Title	ゲーム理論と社会選択 : 鈴木光男編 中村健二郎遺稿集
Sub Title	Kenjiro Nakamura : Game theory and social choice
Author	渡部, 隆一
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1982
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.75, No.5 (1982. 10) ,p.785(125)- 798(138)
JaLC DOI	10.14991/001.19821001-0125
Abstract	
Notes	書評論文
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19821001-0125

書評論文

ゲーム理論と社会選択

鈴木光男編『中村健二郎遺稿集』

渡部隆一

本書は，故中村健二郎君の遺稿集であって，19編の論文〔1〕～〔19〕が収められており，その内容によって次の4つの部分に分類されている。

Part Ⅰ	ψ-stability	〔1〕,〔2〕,〔3〕
Part Ⅱ	Games with Ordinal Preferences	〔4〕,〔5〕,〔6〕
Part Ⅲ	Social Choice	〔7〕～〔15〕
Part Ⅳ	Other Topics	〔16〕～〔19〕

最初の論文〔1〕は，

「社会的意志決定と Coalition Power」

であって，1971年11月の理論・計量経済学会において，東工大の鈴木光男教授との共同研究として発表されたものである。

内容は，平均結託力，k-安定，基礎値という概念を用いて社会的意志決定の構造を考察したもので，この報告は中村君の最初の学会報告であった。

次の〔2〕は，Luce〔20〕の quota-game に関する結果を m-quota game の場合に拡張したものである。

〔3〕は，手付を前提としない協力n人ゲーム (cooperative game without side payments) に関する Aumann-Peleg の理論 (〔21〕,〔22〕) について，ψ-安定という概念を利用し，いくつかの基本的定理を証明したものである。この〔2〕,〔3〕は中村君の修士論文であった。

さて，中村君の主要な業績は，Part Ⅱ，Ⅲ にあると考えられる。これらは，社会的選択理論 (Social Choice Theory) をゲームの理論を用いて発展させるという意図のもとに書かれた一連の論文である。これらの論文を読んで気がつくことは，ある1つの命題が繰り返し用いられ，それが理論の発展に重要な役割りを演じているということである。

以下，個々の論文について批評するよりも，中村君の思想の発展についてその跡を辿ってみるこ

とにする。

なお，ゲームの理論に関する基本的知識は既知とする。不明な点は次の2著を参照されたい。

鈴木光男著「ゲームの理論」　勁草書房

鈴木光男，中村健二郎共著「社会システム」　共立出版

1　単純ゲーム

最初に，後の解説に必要となる概念や記号を説明しておく，当然の事ながら，中村君の論文では，理論が発展するにつれて記号も変化しているが，この論文では混乱しないように記号は統一する。したがって，中村君の論文の記号と多少の相違ができた部分もあることをことわっておく。

――協力 n 人ゲーム――

プレイヤー全体の集合をN，各プレイヤーを i（$1 \leqq i \leqq n$）で表す。

$$N=\{1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n\}$$

Nの部分集合全体の作る集合族を2^Nで表し，Nの空でない部分集合を**提携**（coalition）という。

集合族 2^N 上で定義された実数値関数 v で次の性質を満たすものを考える。

(1)　$v(\phi)=0$　　〔ϕは空集合を表す〕

(2)　**優加法性**（superadditivity）

$$R \cap S=\phi \Rightarrow v(R \cup S) \geqq v(R)+v(S)$$

Nと v の組$(N,\ v)$を**協力 n 人ゲーム**，正確には手付(side payment)と，転移可能な効用（transferable utility)を前提とする協力 n 人ゲーム（cooperative n-person game with side payments）という。また，v を**特性関数**（characteristic function）と呼ぶ。

特に(2)が常に等号で成り立つ場合，すなわち，

$$(2') \quad R \cap S=\phi \Rightarrow v(R \cup S)=v(R)+v(S)$$

が成り立つときには，$(N,\ v)$ を**非本質的ゲーム**（inessential game）といい，そうでない場合，すなわち(2)が不等式で成り立つような少くとも1組のR，Sが存在する場合には**本質的ゲーム**（essential game）と呼ぶ。

本質的ゲームは次のように正規化することができる。

$$\begin{cases} v(N)=1 \\ \text{すべての } i \in N \text{ に対して，} v(\{\ i\ \})=0 \end{cases}$$

これを**0－1正規化**と呼ぶ。以下では本質的ゲームのみを考える。

特に，各提携 S に対して，$v(S)$ が 0 または 1 のいずれかの値しかとらないゲームを**単純ゲー**

ム (simple game) という。

〔例1〕 多数決原理をゲームとして考えてみる。プレイヤー全体の集合Nを1つの社会として考え，社会Nにおける決定はn人の中の過半数以上の賛成によってなされるとする。ただし，賛否同数のときは，プレイヤー1の賛否によって決められるとする。

このような多数決の制度は，次のような単純ゲームによって表現することができる。これを単純多数決ゲームという。

$$\begin{cases} |S| > \dfrac{n}{2} & \text{ならば，} \ v(S)=1 \\ |S| = \dfrac{n}{2},\ 1 \in S & \text{ならば，} \ v(S)=1 \\ \text{これ以外の場合は，} \ v(S)=0 \end{cases}$$

ここで，$|S|$は提携S内のプレイヤーの数を表す。

単純ゲームにおいては，$v(S)=1$ となる提携を**勝利提携** (winning coalition)，$v(S)=0$ となる提携を**敗北提携** (losing coalition) という。

さて，今までは手付を前提としてきた。これは，提携を形成するにあたって，提携の獲得した利得をその提携内の各プレイヤーの貢献度に応じて配分するために，プレイヤーの間で自由に支払われる共通の交換単位，例えば貨幣のようなものが存在することを仮定している。しかし，そのような共通の交換単位の存在を考えることができない場合もある。そのような協力ゲームは，手付を前提としない協力n人ゲーム (cooperative n-person game without side payments) と呼ばれる。手付を前提としないゲームは，Aumann と Peleg により開発された。(〔21〕,〔22〕)

手付を前提としないゲームでは，**選択対象** (alternative outcomes) の集合$\Omega(\neq\phi)$を定め，Ωの部分集合全体の集合を2^{Ω}とするとき，2^Nから2^{Ω}の中への関数で次の性質を満たすものを考える。

$$\begin{cases} (3) \quad v(\phi)=\phi \\ (4) \quad v(N)=\Omega \end{cases}$$

そして，N, Ω, v の組 $G(N, \Omega, v)$ を**特性関数ゲーム**と呼ぶ (〔6〕)。

この場合の単純ゲームは，各提携に対して $v(S)$ が ϕ か Ω のいずれかとなるものであって，$v(S)=\Omega$ となる提携が勝利提携であり $v(S)=\phi$ となる提携が敗北提携であって，勝利提携全体の作る集合族$\mathscr{W}$を定めれば単純ゲームは定まる。その意味で，単純ゲームを$(N, \mathscr{W})$により表現することにする。

単純ゲーム$G=(N, \mathscr{W})$においては，提携の定義から，

$$\phi \notin \mathscr{W}$$

であるが，さらに少なくとも1つの勝利提携が存在する。すなわち，

$$\phi \neq \mathscr{W}$$

と仮定する。また，$\mathscr{W}$について次の性質を考える。（〔23〕）

(5)**単調性**（monotonicity）

$$S\in\mathscr{W},\ T\supset S\ \Rightarrow\ T\in\mathscr{W}$$

これが満たされれば，当然 $N\in\mathscr{W}$ である。

$\mathscr{W}$ が次の性質を満たすとき，G は properであるという。

(6) $\quad S\in\mathscr{W}\ \Rightarrow\ N-S\notin\mathscr{W}$

ここで，$N-S$ は S の N に関する補集合を表す。すなわち，

$$N-S=\{x \mid x\in N,\ x\notin S\}$$

である。もし G が proper ならば，すぐわかるように，次の不等式が成り立つ。

$$|\mathscr{W}|\leqq 2^{|N|-1}$$

$\mathscr{W}$ が次の性質を満たすとき，G は strong であるという。

(7) $\quad S\notin\mathscr{W}\ \Rightarrow\ N-S\in\mathscr{W}$

G が strong ならば，次の不等式が成り立つ。

$$|\mathscr{W}|\geqq 2^{|N|-1}$$

〔例1〕の単純多数決ゲームは，proper で strong である。

$\mathscr{W}$ が次の性質を満たすとき，G は **weak** であるという。

(8) $\quad \cap\{S \mid S\in\mathscr{W}\}\neq\phi$

この左辺を V_G で表し，V_G に属するプレイヤーを**拒否権を持つプレイヤー**という。

――順序関係――

選択対象の集合Ω上の二項関係を一般にRで表し，Rについて次の性質を考える。x，y，z 等はΩの元を表す。

(9) **反射的**（reflexive） $\forall x\in\Omega: x\mathrm{R}x$

(10) **完全性**（complete） $\forall x, y\in\Omega: x\mathrm{R}y$ または $y\mathrm{R}x$

(11) **推移的**（transitive） $x\mathrm{R}y,\ y\mathrm{R}z\ \Rightarrow\ x\mathrm{R}z$

(12) **対称的**（symmetric） $x\mathrm{R}y\ \Rightarrow\ y\mathrm{R}x$

(13) **反対称的**（antisymmetric） $x\mathrm{R}y,\ y\mathrm{R}x\ \Rightarrow\ x=y$

(14) **非反射的**（irreflexive） $\forall x\in\Omega: \sim(x\mathrm{R}x)$

(15) **非循環的**（acyclic） 任意の整数 $m\geqq 1$ に対して，

$$(x_2\mathrm{R}x_1,\ x_3\mathrm{R}x_2,\ \cdots\cdots,\ x_m\mathrm{R}x_{m-1})\Rightarrow\sim(x_1\mathrm{R}x_m)$$

ここで，$\forall$ は〝任意の〟と読み，～は〝でない〟と読む。

(10)が満たされているとき，(15)で $m=1$ とおけば(14)が出る。

(9), (10), (11)を満たすRをΩ上の**弱順序** (weak ordering) という。

(9), (10), (11), (13)を満たすRをΩ上の**線形順序** (linear ordering) という。

弱順序Rが与えられたとき，Ω上の**強い選好順序** (strict preference) Pおよび**無差別関係** (indifference relation) Iを次のように定める。

$$x \mathrm{P} y \iff x \mathrm{R} y,\ \sim(y \mathrm{R} x)$$

$$x \mathrm{I} y \iff x \mathrm{R} y,\ y \mathrm{R} x$$

Pは，(11), (14)を満たし，Iは(9), (11), (12)を満たす。すなわち，Iは同値関係である。

以下，Ω上の弱順序をR，線形順序をL，強い選好順序をP，無差別関係をIという文字で表す。各プレイヤーiは，Ω上に選好順序を持っており，それを表すときは右上にiという文字をつけて表すことにする。順序関係については，Sen〔24〕を参照されたい。

2 コア (Core)

ここで，中村君の論文において繰り返し用いられる命題について検討する。それは，コアが存在するための条件である。

さて，今まではプレイヤーの集合Nは有限集合として話を進めてきた。これは，いろいろの概念を理解しやすくするためであるが，Nが無限集合になっても前節に述べた概念は殆んどそのまま意味を持つ。中村君の論文でも，初期の論文〔1〕～〔4〕や，Part Ⅲ の大部分の論文ではNを有限集合と仮定しているが，中村君によるコアの存在条件は，Nが無限集合の場合にその真価を発揮するように思える。そこで，できるだけ一般の場合について解説することにする。念のため，単純ゲームの定義を再記しておく。

Nを空でない任意の集合とし，Nの空でない部分集合を提携という。提携をいくつか集めて作った集合族を$\mathscr{W}$とし，$\mathscr{W}$に属する提携を勝利提携といい，Nと$\mathscr{W}$の組$G=(N, \mathscr{W})$を単純ゲームという。$\mathscr{W}$は，

単調性の条件：$S \in \mathscr{W},\ T \supset S \ \Rightarrow\ T \in \mathscr{W}$

を満たすとする。

選択対象の集合Ωは空でない任意の集合とし，Ω上の弱順序全体の集合をWで表す。

Sを1つの提携とするとき，

$W^S = \times_{i \in S} W^i$　ただし，すべての$i \in S$について　$W^i = W$

とおく。× は直積を表す。また各$i \in S$について，$\mathrm{R}^i \in W$のとき，

$$\mathrm{R}^S = (\mathrm{R}^i)_{i \in S} \in W^S$$

と書く。以下，これと同様の記号を同じような意味で用いる。

また，簡単のために，次のような記号を用いる。

$$x\,\mathrm{R}^{S}\,y \iff \forall i\in S:\,x\,\mathrm{R}^{i}\,y$$

$$x\,\mathrm{P}^{S}\,y \iff \forall i\in S:\,x\,\mathrm{P}^{i}\,y$$

$$x\,\mathrm{I}^{S}\,y \iff \forall i\in S:\,x\,\mathrm{I}^{i}\,y$$

さて，勝利提携SはΩの任意の選択対象を決定するパワーを持つと考えると，単純ゲーム $G=(N,\mathscr{W})$は一般化された多数決ゲームとみなされ，序数的選好順序を前提とする単純ゲーム (simple game with ordinal preferences) と呼ばれる。

定義1　$\mathrm{R}^{N}\in W^{N}$が与えられたとする。相異なる2つの選択対象x，$y\in\Omega$に対して，勝利提携$S\in\mathscr{W}$が存在して

$$x\,\mathrm{P}^{S}\,y$$

となるとき，xはR^{N}に関してyを**支配する**といい，

$$x\ \mathrm{dom}(\mathrm{R}^{N})\ y$$

と書く。

定義2　$\mathrm{R}^{N}\in W^{N}$，$Y\subset\Omega$ が与えられたとする。ゲーム$G=(N,\mathscr{W})$ の Y，R^{N} に関する**コア**とは，次の集合$C(G,Y,\mathrm{R}^{N})$のことである。

$$C(G,Y,\mathrm{R}^{N})=\{x\in Y \mid y\ \mathrm{dom}\ (\mathrm{R}^{N})\ x \text{ となる } y\in Y \text{ は存在しない}\}$$

$$=\{x\in Y \mid \forall y\in Y:\sim(y\ \mathrm{dom}\ (\mathrm{R}^{N})x)\}$$

特にΩ，R^{N}に関するコア$C(G,\Omega,\mathrm{R}^{N})$を単にコアと呼ぶ。

問題はコアが存在するかどうかであるが，それを調べるために二，三の考察をする。

集合族$\mathscr{W}$の元はNの部分集合であるが，それをその基数（濃度）によって分類する。基数が等しいという関係は同値関係であるから，$\mathscr{W}$ は同値類に分割される。各同値類に属している集合は互いに等しい基数を持っているから，各同値類にその基数を振り当て，この基数の集合を$\mathscr{W}_{p}$で表す。基数全体の集合は，自然な順序に関して整列集合になっているから，最小値が存在する。それを$\min\mathscr{W}_{p}$ で表す。

次に，ゲーム$G=(N,\mathscr{W})$ は weak ではない，すなわち，拒否権を持つプレイヤーは存在しないとする。式で書けば，

$$V_{G}=\cap\{S \mid S\in\mathscr{W}\}=\phi$$

である。$\mathscr{W}$の部分集合族$\mathscr{T}$ で次の条件を満たすものを考える。

$$\cap\{S \mid S\in\mathscr{T}\}=\phi$$

このような$\mathscr{T}$全体の集合をΣとすれば，$\mathscr{W}$の場合と同様にΣに属する集合族の基数には最小値がある。それを $\nu(G)$ で表す。

(1)　$\nu(G)=\min\{\,|\mathscr{T}|\,|\,\mathscr{T}\subset\mathscr{W},\ \cap\{S\mid S\in\mathscr{T}\}=\phi\}$

Nが有限集合ならば，$\mathscr{W}$，$\mathscr{T}$ なども有限集合となるから，min $\mathscr{W}_p$，$\nu(G)$ の意味は明らかである。

この $\nu(G)$ が初めて現れたのは，中村君の論文の〔5〕からであって，それ以降の中村君の論文では，この $\nu(G)$ が重要な役割りを演じ，やがて $\nu(G)$ は**中村数**（Nakamura—number）と呼ばれるようになるのである。

次に，中村数の簡単な性質をあげておこう。

命題1　$G=(N,\ \mathscr{W})$ を拒否権を持つプレイヤーの存在しない単純ゲームとすれば，

$\nu(G)\leqq\min\ \mathscr{W}_p+1$　(〔5〕)

命題2　$\max\limits_{G}\ \nu(G)=|N|$　(〔5〕)

命題3　Nを有限集合とする。$G=(N,\ \mathscr{W})$ が proper，strongで weak でないならば，$\nu(G)=3$ である。(〔12〕，〔25〕)

この $\nu(G)$ を用いると，コアの存在に関して次の定理が証明される。

定理1　単純ゲーム $G=(N,\ \mathscr{W})$，選択対称の集合 Ω が与えられたとき，

(i)　すべての $\mathrm{R}^N\in W^N$ に対して，コア $C(G,\ \Omega,\ \mathrm{R}^N)\fallingdotseq\phi$ ならば

$V_G\fallingdotseq\phi$ (G は weak) または $\nu(G)>|\Omega|$

(ii)　$|\Omega|\geqq|N|$であって，すべての $\mathrm{R}^N\in W^N$ に対して，$C(G,\ \Omega,\ \mathrm{R}^N)\neq\phi$ ならば，$V_G\fallingdotseq\phi$ である。

(iii)　Ωが有限集合のときは，すべての $\mathrm{R}^N\in W^N$ に対して，$C(G,\ \Omega,\ \mathrm{R}^N)\neq\phi$ となるための必要十分条件は，$V_G\fallingdotseq\phi$ または $\nu(G)>|\Omega|$ が成り立つことである。

この定理が証明されたのは〔5〕においてであるが，そのときは選好関係が弱順序ではなく，非循環的な場合に対してであった。しかし，この差は本質的なものではなく，弱順序の場合でも，また線形順序の場合でも成り立つ（〔5〕 Remark 3.1)。また，この定理1から，Peleg〔26〕や Blau/Deb〔27〕の結果などが直ちに得られるのである。

この定理で述べていることは，どのような R^N に対してもコアが存在する必要条件は，拒否権を持つプレイヤーが存在するか，またはこのゲームに固有に定まる濃度（中村数）が Ω の濃度より大きいということ，そして Ω が有限集合のときは，これは十分条件でもあるということである。

定理1は単純ゲームのコアの存在に関する定理であるが，これを特性関数ゲームに拡張することができる（〔6〕)。

特性関数ゲームとは，N，Ω が与えられたとき，2^N から 2^Ω の中への関数で，

$$v(\phi)=\phi, \quad v(N)=\Omega$$

という条件を満たすものを考え，N, Ω, v の組 $G=(N, \Omega, v)$ のことである。

単純ゲームの勝利提携に対応するものは特性関数ゲームではどのようなものであろうか。Ω の元 x に対して，$x\in v(S)$ となるような提携 S は x に関して**有効** (effective) であるといい，x に関して有効であるような提携全体の作る集合族を $\mathscr{E}(x)$ で表す。

定義3 $R^N\in W^N$ が与えられたとする。相異なる2つの選択対象 x, $y\in\Omega$ に対して，x に関して有効な提携 S が存在して

$$x \mathrm{P}^S y$$

となるとき，x は R^N に関して y を**支配する**といい，

$$x \operatorname{dom}(R^N)y$$

と書く。また，ゲーム $G=(N, \Omega, v)$ の $Y\subset\Omega$, R^N に関するコアとは，

$$C(G, Y, R^N)=\{x\in Y \mid \forall y\in Y: \sim(y \operatorname{dom}(R^N)x)\}$$

のことである。

さて，各 $x\in\Omega$ に対して，$\mathscr{E}(x)$ の中から1つの提携 $S(x)$ を選択する。

このような選択 $\{S(x)\}_{x\in\Omega}$ がどのようなものであっても，常に，

$$\bigcap_{x\in\Omega} S(x)\neq\phi$$

が成り立つとき，G は**完全交叉性** (complete intersection property) を満たすという。

単純ゲームは特性関数ゲームの特別の場合であるが，単純ゲームについては，

$$[G\text{が完全交叉性を満たす}] \iff [V_G\neq\phi \text{ または } \nu(G)>|\Omega|]$$

ということがいえる。

このことから，定理1は次のように拡張されることがわかる。

定理2 特性関数ゲーム $G=(N, \Omega, v)$ が与えられたとき

(i) すべての $R^N\in W^N$ に対して，コア $C(G, \Omega, R^N)\neq\phi$ ならば，G は完全交叉性を満たす。

(ii) Ω が有限集合のときは，(i)は十分条件でもある。

3 社会的選択理論 (Social Choice Theory)

社会的選択理論における中村君の業績について解説しよう。

Arrow [28] 以来，社会的選択に関して数多くの論文が発表されているが，中村君はゲーム論を利用すれば，今までの多くの結果が統一的に導かれることを示した。特に，[11] から [15] までの論文において，前述の定理1，定理2を有効に用いて，例えば，Gibbard [29], Satterthwaite

〔30〕, Pazner & Wesley 〔31〕, Wilson 〔32〕, Hansson 〔33〕, Mas-Colell & Sonnenschein 〔34〕, Blau & Deb 〔27〕 などの結果を導いてみせたのである。

論文〔11〕～〔15〕までに含まれている内容は豊富であって，詳しく論評することはページ数の関係で不可能であるから，以下，大ざっぱに核心となっている考え方を解説しよう。

社会を構成している主体の集合をNとする。〔12〕ではNは任意の集合としているが，簡単の為，Nは有限集合とし，

$$N=\{1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n\}$$

とする。選択対象の集合を Ω で表し，各主体での選択対象の評価を R^i，P^i，I^i で表す。これらの意味は前節の通りとする。

R^1，R^2，……，R^n の組

$$\mathrm{R}^N=(\mathrm{R}^1,\ \mathrm{R}^2,\ \cdots\cdots,\ \mathrm{R}^n)\in W^N$$

を，**プロフィール**と呼ぶ。以下，プロフィールはDという文字で，W^N は $\mathscr{D}$ という文字で表すことにする。

1つのプロフィールが与えられたとき，社会はそれをよりどころとして，Ωの部分集合の中から，社会にとって最適と思われる対象をいくつか選び出す。このメカニズムが社会的選択関数と呼ばれるものであるが，Ωは任意の集合としてあるから，Ωの任意の部分集合から選択すると考えると条件が強くなり過ぎる。そこで，Ω の部分集合の族$\mathscr{X}$をあらかじめ1つ定め，$\mathscr{X}$ に属する集合のみに対してメカニズムは有効に働くと考える。また，プロフィールの方にも制限を加え，$\mathrm{D}=\mathrm{R}^N$ は $\mathscr{D}=W^N$ のある部分集合$\mathscr{E}$に属するものとする。

定義4　次の条件を満たす関数　$F: \mathscr{X}\times\mathscr{E}\to 2^{\Omega}$ を**社会的選択関数**という。

$$\forall(Y,\ \mathrm{D})\in\mathscr{X}\times\mathscr{E}: F(Y,\ \mathrm{D})\subset Y$$

特に，

$$\forall(Y,\ \mathrm{D})\in\mathscr{X}\times\mathscr{E}: F(Y,\ \mathrm{D})\neq\phi$$

のとき，Fは**非空** (non-null) であるという。

これが社会的選択関数の一般的定義であるが，前の定理1，定理2を使うために，Fは次の条件を満たすとする。

条件U　定義域の無制限性 (Unrestricted Domain) $\mathscr{E}=\mathscr{D}$

この条件 U は，あらゆるタイプのプロフィールを考えることを意味する。

次に，社会的選択関数の性質を調べるために，それに対応する単純ゲームを構成する。それには，勝利提携を定めればよい。勝利提携とは，そこにおける決定が社会全体の決定となるようなパワー

を持つものである。

定義5　任意の $Y\in\mathscr{X}$ と，Y の相異なる任意の2元 x，y に対して，

$$\forall \mathrm{D}\in\mathscr{D},\ x\mathrm{P}^{S}y\ \Rightarrow\ y\notin F(Y,\ \mathrm{D})$$

となるなるならば，S は F に関して勝利提携であるといい，その全体からなる集合族を $\mathscr{W}_F$ で表す。

$\mathscr{W}_F$ は単調性の条件（128ページ(5)）を満たすから，F に対応する単純ゲームを $G_F=(N,\ \mathscr{W}_F)$ により定める。まず，次の定理が成り立つ。

定理3　任意の $(Y,\ \mathrm{D})\in\mathscr{X}\times\mathscr{D}$ に対して，$F(Y,\ \mathrm{D})$ は，ゲーム G_F の Y，D に関するコアに含まれる。

$$\forall(Y,\ \mathrm{D})\in\mathscr{X}\times\mathscr{D}:F(Y,\ \mathrm{D})\subset C(G_F,\ Y,\ \mathrm{D})$$

もし，社会的選択関数が非空ならば，任意の $(Y,\ \mathrm{D})$ に対して $F(Y,\ \mathrm{D})\neq\phi$ だから，$C(G_F,\ Y,\ \mathrm{D})\neq\phi$ となり，定理1から次の定理が導かれる。

定理4　$F:\mathscr{X}\times\mathscr{D}\to2^{\Omega}$ を非空な社会的選択関数とすると，

(i)　すべての $Y\in\mathscr{X}$ に対して $|Y|<n$ ならば，

$V_{G_F}\neq\phi$ または $\nu(G_F)>|Y|$

(ii)　ある $Y\in\mathscr{X}$ に対して，$|Y|\geqq n$ ならば $V_{G_F}\neq\phi$

この定理4は，非空な社会的選択関数が存在するための必要条件を述べている。注意すべきことは，F には条件Uのほかの条件が何も課せられていないということで，そのために極めて適用範囲が広いのである。

しかし，社会的選択関数というからには，定義4はあまりにも一般的過ぎるので，何らかの社会的合理性に関する条件を課するのが普通である。その条件としては様々のものが考えられているが，次のもその1つである。

条件P　**パレート原理**（Pareto Principle）任意の $Y\in\mathscr{X}$ と，Y の相異なる任意の2元 x，y に対して，

$$\forall \mathrm{D}\in\mathscr{D},\ x\mathrm{P}^{N}y\ \Rightarrow\ y\notin F(Y,\ \mathrm{D})$$

この条件は，$N\in\mathscr{W}_F$ と同値である。したがって，F が条件Pを満たす必要十分条件は $\mathscr{W}_F\neq\phi$ である。

社会的選択関数 F が与えられれば，2つの選択対象 x，y のうちのどちらが社会にとって好まし

いかをFを用いて選ぶことができる。このことは，社会全体についての選好関係が与えられるということを意味している。正確に述べれば次のようになる。

Ωは，相異なる元を少くとも2つ含む，すなわち $|\Omega|\geqq 2$ とし，Ωの部分集合で2つの元からなるものはすべて集合族$\mathscr{X}$に含まれるとする。

Ω上の2項関係 F_{D} を次のように定める。

$$x\,F_{\mathrm{D}}\,y \iff F(\{(x,\ y\},\ \mathrm{D})=\{x\},\ x\neq y$$

また，集合 $Y\in\mathscr{X}$ の極大元の集合を次のように定める。

$$M_F(Y,\ \mathrm{D})=\{x\in Y \mid \forall y\in Y:\sim(y\,F_{\mathrm{D}}\,x)\}$$

定義6　社会的選択関数 $F:\mathscr{X}\times\mathscr{D}\to 2^{\Omega}$ は，次の条件を満たすとき，**二項的**(binary) であるという。

(i)　$\forall x,\ y\in\Omega,\ x\neq y:\{x,\ y\}\in\mathscr{X}$

(ii)　$\forall(Y,\ \mathrm{D})\in\mathscr{X}\times\mathscr{D}:F(Y,\ \mathrm{D})=M_F(Y,\ \mathrm{D})$

この条件(ii)は，FはYの極大元の集合を選択するということを示している。

また，社会的選択関数Fによく課せられる条件として，独立性の条件というものがある。それを説明するために，術語を2つ導入する。

相異なる2つの選択対象x，yと，2つのプロフィール D，D′ について，

$$x\,\mathrm{D}\,y \iff x\,\mathrm{D}'\,y,\quad y\,\mathrm{D}\,x \iff y\,\mathrm{D}'\,x$$

が成り立つとき，D と D′ は $\{x,\ y\}$ 上で等しいという。また，

$$x\,F_{\mathrm{D}}\,y \iff x\,F_{\mathrm{D}'}\,y,\quad y\,F_{\mathrm{D}}\,x \iff y\,F_{\mathrm{D}'}\,x$$

のとき，F_{D} と $F_{\mathrm{D}'}$ は $\{x,\ y\}$ 上で等しいという。

条件 IIA 独立性 (Independence of Irrelevant Alternatives)　任意の $\{x,\ y\}$ について，D と D′ が $\{x,\ y\}$ 上で等しいならば，F_{D} と $F_{\mathrm{D}'}$ も$\{x,\ y\}$上で等しい。

社会的選択関数 F が与えられれば，それに対応する単純ゲーム $G_F=(N,\ \mathscr{W}_F)$ が定まる。この$\mathscr{W}_F$は単調性を満たすから，その構造は極小元の構造により定まる。$\mathscr{W}_F$の極小元の集合とは次の集合のことである。

$$\begin{aligned}\mathscr{W}_F{}^m&=\{S\in\mathscr{W}_F \mid T\subset S \text{ となる } T\in\mathscr{W}_F \text{ は存在しない}\}\\&=\{S\in\mathscr{W}_F \mid \forall T\in\mathscr{W}_F:T\not\subset S\}\end{aligned}$$

この元を**極小勝利提携**という。

以上の準備のもとに，次の定理が導かれる。これは Arrow〔28〕の不可能性定理と同値である。

定理5　$F:\mathscr{X}\times\mathscr{D}\to 2^{\Omega}$ を非空な二項的社会的選択関数とし，$|\Omega|\geqq 3$で，条件P，条件 IIA

が満たされるとする。もし F_D が弱順序関係となるならば，唯1つの極小勝利提携が存在し，しかもそれは唯1人のプレイヤーからなる。すなわち独裁者（dictator）が存在する。

このほか，〔25〕〜〔34〕に現われた多くの概念や結果との関係が詳細に論じられている。特に，プレイヤーの数が無限になった場合については，〔12〕で取り扱っており，この論文は数学的に極めて興味深い。

ともあれ，中村数 $\nu(G)$ というものを用いて定理1を導いたことは，中村君の卓見であり，社会選択理論の本質的部分を見事にとらえたというべきであろう。

なお，〔7〕〜〔10〕では，社会的厚生関数（Social welfare function）について論じている。社会的厚生関数とは，プロフィール $\mathrm{R}^N=(\mathrm{R}^1, \mathrm{R}^2, \cdots\cdots, \mathrm{R}^n)$ に，Ω 上の弱順序 R を対応させる関数

$$f: W^N \longrightarrow W, \quad \mathrm{R}=f(\mathrm{R}^1, \mathrm{R}^2, \cdots\cdots, \mathrm{R}^n)$$

のことである。

紙数の関係で詳しく紹介できないのが残念であるが，中村君の一連の論文を検討するならば，大いに啓発されるところがあると思う。

後記：中村健二郎君は1979年10月，32歳の若さで急逝された。筆者が中村君と初めて出会ったのは，1979年1月の KERP の Conference においてであって，3日間起居を共にした。そのときの印象は忘れ難い。

このように，筆者と中村君との交友は極めて短くまた淡いものであった。

今回，中村君の遺稿を詳しく読んでみて，その才能の豊かさに改めて感嘆すると共に，短い期間によくもこれだけの業績をあげられたものだと脱帽せざるを得ない。

中村君自身，多くの構想を抱いておられたであろうに，それを実現することなく逝かれたことは，さぞ無念であったと思われる。

中村健二郎君の冥福を祈る。

REFERENCES

〔1〕 K. Nakamura & M. Suzuki : Social Decision and Coalition Power, The Economic Studies Quarterly, 1972.

〔2〕 K. Nakamura : On the k-Stability of m-Quota Game, International Journal of Game Theory, 1972.

〔3〕 ___________ : Ψ-Stability of a Cooperative Game without Side Payment, International

Journal of Game Theory, 1973.

〔4〕 ____________: The Core of a Simple Game with Ordinal Preferences, International Journal of Game Theory, 1979.

〔5〕 ____________: The Vetoers in a Simple Game with Ordinal Preferences, International Journal of Game Theory, 1979.

〔6〕 ____________ & S. Ishikawa: On the Existence of the Core of a Characteristic Function Game with Ordinal Preferences, Journal of the Operations Research Society of Japan, 1979.

〔7〕 ____________ & M. Kaneko : The Nash Social Welfare Function, Econometrica, 1979.

〔8〕 ____________ & M. Kaneko: Cardinalization of the Nash Social Welfare Function, The Economic Studies Quarterly, 1979.

〔9〕 ____________ & M. Nakayama : Note on Harsanyi's Social Welfare Function, The Journal of Economic Studies. Toyama University, 1978.

〔10〕 ____________ & M. Nakayama: Discrepancy between Harsanyi and Diamond on Social Preferences, The Journal of Economic Studies, Toyama University, 1978.

〔11〕 ____________: Necessary and Sufficient Conditions on the Existence of a Class of Social Choice Functions, The Economic Studies Quarterly, 1978.

〔12〕 ____________ & S. Ishikawa : The Strategy-proof Social Choice Function, Journal of Mathematical Economics, 1979.

〔13〕 ____________ & S. Ishikawa : Representation of Characteristic Function Games by Social Choice Functions, International Journal of Game Theory, 1980.

〔14〕 ____________: Unification of Existence Theorems of Social Choice Functions by Simple Games (I), Discussion Paper of Tokyo Institute of Technology, 1979.

〔15〕 ____________: Unification of Existence Theorems of Social Choice Functions by Simple Games (II), Proceedings of the Keio Economic Research Projects (KERP) Conference on Economic Theory, 1979.

〔16〕 ____________: The Equivalence of the Mini-max Theorem and a Separation Theorem, Research Report of the Department of Information Sciences, Tokyo Institute of Technology, 1977.

〔17〕 ____________ & S. Ishikawa & A. Okada: A Note on the Existence of a Continuous Utility Function, Keio Economic Studies, 1979.

〔18〕 ____________: A Composite Objective Function for the Multi-objective Programmings, Report of Research Institute of Mathematical Sciences, Kyoto University, 1977.

〔19〕 ____________ & Y. Kurokawa: Forest Management Planning under Uncertainty (Japanese), Journal of the Operations Research Society of Japan, 1977.

〔20〕 Luce, R. D.: k-Stability of Symmetric and of Quota Games, Annals of Mathematics, 62, 1955, 517-527.

〔21〕 Aumann, R. J. & B. Peleg: Von Neumann-Morgenstern solutions to cooperative games without side payments, Bulletin of the American Mathematical Society, 66, 1960, 173-179.

〔22〕 Aumann, R. J.: The Core of a Cooperative Game without side Payments, Transactions of the American Mathematical Society, 66, 1961, 539-552.

〔23〕 Shapley, L. S.: Simple Game: An Outline of the Descriptive Theory, Behavial Science, 7, 1962, 59-66.

〔24〕 Sen, A. K.: *Collective Choice and Social Welfare, Holden-Day, San Francisco, 1970.*

〔25〕 Peleg, J. B.: Representations of Simple Games by Social Choice Functions, International Journal of Game Theory, 7, 1978, 81-94.

〔26〕 ＿＿＿＿＿: Consistent Voting Systems, Econometrica, 46, 1978, 153-162.

〔27〕 Blau, J. M., & P. Deb: Social Decision Functions and the Veto, Econometrica, 45, 1977, 871-878.

〔28〕 Arrow, K. J.: *Social Choice and Individual values, Wiley, New York, 1963.*

〔29〕 Gibbard, A.: Manipulation of Voting Systems, A General Result, Econometrica, 41, 1973, 587-601.

〔30〕 Satterthwaite, N.: Strategy Proofness and Arrow's Conditions, Journal of Economic Theory, 10, 1975, 187-217.

〔31〕 Pazner, A. & E. Wesley,: Stability of Social Choice in Infinitely Large Societies, Journal of Economic Theory, 14, 1977, 252-262.

〔32〕 Wilson, R.: The Game-theoretic Structure of Arrow's General Possibility Theorem, Journal of Economic Theory, 5, 1972, 14-20.

〔33〕 Hansson, B.: The Existence of Group Preference Functions, Public Choice, XXVIII, 1976, 90-98.

〔34〕 Mas-colell, A. & H. Sonnenschein.: General Possibility Theorems for Group Decisions, Review of Economic Studies, 39, 1972, 185-192.

（法学部助教授）