第3章ではオーマン＝ペルレス型の変分問題の著者による拡張が企図されるわけであるが，もともとオーマン＝ペルレスが扱った変分問題というのは

$$\underset{x}{\text{Maximize}} \quad \int_0^1 u(t,\ x(t)dt$$

$$s.t. \quad \int_0^1 x_i(t)dt=1 \ (i=1,\ 2,\cdots\cdots,\ l)$$

のような形をとるものであり，これはつぎに例示されるような経済問題を含むと解することができるであろう。すなわち，いま経済主体 t が実数区間 [0, 1] に連続的に分布しており，彼らの財配分が写像 x;[0, 1] $\to \boldsymbol{R}^l$ であらわされ，配分 $x(t)$ に応ずる主体 t の効用が $u(t,\ x(t))$ であらわされるとするとき，それらの主体の効用の総和を各財の総賦存量がすべてにひとしいという制約の下で最大にするというのがそれである。

このようなオーマン＝ペルレス型の変分問題に果たして最適解が存在するかどうかは，実のところ必ずしも自明な問題ではなく，最適解の存在しえない事例を

見出すことは容易である。そこでオーマン＝ペルレスは，そのような不都合が生ずる場合を排除し，上記の問題が必ず最適解をもつための十分条件を確立したのである。

彼らの所業は，その後アートスタインやベルリオッチ＝ラスリーなどによってさらに一般化され，経済学的応用もいくつか試みられているが，丸山君の狙いはそうした実情を踏まえた上で

$$\underset{x,\,\mu}{\text{Maximize}} \int_T u(t,\ x(t))d\mu$$ ここで μ は T の上での測度

$$s.t.\quad \int_T g_i(t,\ x(t)d\mu \leqq \omega_i$$

$$(i=1, 2, \cdots\cdots,\ l)$$

$\mu \ll \overline{\mu}$ （所与の測定）

μ のラドン＝ニコディム微分は特性関数

のような形の変分問題を設定し，その最適解の存在条件を追求するところにある。オーマン＝ペルレスにおいては主体の集合 T が $[0, 1]$ 区間とされていたのに対し，ここではベルリオッチ＝ラスリーと同様それが一般にコンパクトな距離空間に拡張されており，配分の集合 X も $\boldsymbol{R}_+^l$ とされていたのが一般に局所コンパクトな Polish 空間（完備可分距離空間）に拡張されている。また経済学上の要請から，μ が可変な場合に問題がさらに一段と一般化されている点が，著者による問題設定のきわめて重要な特徴である。著者はそのような T，X の構造を前提とし，さらに関数 u，g_i にある種の条件をつけることによって，上記の一般化された変分問題に最適解の存在が保証されるための十分条件を明らかにした。著者の手法は $T\times X$ 上のラドン測度を定め，問題をそれと同値なもう一つの変分問題に変形した上で，積分分解の理論を適用する点ではベルリオッチ＝ラスリーのアイディアにしたがっているが，x のほかに新しい制御変数 μ を含む場合について問題を解決している点では後者と顕著に異なり，独自の貢献と考えられるものを示している。この問題の解決のために，著者はラドン測度のつくる空間の位相的性質ならびに凸集合の端点の理論を利用し，そのことをつうじて，もとの変分問題に最適解の存在することを見事に証明している。

ついで第4章ではアルキン＝レヴィン型の変分法を一般化することが意図される。アルキン＝レヴィン型の変分問題は

$$\underset{x}{\text{Maximize}} \int_0^1\int_0^1 u(s, t, x(s, t))ds\ dt$$

$$s.t.\quad \int_0^1 x(s, t)ds \leqq \omega(t) \text{ for all } t\in[0,\ 1]$$

のようなプログラムの最適解を求めることであらわされるが，ここでもわれわれは，この種の最適化問題に対してつぎのような経済的解釈を与えることができるであろう。すなわち $x(s,\ t)$ を，主体 $s\in[0,\ 1]$ のあいだにさまざまな財を期間 $[0,\ 1]$ にわたって定める配分とし，$\omega(t)$ を各時点 t において利用可能な賦存量とするとき，各主体の効用の総和をそれらの資源の制約に服しつつ最大ならしめるような問題と解するのがそれである。前にとり扱ったオーマン＝ペルレスの問題とは異なり，この問題においては配分関数 x が主体 t と時点 s の双方の関数となり，したがってまた資源の制約条件も s, t, x の三つの変数に依存する点に特徴が見出される。

アルキン＝レヴィンの原問題では s, t のそれぞれに関する積分について二つの対称的な制約条件がおかれており，そのために彼らの存在条件はかなり複雑なものになっているのであるが，著者はオーマン＝ペルレス型問題との形式的統一を目ざすために，それらのうち片方の制約条件を落している。しかし反面，t の変域などについては，原問題をさらに一般化することを企図しているのである。

この点にやや立入っていうならば，著者は上記の目的のために，まず可測多価関数の積分や，ある種の積分方程式が恒等的に0でない解をもつための条件などについて関数解析的な考察を加え，そのさい無限次元のリアプーノフ測度に関する新しい成果を利用するなど斬新な手法を駆使している。解の存在条件としては，当然仮定すべき可測性に関する仮定のほか

$$\Sigma(s, t)=(g_1(s, t, \Gamma(s, t)), \cdots\cdots,\ g_l(s, t, \Gamma(s, t)),\ u(s, t, \Gamma(s, t)))$$

$\Delta(s, t)=\Sigma(s, t)$ の凸苞

とするとき，$\Delta(s, t)$ が積分有界となる

という仮定のおかれているのが注目される。この仮定を満たすための十分条件として，著者は

$$\bar{u}(s, t)=\sup_{x\in\Gamma(s, t)} |u(s, t, x)|$$

$$\bar{g}(s, t)=\sup_{x\in\Gamma(s, t)} \|g(s, t, x)\|$$

の可積分性をあげているが，これらの条件は具体的な問題への適用にさいして容易にチェックしうる形態を

とっているということができるであろう。

最後に第5章は数理経済学の最近の進展途上もっとも魅惑的な主題の一つであった最適成長理論のモデル

$$\underset{k,\,s}{\text{Maximize}} \int_0^\infty u[t, (I-M_{s(t)})f(t, k(t))]e^{-\delta t}\,dt$$
$$\text{s.t.} \quad \dot{k}(t)=M_{s(t)}f(t, k(t))-M_\lambda k(t)$$
$$k(0)=\bar{k}$$

をとり扱う。ここでuは効用関数，fは生産関数であり，δは将来割引率，λは資本の消耗率，M_sは貯蓄率s_i（$i=1, 2, \cdots\cdots, l$）を対角元素とする対角行列，同じくM_λはλを対角元素とする対角行列である。いま

$$\omega(t, k, s)=u[t,\ (I-M_s)f(t, k)]$$
$$g(t, k, s)=M_s f(t, k)-M_\lambda k$$

とおき，νをR_+のすべてのルベーグ可測集合Eについて

$$\nu(E)=\int_E e^{-\delta t}\,dt$$

で定義されるR_+上の有限測度とすれば，この変分問題は，また

$$\underset{k,\,s.}{\text{Maximize}} \int_0^\infty \omega(t, k(t), s(t))\,d\nu$$
$$\text{s.t.} \quad \dot{k}(t)=g(, k(t), s(t))$$
$$k(0)=\bar{k}$$

の形に書き直すことができる。

この種の最適成長理論における最適解の厳密な存在証明は，最近チチルニスキーなどによって与えられたが，本章における著者の試みも基本的にはこの線に沿い，加重されたソボレフ関数空間の概念を有効に活用することによって，無限計画期間に伴う分析上の困難を克服することを意図している。また関数uや，関数fについて比較的緩い条件を課して分析を進め，数学上本質的な問題の所在を明確に浮び上らせようとしている点にも，著者の意図を看取することができよう。

学位請求論文の内容については以上のごとくであるが，あらためてその長所と思われるものの主要な点を摘記すれば，以下のとおりである。

(1) 予備的な最初の2章でとり上げられている可測選択子や斜積測定の概念は，数学者のあいだでも確率論，制御理論の専門家を除けば馴染みの薄いものであり，著者はその本質的な部分はきわめて的確に要領よく記述している。したがってこの箇所の記述だけをとってみても，一般の数学者に裨益するところが大であるといって過言でない。

(2) オーマン＝ペルレスの変分問題に対して測度の斜積を用いるという独創的手法は，元来ベルリオッチ＝ラスリーに負うものであるが，彼らがμ一定あるいはEが全空間Tに一致する場合のみをとり扱っているのに対して，著者がμあるいはEをも可変として存在条件を確立することに成功したのは，大きな寄与である。この成果は，経済学的にも利用できるゆたかな可能性を含んでいるということができよう。

(3) 上記のようにEを可変とするさいの困難を克服するため，命題3.7において関数hが特性関数となることを示す著者の論法は，きわめて巧妙であり，かつ原論文には見られぬ新たなステップを含むものである。

(4) 前にも述べたように，著者はアルキン＝レヴィンの原問題における制約条件の片方を除いているが，この単純化のために著者の導いた条件は原論文のそれに比してかなり簡潔明晰なものになっている。また変数sの変域を一般の局所コンパクトな空間としていることなどもあって，原論文とは異なった分析手法を必要とする箇所も少なくないが，そのために著者が採択している解決法，なかんずく無限次元ベクトル測度の凸性に関する成果の援用などは数学的にも注目すべきものである。

つぎに本論文の内容について，主として経済学的な見地からする二三のコメントを加えておく。

(1) まず第3章の定理3.1についてであるが，そこでの存在条件の一つである（a．iii）の条件（すなわち命題3.4の(iii)の条件）は，効用関数uと生産技術にかかわる関数gの双方にまたがる関係を表現したものである。この点については，均衡分析の存在定理における常套的手法に倣って，存在条件を関数u，gそれぞれの見やすい性質によって表現するか，あるいはそれを可能にするようなより特定化されたモデル設定を行うことが，経済学的には望ましいであろう。もちろんuが有界であれば問題はないが，それを当初から仮定することは，経済学的には興味に乏しいように思われる。

(2) 同様に第4章の定理4.1の場合も，Σの凸葡が積分有界であるための経済学的に有意味な十分条件が要望されるところである。76ページに与えられている条件（11）は，やはり当初から仮定するにはかなり厳しい要請であるというべきであろう。

$\bar{u}(s, t)$

$\bar{g}(s, t)$

が可積分でなければ最適とはならないようなモデルの

設定を考察するのが，経済学の問題としては要諦である。主体の数が有限であるような標準的な均衡モデルにおいてさえ，達成可能な資源配分集合をコンパクトたらしめるための十分条件の開発に，経済学者は従来多大の努力を注いできたのである。

(3) 最後に第5章の定理5.1において直接用いられている仮定5の場合も，その経済学的意味は必ずしも説得的であるとはいい難い。たとえば $l=1$ すなわち1生産物のモデルについて u や f が t から独立な（嗜好の変化や技術進歩を捨象した）標準的なケースを考えれば，条件式は，ある実数 b と可積分関数 $\theta(t)$ について

$$u((1-s)f(k))-b(sf(k)-\lambda k)\leqq\theta(t)\ \ \forall(k,s)$$

と書くことができる。ここでたとえば $sf(k)=\lambda k$ となるように $0<s_0<1, k_0>0$ を選べば，上の条件は

$$u((1-s_0)f(k_0))\leqq\theta(t)$$

となり，したがって左辺が正の値をとるかぎり，$\theta(t)$ の可積分性に反する帰結が生ぜざるをえないのでないかと思われる。

いうまでもなくこれらの点は，著者が今後本論文の内容の経済学的応用を進めるにあたって意を配ってほしい評者たちの要望を述べたものであって，本論文の卓越性をほとんど傷つけるものではない。すでに述べたところからも窺われるように，著者は関数解析とくに最近急速に発展した非線型解析や凸解析の分野についてきわめて豊富かつ正確な知識をもっており，これを縦横に駆使して，数理経済学における変分問題の数学的本質を明確化することに成功した。このような本論文の貢献はまことに顕著なものであり，よって，著者の研究の成果は請求された学位に十分適合するものであると認定する次第である。

論文審査担当者	主査	福岡正夫
同	副査	川又邦雄
同	〃	伊藤清