Title	均衡配分の達成不可能性定理：改訂と拡充
Sub Title	The impossibility of attaining equilibrium allocations : a revision and an extension
Author	福岡, 正夫 三浦, 礼
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1982
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.75, No.4 (1982. 8) ,p.497(1)- 520(24)
JaLC DOI	10.14991/001.19820801-0001
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234 610-19820801-0001

均衡配分の達成不可能性定理:

改訂と拡充

福　岡　正　夫
三　浦　　　礼

1　本稿は筆者の1人が昨年本誌に寄稿した論文(1)のいわば補論をなすものであって，その一部不満な箇所を改善しようとする試みである。それは，一つにはその第4節でとり扱ったブラッドレー流の不可能性定理の証明を，暗黙の仮定の明示化をつうじてより精確なものにすることを意図しており，またもう一つには当該の仮定をとり除き，定理の妥当範囲を拡大することによって，一つの open question を閉じることを目的としている。

2　記号ならびにモデルの基本構成は前稿どおりであるから再述しないが，とくに本稿の自足的理解を望む読者のため最小限必要な概略のみを摘記しておけば，つぎのようである。

まずn種の財の集合を $N=\{1, 2, \cdots, n\}$，m人の取引主体の集合を $M=\{1, 2, \cdots, m\}$ で記し，m については $m\geqq2$ であるとしておく。取引はつねに双方取引すなわち2人ずつのグループの同時的会合の系列をつうじて行われるものとし，それらの会合のあらゆる順序の集合を $\Pi_m=\{\pi=(\pi^t)_{t=1,2,\cdots,T}\}$ で示す。π^t は $M=\{1, 2, \cdots, m\}$ の置換であり，$\pi^t(r)=s$ は t 期に主体 r が主体 s と交換のペアを組むことを意味している。それはつぎの諸条件

(イ)　すべての $r, s\in M$，すべての $t\in\{1, 2, \cdots, T\}$ について $\pi^t(r)=s \Longleftrightarrow \pi^t(s)=r$

(ロ)　すべての r，すべての $t\neq t'$ について $\pi^t(r)\neq\pi^{t'}(r)$

(ハ)　mが偶数なら，すべての r, t について $\pi^{t}(r)\neq r$，mが奇数なら，すべてのrについて，そしてただ一つの t についてのみ $\pi^t(r)=r$

を満たすと仮定され，Tはこれらの条件を満たす最小の期間数である。[1, T] にわたる会合の系列は1ラウンドと呼ばれる。

価格ベクトル $p\in R^n_{++}$，その下での各主体の超過需要ベクトル $z_r\in R^n$，ならびに初期保有量ベクトル$\bar{x}_r\in R^n_+$ は所与であり，それらは当初からつぎの均衡配分の条件を満たすものと仮定される。

注(1)　福岡正夫「分権的情報ならびに物々交換制度の下における均衡配分の達成不可能性定理について」，『三田学会雑誌』1981年10月号。

(U)　(1) $\sum_{r=1}^{m} z_r = 0$,　(2) $pz_r = 0$,　all $r \in M$,　(3) $-z_r \leqq \bar{x}_r$,　all $r \in M$

また以下で援用される事例のいくつかは，とくにいわゆる minimally sufficient の条件

(S)　　$-(z_r)^- = \bar{x}_r$,　all $r \in M$

を満たすように選ばれるであろう。(2)

t 期の取引に先立つ各主体の財保有量ベクトルは w_r^t で，またその期の純取引量ベクトルは a_r^t で示し，a_r^t の正の成分は各財の受け取りを，負の成分はその引き渡しをあらわすとすれば，t 期の取引は明らかにつぎの条件を満たすものでなくてはならない。

(A)　(1) $a_r^t = -a_s^t$,　(2) $pa_r^t = pa_s^t = 0$,　(3) $w_r^t + a_r^t \geqq 0$, $w_s^t + a_s^t \geqq 0$

以上の想定から，どの r，t についても $w_r^{t+1} = w_r^t + a_r^t$ ただし $w_r^1 = \bar{x}_r$ の関係が成り立ち，さらに t 期首における各主体の未充足超過需要ベクトルを v_r^t とすれば，$v_r^t = z_r - (w_r^t - \bar{x}_r) = z_r - \sum_{\tau=1}^{t-1} a_r^\tau$ の関係が成り立つ。各主体にとってはある t について $v_r^t = 0$ となるときに取引の目的は達成されるわけであるが，いますべての r について $v_r^{T+1} = 0$ となること，すなわち

(E)　　$\sum_{\tau=1}^{T} a_r^\tau = z_r$,　all $r \in M$

となることをもって，超過需要の1ラウンド内での完全充足 (Full Execution Within One Round) と呼ぶならば，そのような意味での完全充足の条件を満たす取引ルールの存在，非存在を問うことがわれわれの考察事項となるのである。

t 期に会合する取引主体のペア r，s が利用できる情報を L_{rs}^t で示すとすれば，取引ルールは L_{rs}^t の集合を定義域とし，2人の取引量の集合を値域とする関数 $\rho(L_{rs}^t) = (a_r^t,\ a_s^t)$ である。各主体の t 期の環境を $\mathscr{S}_*^r(t) = (v_r^t,\ w_r^t,\ N,\ p)$ であらわすとき

(D*)　　$L_{rs}^t = \mathscr{S}_*^r(t) \times \mathscr{S}_*^s(t)$

となることをもって，もっとも分権的な情報が利用可能であることの定義とする。取引ルールはその定義域が (D*) を満たす場合に，もっとも情報分権的な取引ルールであると考えられる。

さらに取引ルールが

すべての r，s，k，$h \in M$，かつすべての $t = 1, 2, \cdots, T$ について，

(N*)　$(v_r^t,\ w_r^t) = (v_k^t,\ w_k^t)$，$(v_s^t,\ w_s^t) = (v_h^t,\ w_h^t)$ なら，

$\rho(L_{rs}^t) = \rho(L_{kh}^t)$

注(2)　ここで$(z_r)^-$はz_rの正の成分をすべて0に置き換えたベクトルである。minimally sufficient の条件については，J. M. Ostroy and R. M. Starr, "Money and the Decentralization of Exchange", *Econometrica*, November 1974, p. 1104 参照。

の条件を満たすとき，その取引ルールは主体に関して匿名的であると呼ばれる。またそれが

(N**)　α を $N=\{1, 2, \cdots, n\}$ の任意の置換として，$h=r, s$ について
$\tilde{v}^t_{ih}=v^t_{\alpha(i)h}$，$\tilde{w}^t_{ih}=w^t_{\alpha(i)h}$，そして $\tilde{p}_i=p_{\alpha(i)}$ であるなら，
L^t_{rs} の v^t_r, w^t_r, v^t_s, w^t_s, p を $\tilde{v}^t_r$, $\tilde{w}^t_r$, $\tilde{v}^t_s$, $\tilde{w}^t_s$, $\tilde{p}$ に置き換えた $\tilde{L}^t_{rs}$ について，
$\rho(\tilde{L}^t_{rs})=(\tilde{a}^t_r, \tilde{a}^t_s)$，ただし $\tilde{a}^t_{ir}=a^t_{\alpha(i)r}$, $\tilde{a}^t_{is}=a^t_{\alpha(i)s}$

の条件を満たすとき，そのルールは財に関して匿名的であると呼ばれる。(N*) は取引主体が異なる名前の個人になっても，その超過需要や財保有量の数値が同一でありさえすれば，同一の取引量が決定されることを意味しており，また (N**) は財の名前をつけ換えても，超過需要量，保有量ならびに価格の数値が同じであれば，やはり同一の取引量が決定されることを意味している。

3　以上のような構成の下で，ブラッドレーが証明した，ないしは証明を企図した命題は，つぎのようなものであった。(3)

命題Ⅰ　$n\leqq 2$ あるいは $m\leqq 3$ の場合には，任意の均衡配分 $(p, (z_r), (\bar{x}_r))$ および任意の会合順序 $\{\pi^t\}$, $t=1, 2, \cdots, T$ に対して，(A)(D*)(N*)(N**) および (E) のすべてを満たす取引ルールが存在する。

命題Ⅱ　$n\geqq 4$(4) および $m\geqq 4$ の場合には，任意の均衡配分 $(p, (z_r), (\bar{x}_r))$ および任意の会合順序 $\{\pi^t\}$, $t=1, 2, \cdots, T$ に対して，(A)(D*)(N*)(N**) および (E) のすべてを満たす取引ルールは存在しない。

これらのうち，命題Ⅰについては，前稿で論じたところに手を加える必要はないと思われるので，(5)

注(3)　G. H. Bradley, "Trading Rules for a Decentralized Exchange Economy", in S. E. Elmaghrabig ed., *Symposium on the Theory of Scheduling and its Applications*, 1973, pp. 234–238.

(4)　ブラッドレーは $n\geqq 4$ を $n\geqq 5$ にすることによって，結果を (N*) の使用から解放する意図をもっているようである。しかし，この措置で問題の仮定を排除することはできないし，かえって定理の主張を弱めるので，好ましい処理であるとは思われない。

(5)　福岡，前掲論文，pp. 64–71参照。事実

$$\tilde{N}=\{i\in N \mid z_{ir}\neq 0 \text{ for some } r\in M\}\subseteq N$$
$$\tilde{M}=\{r\in M \mid z_{ir}\neq 0 \text{ for sone } i\in N\}\subseteq M$$

と定義すれば，われわれは命題Ⅰよりさらに強いつぎの主張を証明したのである。すなわち

$n>2$, $m>3$ であっても $\#\tilde{N}\leqq 2$ あるいは $\#\tilde{M}\leqq 3$ でありさえすれば，任意の均衡配分 $(p, (z_r), (\bar{x}_r))$，任意の会合順序 $\{\pi^t\}$, $t=1, 2, \cdots, T$ に対して，(A)(D*)(N*)(N**) および (E) のすべてを満たす取引ルールが存在する

というのがそれである。

本稿ではまったく立入らない。以下において再考するのは，もっぱら命題IIにかかわる問題のほうのとり扱いである。

まずブラッドレー流の命題IIの証明は，その推論過程において，暗黙のうちに，つぎのような仮定を使用しているのではないかと思われる。

(R)　$a_r^t \neq 0 \neq a_s^t$ なら $v_r^{t+1} \neq \tilde{v}_r^t$ あるいは $v_s^{t+1} \neq \tilde{v}_s^t$,
ただし $\tilde{v}_{ir}^t = v_{a(i)r}^t$, $\tilde{v}_{is}^t = v_{a(i)s}^t$

この仮定は，取引ペアのあいだで実際に非ゼロの取引が行われる場合には，次期の超過需要ベクトルは，財のラベルをつけ換えても，今期の超過需要ベクトルにはひとしくならないということを意味している。

仮定（R）を明示してブラッドレー流の推論を再構成してみた場合，事実上成立する定理は精確にはつぎのような内容のものと解すべきであろう。

定理（ブラッドレー）$n \geqq 4$ の場合には，つぎのような取引ルール，すなわちどんな $m \geqq 2$ についても任意の均衡配分（p,（z_r),（$\bar{x}_r$)）および任意の会合順序 $\{\pi^t\}$, $t=1, 2, \cdots, T$ に対して（A)(D*)(N*)(N**)(R）および（E）のすべてを満たすような取引ルール，は存在しない。

ここで注意すべきは，定理の主張を論理記号で記せば明らかなように(6)，$m \geqq 2$ の条件がルール存在の否定記号 $\neg$ の後にくることである。すなわち定理が意味するところは，財の数を4以上に任意に指定したとき，そのいずれの場合も，可能なすべての人数 $m \geqq 2$ について所定の条件をことごとく満たす取引ルールが存在することの否定なのであって，すべての $m \geqq 2$ について当該のルールが存在しないことの肯定ではないのである。ブラッドレーは m の下限の条件を $m \geqq 4$（または5）としているが，上記の意味ではこれは可能なすべての人数にわたると考えてよいのであって，とくに下限を4とする意味が格別に存在するわけではない。以下の証明では帰謬法に立脚し，$m \geqq 2$ を満たすいくつかの事例について所定の条件をすべて満たす取引ルールの存在を仮定した上で矛盾を導くが，かりにそのさい用いられる事例の人員数の数値のみを m の条件として掲げておくとすれば，定理の記述としてはもっとも強い表現が与えられることになろう。

以下においてわれわれはブラッドレーの定理のこの形態のものに対して，仮定(R)の使用を明示化した上，さらに彼自身の推論法をより一そう筋道立てた証明を与えてみたいと思う。

注(6)（$\forall n \geqq 4$）$\neg$($\exists \rho$) [($\forall m \geqq 2$) ρ satisfies (A)(D*)(N*)(N**)(R), and attains (E) for $\forall$ ($p(z_r)(\bar{x}_r)$) which satisfy (U), and $\forall \pi \in \Pi_m$]。

証　明

証明の方針としては帰謬法により，定められた諸条件を満足する取引ルールが存在したものとして，矛盾を導く。

(i)　まず $n=4$，$m=4$ のいくつかの事例をとり扱うが，そのいずれの場合も価格ベクトルは $p=(1, 1, 1, 1)$ のように規準化されており，主体の会合順序は ((1, 2), (3, 4))，((1, 4), (2, 3))，((1, 3), (2, 4)) のように定められているものとする。また超過需要行列 $Z=[z_r]$，初期保有量行列 $\overline{X}=[\bar{x}_r]$ はすべて minimally sufficient の条件 (S) を満たすように選ばれているとする。

第1の事例は

$$Z=V^1=\begin{bmatrix} 8 & 0 & -8 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 0 & -8 \\ 0 & -8 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

であり，そこでは各列が各主体の超過需要ベクトルを，したがって各行が各財の各主体への超過需要配分をあらわしている。

第1回目の会合では

$$A^1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -a & a \\ -a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -a \\ a & -a & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

のような取引を行うとすれば，条件 (S) および (A) の(3)から

(1)　　　$0 \leqq a \leqq 1$

で，取引の結果，当初の Z は明らかにつぎの

$$V^2=\begin{bmatrix} 8 & 0 & -8+a & -a \\ -8+a & -a & 0 & 8 \\ 0 & 8 & -a & -8+a \\ -a & -8+a & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

に変化する。(7)

注(7)　ブラッドレー自身(*op. cit.*, p. 236)はまず事例

$$Z=\begin{bmatrix} 8 & 0 & -8 & 0 \\ -8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -8 \\ 0 & -8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

から出発し，

つぎに第2回目の会合での取引を，いま一般的に

$$A^2=\begin{bmatrix} b & d & -d & -b \\ e-d-b & -e & e & -e+d+b \\ d & b & -b & -d \\ -e & e-d-b & -e+d+b & e \end{bmatrix}$$

のようにあらわすとすれば，同じく条件(S)と(A)の(3)から

(2) $0 \leqq d \leqq 8-a$

(3) $0 \leqq e \leqq a$

(4) $0 \leqq b \leqq a$

(5) $0 \leqq -e+d+b \leqq 8-a$

で，つぎのV行列は

$$V^3=\begin{bmatrix} 8-b & -d & -8+a+d & -a+b \\ -8+a-e+d+b & -a+e & -e & 8+e-d-b \\ -d & 8-b & -a+b & -8+a+d \\ -a+e & -8+a-e+d+b & 8+e-d-b & -e \end{bmatrix}$$

となる。

第3回目すなわち最終回の会合では，主体 1，3 が会い，また主体 2，4 が会う番であるから，完全充足の条件が満たされるためには，前者については $8-b=8-a-d$ が成り立たねばならず，したがって

$$A^1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -b & b \\ -a & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & -b \\ a & -a & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad V^2=\begin{bmatrix} 8 & 0 & -8+b & -b \\ -8+a & -a & 8 & 0 \\ 0 & 8 & -b & -8+b \\ -a & -8+a & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

そして

$$A^2=\begin{bmatrix} b & 0 & 0 & -b \\ 0 & -a & a & 0 \\ 0 & b & -b & 0 \\ -a & 0 & 0 & a \end{bmatrix},\quad V^3=\begin{bmatrix} 8-b & 0 & -8+b & 0 \\ -8+a & 0 & 8-a & 0 \\ 0 & 8-b & 0 & -8+b \\ 0 & -8+a & 0 & 8-a \end{bmatrix}$$

とした上で，(A) の(2)の等価条件から$(8-b)+(-8+a)=0$すなわち$a=b$の帰結を導出し，そののち第2段の推論として，本文の事例

$$Z=\begin{bmatrix} 8 & 0 & -8 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 0 & -8 \\ 0 & -8 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

を構成している。

しかし，この事例のZの第1列，第2列と，第3列，第4列とは，財1，2の名前を入れ換え，財3，4の名前を入れ換えれば，まったく同じものに帰するから，仮定(N*)，(N**)の下では，$a=b$ の帰結は自明であり，彼の第1段の議論はすべて不要である。

(6) $b=a+d$,

また後者についても $-8+a-e+d+b=e$ が成り立たねばならず，それに(6)を代入して

(7) $a+d-e=4$

を得る。すると(5)および(6)から $-e+2d\leqq 8-2a$ が成り立ち，これに(7)を代入することによって $e\leqq 0$，したがって(3)を考慮することによって

(8) $e=0$

となる。同様に(4)と(6)から $0\leqq a+d\leqq a$ であるから，$d\leqq 0$ となり，(2)と相俟って

(9) $d=0$

となる。ゆえに(6)，(7)から

(10) $a=b=4$

とならねばならないことになる。(8)

(ii) ここで第2の事例

$$Z=V^1=\begin{bmatrix} 8 & 0 & -1 & -7 \\ -8 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 0 & -8 \\ 0 & -8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

の考察に移り，前段の議論によるスペシフィケーション

$$\rho\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -8 & 0 \\ 0 & 8 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 4 \\ 0 & 0 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

を用いて

$$A^1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -c & c \\ -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -c \\ 4 & -4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とすれば，同じく条件（S）および（A）の(3)から

(11) $0\leqq c\leqq 1$

で，

注(8) 上記のわれわれの推論がブラッドレーのそれ(*op. cit.*, p. 236) に比してやや複雑であるのは，完全充足の条件（E）からかならず $a=b=4$ となることを厳密に導き出したいからである。ブラッドレーの該当箇所の所論はいわば結論を先取りして，当初から $a=b$, $d=0$, $e=0$ と置いてしまっており，その前提の下で $a=4\Leftrightarrow$(E) を示すという行論になっている。すなわち彼の所論は帰結の一意性ないしは必然性を示しえていないのである。

$$V^2=\begin{bmatrix} 8 & 0 & -1+c & -7-c \\ -4 & -4 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & -c & -8+c \\ -4 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

となる。

ところがもし (11) で $c=1$ であったとすれば，V^2 の第3列，第4列はそれぞれ V^1 の該当列で財1と財3を relabel したものにひとしくなってしまう。仮定 (R) の下では，この事実は $c=0$ を意味せざるをえず，これは明らかに不合理であるから，

(12) $$c<1$$

たらざるをえない。

さてここでふたたび第2回目の取引を一般的に

$$A^2=\begin{bmatrix} f & k & -k & -f \\ -g & -l & l & g \\ h & j & -j & -h \\ -f-h+g & -k-j+l & k+j-l & f+h-g \end{bmatrix}$$

と記せば，やはり条件 (S)，(A)-(3)から

(13) $$0\leqq f\leqq 7+c$$

(14) $$0\leqq h\leqq 8-c$$

(15) $$0\leqq k\leqq 1-c$$

(16) $$0\leqq j\leqq c$$

(17) $$0\leqq k+j-l\leqq 4$$

(18) $$0\leqq f+h-g\leqq 4$$

であり，次回の V 行列は

$$V^3=\begin{bmatrix} 8-f & -k & -1+c+k & -7-c+f \\ -4+g & -4+l & 1-l & 7-g \\ -h & 8-j & -c+j & -8+c+h \\ -4+f+h-g & -4+k+j-l & -k-j+l & 8-f-h+g \end{bmatrix}$$

となる。前と同様，条件 (E) が満たされるためには $8-f=1-c-k$，$-4+g=-1+l$，$-h=c-j$ が成り立たねばならないから，それぞれ整頓して

(19) $$f=k+c+7$$

(20) $$g=l+3$$

(21) $$h=j-c$$

を得る。

するとまず(13)と(19)から $k\leqq 0$ となり，(15)と相俟って

(22) $$k=0,$$

また(14)と(21)から $c\leqq j$ が得られるから，(16)，(21) とあわせて $c=j$，すなわち

(23) $$h=0$$

を得る。さらに(17)に(22)を代入することによって $j\geqq l$ であるが，他方(18)と(23)により $0\leqq f-g\leqq 4$，ゆえに(18)(20)(22)および(23)により $0\leqq(j+7)-(l+3)\leqq 4$ すなわち $j-l\leqq 0$ となるから，前の結論とあわせて

(24) $$j=l=c$$

が成立する。したがって，また(20)から

(25) $$g=3+c$$

が成り立つことになる。

(iii) 推論のこの段階で，上記の $t=2$ の主体 1，4 の会合が，$t=1$ の主体 1，2 について生じるような $n=4$，$m=3$ の新事例を考え，価格ベクトルは (1，1，1，1)，会合順序は((1，2)，3)，((2，3)，1)，((1，3)，2)，超過需要行列は

$$Z=V^1=\begin{bmatrix} 8 & -7-c & -1+c \\ -4 & 7 & -3 \\ 0 & -8+c & 8-c \\ -4 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

のように定めるとしよう。また Z，$\overline{X}$ は前と同様 minimally sufficient の条件 (S) を満たすと仮定しておく。(9)

前段のスペシフィケーション (19)，(22)，(23)，(25) によって

$$\rho\begin{pmatrix} 8 & -7-c \\ -4 & 7 \\ 0 & -8+c \\ -4 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f & -f \\ -g & g \\ h & -h \\ -f-h+g & f+h-g \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7+c & -7-c \\ -3-c & 3+c \\ 0 & 0 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

注(9) ブラッドレーは，この事例の代りに，主体4の超過需要ベクトルがすべてゼロ成分から成る $m=4$の事例

$$Z=\begin{bmatrix} 8 & -7-c & -1+c & \\ -4 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & -8+c & 8-c & 0 \\ -4 & 8 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

を考察している。

この場合，主題3，4にどのような取引を特定化するかについては，ブラッドレーは明記していないが，結果の不明確性を免れるためには，端的に彼らは取引しないと考えるのがもっとも簡明直截であろう。しかし，その場合には，当該の結果を生むための十分条件として，われわれがのちに(O)と呼ぶ条件，すなわち取引ペアの一方がゼロの超過需要ベクトルをもつならば，いずれの主体も取引しないという条件を設ける必要が生じよう。

なお条件(S)の下でこのような dummy の主体を導入してくることの問題点については，後述 p. 11 参照。

となるから，

$$V^2=\begin{bmatrix} 1-c & 0 & -1+c \\ -1+c & 4-c & -3 \\ 0 & -8+c & 8-c \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

となり，ここで $0\leqq c\leqq 1$ なのであるから，$4-c>0$ である。

すると目標の不合理の生じることが，つぎのような推論をつうじて明らかとなる。まず主体2にとっては今回が最後の機会であるから，彼はこの財2の超過需要量 $4-c$ をすべて主体3の超過供給量3によって満たすのでなくてはならない。そこでこのことが可能であるためには

$$4-c \leqq 3$$

すなわち

$$c \geqq 1 \tag{26}$$

となるのでなくてはならないが，これは明らかに前に導いた(12)の帰結と矛盾する。

よって $n=4$ の場合については，超過需要の完全充足が達成されえない $m \geqq 3$（したがって $m \geqq 2$）の事例のありうることが知られたわけである。

(iv) $n>4$ の場合にも定理の結論が成立するかどうかについては，ブラッドレーは一言も述べていない。

推察するに，これは彼がつぎのような工夫をつうじてつねに議論の trivial な拡張が可能であると考えているためであろう。すなわち，いま上記の事例に0成分のみから成る任意個数の行ベクトルをつけ加えるとする。そのとき条件（S）の下では，どの取引主体もこれらの追加される財を取引することは決してない。(10) よってそのようなベクトルを何個つけ加えるとしても，事態は本質的に $n=4$ の場合に還元され，したがって $n=4$ の場合に完全充足の達成されえない事例が見出されるとすれば，また $n>4$ の場合にも同様にそのような事例が見出される。

しかし，われわれの見地からすれば，このような推論は真に問題を解決したものとは思われない。条件（S）の下では，すべての r について $z_{ir}=0$ であれば，同じくすべての r について $\bar{x}_{ir}=0$ と

注(10) そのように追加される財 i については，つくり方からすべての r について $z_{ir}=0$ である。すると条件(S)から，それらの z_{ir} については対応する $\bar{x}_{ir}=w^1_{ir}=0$ となり，したがって(A)の(3) $w^1_{ir}+a^1_{ir}\geqq 0$ の条件から $a^1_{ir}\geqq 0$ となる。ところが $\pi^1(r)=s$ については，同じく(A)の(1)から $a^1_{ir}=-a^1_{is}$ とならねばならないから，それと $a^1_{ir}\geqq 0$, $a^1_{is}\geqq 0$ とが両立するためには $a^1_{ir}=a^1_{is}=0$ となるのでなくてはならない。よって財 i については，すべての r について $a^1_{ir}=0$ とならねばならないことが分かる。

つぎに $w^2_{ir}=w^1_{ir}+a^1_{ir}$ であることを考慮すれば，上の帰結から $w^2_{ir}=0$ となり，同じ推論を適用することによって，ふたたびすべての r にについて $a^2_{ir}=0$ となることが知られる。

以下同様にして一般にどの t についても $a^t_{ir}=0$ となることが示される。

なるわけであるから，その財の総量 $\sum_r \bar{x}_{ir}$ もまた＝0 となり，そのように総量ゼロの財をその社会に存在する財とみなすことは無意味である。したがってそのような財は，財の数の勘定には含まれえず，それらをいかに増やしたとしても，事実上財を増やしたことにはならないのである。

同様のことは，また主体の数の勘定についてもいうことができる。さきに脚注(9)で見たように，ブラッドレーはすべての財について $z_{ir}=0$ のような主体 r の導入を考えているが，条件 (S) の下では，これは主体 r がいかなる財をも所有していないことを意味しており，したがって彼はどんな取引にも参加できないことになる。(11) そのような主体を考えることもまたまったく無意味である。

以上を要するに，出発点となる (p, (z_r), ($\bar{x}_r$)) そのものについて，われわれは最低限

$$\sum_{r \in M} \bar{x}_{ir} > 0, \text{ all } i \in N$$

$$\bar{x}_r \neq 0, \text{ all } r \in M$$

の条件が満たされていると考えるべきものであろう。

われわれは次節においてわれわれ自身による積極的な分析を展開するが，そのさい財の数を増やす議論については，上記の点を考慮に入れたひとつの解決策を提示する所存である。

4　前節の冒頭でも述べたように，これまでとり上げられてきた二つの定理はそれぞれ $n \leqq 2$ の場合の取引ルールの存在と $n \geqq 4$ の場合のその非存在を証明しようとしたものであって，いずれも $n=3$ の場合の帰結についてはこれを不問に付している。本節でわれわれが目的とするところは，一つには残されたこの間隙を埋めることによって不可能性定理の妥当範囲を拡大することにあり，またもう一つにはブラッドレーの暗黙の仮定 (R) の使用を廃し，それに依拠しない証明を遂行することにある。さらにわれわれは，併せて前節末尾に言及した，財の個数を増やす場合の議論についても独自の工夫を凝らし，ブラッドレーの果たしえていない証明を補完するであろう。

ただそのような形でわれわれの議論の展開を図る上では，一つだけ新たな仮定を設けることが必要であり，それは

(O)　　$v^t_r=0$ あるいは $v^t_s=0$ なら $a^t_r=a^t_s=0$

という仮定である。いうまでもなくこの仮定は，取引ペアのいずれかが 0 成分のみから成る超過需要ベクトルをもっている場合には，それらの主体はいずれも取引を行わないということを意味している。各人が利己的な動機で分権的に行動すると考えられる場合には，これは一応尤もな仮定であ

注(11)　主体 r について $z_{ir}=0$, all i とすれば，注(10)の場合と同様すべての i について $\bar{x}_{ir}=w^1_{ir}=0$ となるから，(A) の(3)からすべての i について $a_{ir} \geqq 0$。ところが(A)の(2)から $\sum_i a^1_{ir}=0$ であるから，結局すべての i について $a^1_{ir}=0$ とならねばならない。

り，すでに超過需要を充足した主体が社会的規模での均衡配分の達成を念頭において，さらに財をやりとりすると考えるのは，かえって不適切であろう。脚注(9)で触れたように，ブラッドレー自身の証明の場合も，議論を無難に運ぶためには，やはりこの仮定の設定を要請しているのである。

定理　（福岡＝三浦）　$n\geqq 3$ の場合には，つぎのような取引ルール，すなわちどんな $m\geqq 2$ についても任意の均衡配分（p，(z_r)，$(\bar{x}_r)$）および任意の会合順序 $\{\pi^t\}$，$t=1, 2, \cdots, T$ に対して (A)(D*)(N*)(N**)(O) および (E) のすべてを満たすような取引ルール，は存在しない。

証明

証明は前の定理の場合と同様，帰謬法による。

(i)　まず始めに $n=3$，$m=3$の三つの簡単な事例をとり扱い，そのすべてに共通して価格ベクトルは (1, 1, 1)，主体の会合順序は ((1, 2), 3), ((1, 3), 2), ((2, 3), 1) としておく。またいずれの事例も minimally sufficient の条件 (S) を満たしているものとする。

第1の事例は

$$Z=V^1=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

であり，ここで第1回目の取引を

$$A^1=\begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ a & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とすれば，条件 (S) と (A) の(3)から

(27)　$$0 \leqq a \leqq 1$$

で，取引後の超過需要行列は

$$V^2=\begin{bmatrix} -1+a & -a & 1 \\ 1-a & -1+a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

となる。

つぎの第2回目の取引を

$$A^2=\begin{bmatrix} -b & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & -b \end{bmatrix}$$

であらわせば，やはり（S）と（A）(3) から

(28) $$0 \leqq b \leqq 1-a$$

で，V^2 は

$$V^3=\begin{bmatrix} -1+a+b & -a & 1-b \\ 1-a & -1+a & 0 \\ -b & 1 & -1+b \end{bmatrix}$$

に移る。

さて主体 2，3 にとっては今回が最後の取引であるから，帰謬法の仮定から

$$\begin{aligned} -1+a+b &= 0 \\ 1-a &= 0 \\ -b &= 0, \end{aligned}$$

したがって

(29) $$a=1,\ b=0$$

となるのでなくてはならない。すなわちこの事例によって，われわれの取引ルールは

(30) $$\rho\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

というスペシフィケーションを得たことになるのである。

(ii) つぎに第 2 の事例は

$$Z=V^1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

である。目下の仮定の下では，明らかに主体 1，2 は何らの取引をも行いえないから，この場合の取引ルールのスペシフィケーションとしては

(31) $$\rho\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。

(iii) さらに第 3 の事例

$$Z=V^1=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を考える。この事例の第1回目の会合において

$$A^1=\begin{bmatrix} c & -c & 0 \\ -c & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とすれば，同様に仮定（S）と（A）(3)から

(32) $$0 \leqq c \leqq 1$$

で，

$$V^2=\begin{bmatrix} -c & -1+c & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1+c & -c & 1 \end{bmatrix},$$

そして取引ルールのスペシフィケーションは

(33) $$\rho\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & -c \\ 0 & 0 \\ -c & c \end{pmatrix}$$

である。

(iv) ここで転じて $n=3$，$m=6$ のつぎの新事例に移ることにしよう。$p=(1, 1, 1, 1, 1, 1)$，

$$Z=V^1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

会合順序は ((1, 2), (3, 4), (5, 6))，((1, 4), (2, 5), (3, 6))，((1, 5), (4, 6), (2, 3))，((1, 6), (2, 4), (3, 5))，((1, 3), (2, 6), (4, 5))。そしてこの Z もまた条件(S)を満たしているものとする。

さて第1回目の会合での主体 1，2 の取引については，ルールのスペシフィケーション(31)をそのまま適用することができ，また主体3，4の取引ならびに主体 5，6 の取引については，(N^{**}) の仮定から財の名前を適当に入れ換えて，同様に(31)を準用することができる。したがって第1回目の会合では，取引はどのペアについても行われず，A^1 は0行列で

$$V^2 = V^1$$

である。

ついで第2回目の会合に移り，そこでの主体 1，4 の取引については，財の名前を適当に入れ換

えることによってスペシフィケーションの(33)が適用でき，また主体 2，5 および主体 3，6 の取引については，主体の名前と財の名前をともに適当に入れ換えることによって，同じくスペシフィケーションの(30)が適用できる。その結果，未充足超過需要行列は，V^2 から

$$V^3=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1+c & 0 & 1 & -c & 0 & 0 \\ -c & 1 & 0 & -1+c & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

に入れ替わる。

つぎは第3回目の会合であるが，主体 1，5 のペアと主体 4，6 のペアは，それぞれ片方の超過需要ベクトルが 0 ベクトルであるから，仮定(O)によって取引せず，また主体 2，3 のペアは，名前のつけ換えをつうじてふたたびスペシフィケーション (31) の適用を受けるから，やはり取引しない。ゆえに

$$V^4 = V^3$$

となって，事態はそのままつぎの会合に持ち越される。

第4回目の会合では，ふたたび主体 1，6 のペアと 3，5 のペアは，仮定 (O) によって取引せず，2，4 のペアのみが取引するペアとなる。しかし具体的に彼らがどのような取引を行うかは以下の行論には関係しないので，ここではたんに V^4 がつぎの V^5 に変化するとのみ記しておくことにしよう。

$$V^5=\begin{bmatrix} 1 & * & -1 & * & 0 & 0 \\ -1+c & * & 1 & * & 0 & 0 \\ -c & * & 0 & * & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ここで第2列と第4列の＊印の箇所は，何か適当な記入がなされていると解しておけばよい。いずれにせよ，最終回の第5回目の会合では，主体2は主体6と，また主体4は主体5とペアになるわけであるから，仮定(O)によって何らの取引にも携わらないのである。

そこで注目すべきは主体 1，3 のペアであるが，彼らにとっても今回が最終回であるから，完全充足 (E) が可能であるためには，

$$-1+c+1 = 0$$
$$-c+0 = 0$$

すなわち

(34) $$c = 0$$

となるのでなくてはならない。

ゆえに前に導いたスペシフィケーション(33)と(34)の条件から，結局スペシフィケーション

$$(35)\qquad \rho\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

が得られたことになる。

(v) 以上の結果にもとづき，いよいよ議論の詰めの段階に立ち入ることにしよう。ここでわれわれが利用するのは，かつて浜田裕一郎氏が示したことのある $n=3$，$m=4$ のつぎの事例である。[(12)]
$p=(1,\ 1,\ 1)$,

$$Z=V^1=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

会合順序は ((1, 2), (3, 4)), ((1, 3), (2, 4)), ((1, 4), (2, 3))。ここでも Z は条件 (S) を満たしていると想定する。

第1回目の会合では，主体 1，2 はスペシフィケーション(35)によって，また主体 3，4 はスペシフィケーション (31) によって，いずれも取引は行わない。ゆえに

$$V^2=V^1$$

であるが，第2回目の会合では主体 1，3 ならびに主体 2，4 はいずれもスペシフィケーションの(30)どおりの取引を行い，したがって

$$V^3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

となる。

さて，この結果にもとづくならば，もはや超過需要の完全充足が不可能であることは明らかであろう。なぜなら，つぎの第3回目の会合が残された最後の機会であるが，そこでは主体3は主体2と，また主体4は主体1とペアを組むとり決めになっており，もはや事実上財を授受するチャンスを失っているからである。

よって $n=3$ の場合のわれわれの証明は終了し，超過需要の完全充足がの不可能な $m\geqq3$（したがって $m\geqq2$）の事例のありうることが明らかとなった。

(vi) つぎは $n>3$ の場合であるが，以下の所論では用いる事例のすべてをつうじて，n は一貫して3より大きいある任意の数に特定化しておくものとする。

始めにわれわれは(i)〜(iii)の議論と平行して，$m=3$ の五つの事例をとり扱い，そのいずれの場合も価格ベクトルは $(1,\ 1,\ \cdots,\ 1)$，主体の会合順序は前と同様 ((1, 2), 3), ((1, 3), 2), ((2,

注(12) 浜田裕一郎「分権的交換過程と支払手段としての貨幣」,『三田学会雑誌』1977年2月号，pp. 93-94参照。

3)，1）と定めておく。$n>3$ の場合の分析が $n=3$ の場合と顕著に異なるのは，こんどの場合われわれは minimally sufficient の条件（S）を用いることができないという点である。すなわち以下の事例では，どの主体にとっても超過需要がゼロとなっている財を導入するが，その場合条件(S)を仮定するとすれば，それらの財の手持量もまたすべてゼロとなり，$\sum_r \bar{x}_{ir}>0$, all $i \in N$ の要請に悖ることになるからである。(13)

このような理由により，以下で用いる事例はすべて（S）を満たしていないと想定するから，煩雑であるがそれらについては，超過需要行列 Z ばかりでなく，需要行列 X ならびに保有量行列 $\overline{X}$ のいずれをもそれぞれ記しておくのでなくてはならない。

第1の事例は

$$X=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \overline{X}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ Z=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

のようであり，Z のみについてみるかぎり，これは(i)の Z に 0 成分の行ベクトルを特定個数だけつけ加えた形のものとなっている。

$$A^1=\begin{bmatrix} -d & d & 0 \\ d & -d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とすれば，（A）の(3)から

(36) $$0 \leqq d \leqq 1$$

となり，(i)の場合とまったく同様の推論をつうじて，$1-d=0$ すなわち

(37) $$d=1$$

とならねばならないことが分かる。したがって，この場合の $\rho(v,\ v';\ w,\ w')=(a,\ a')$ のスペシフィケーションとしては

(38) $$\rho\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

注(13)前述，pp. 10–11 参照。

が得られることになる。

第2の事例は

$$X=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \overline{X}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad Z=V^1=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

で，ここで

$$A^1=\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ -e_{i_1} & e_{i_1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -e_{i_k} & e_{i_k} & 0 \end{bmatrix},$$

ただし＊の箇所は(38)と同じであるから記入は省略するとすれば，やはり(A)の(3)から

(39) $$0 \leqq e_{i_j} \leqq 1,\ i_j \in N\diagdown\{1,\ 2,\ 3\}$$

とならねばならない。

次回のV行列は

$$V^2=V^1-A^1=\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ e_{i_1} & -e_{i_1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{i_k} & -e_{i_k} & 0 \end{bmatrix}$$

となるが，ここで第2回目の取引行列を

$$A^2=\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ -f_{i_1} & 0 & f_{i_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -f_{i_k} & 0 & f_{i_k} \end{bmatrix}$$

とおけば，

$$W^2=\overline{X}+A^1=\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ 1-e_{i_1} & e_{i_1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1-e_{i_k} & e_{i_k} & 0 \end{bmatrix}$$

であることを考慮して，前と同様(A)の(3)から

(40) $$0 \leqq f_{i_j} \leqq 1-e_{i_j},\ i_j \in N\diagdown\{1,\ 2,\ 3\}$$

が成り立ち，

$$V^3=\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ e_{i_1}+f_{i_1} & -e_{i_1} & -f_{i_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{i_k}+f_{i_k} & -e_{i_k} & -f_{i_k} \end{bmatrix}$$

となる。そして今回が取引の最終回であるから，帰謬法の仮定の下では，いうまでもなく

(41) $$e_{i_j}+f_{i_j}=0,\ i_j \in N\diagdown\{1,\ 2,\ 3\}$$

とならねばならず，上記の $e_{i_j}\geqq 0$，$f_{i_j}\geqq 0$ の条件と相俟って

(42) $$e_{i_j}=f_{i_j}=0,\ i_j \in N\diagdown\{1,\ 2,\ 3\}$$

とならねばならないことになる。ゆえに前に導いたスペシフィケーション (38) と併せて，さらに ρ の新しいスペシフィケーション

(43) $$\rho\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が得られたことになる。

(vi) つぎに第３の事例

$$X\cdots\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \overline{X}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ Z=V^1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

を考える。この場合は(ii)の場合と同様，明らかに $A^1=[0]$ となるから，スペシフィケーション

$$(44)\qquad \rho\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。

第4の事例は

$$X=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \overline{X}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ Z=V_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

で，この事例と第3の事例との関係はちょうど第2の事例と第1の事例との関係とパラレルである。そこで前の所論に準じて

$$A^1=\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ -g_{i_1} & g_{i_1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -g_{i_k} & g_{i_k} & 0 \end{bmatrix},\quad A^2=\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \\ -h_{i_1} & 0 & h_{i_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -h_{i_k} & 0 & h_{i_k} \end{bmatrix}$$

とおけば，まったく同様の推論を経て，(44)からスペシフィケーション

$$(45)\qquad \rho\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。

(vii) 第5の事例は

$$X=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \overline{X}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ Z=V^1=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

で，第1回目の取引を

$$A^1=\begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とおけば，同じ理由から

(46) $$0 \leqq k \leqq 1$$

で，

(47) $$\rho\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & -k \\ 0 & 0 \\ -k & k \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。

(viii) ここで(iv)と平行して $m=6$ の事例を考えることとし，$p=(1,\ 1,\ \cdots,\ 1)$，

$$X=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \overline{X}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Z=V^1=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

で，会合順序は(iv)の場合と同じく((1，2)，(3，4)，(5，6))，((1，4)，(2，5)，(3，6))，((1，5)，(4，6)，(2，3))，((1，6)，(2，4)，(3，5))，((1，3)，(2，6)，(4，5))のように定められているものとする。

第1回目の会合での主体1，2ならびに主体3，4の取引についてはスペシフィケーション(44)が適用され，主体5，6の取引についてはスペシフィケーション(45)が適用されるから，

$$A^1=[0]$$

となり，したがって

$$V^2=V^1$$

となる。

第2回目の会合に移って，そこでの主体 1，4 の取引についてはスペシフィケーション(47)が適用でき，また主体 2，5 の取引についてはスペシフィケーション(38)が，主体 3，6 の取引についてはスペシフィケーション(43)が適用できるから，

$$A^2=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -k & -1 & 0 & k & 1 & 0 \\ k & 0 & -1 & -k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となって，V^2 は

$$V^3=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1+k & 0 & 1 & -k & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 & -1+k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる。

つぎに第3回目の会合に移り，ここでの主体 1，5 のペアと主体 4，6 のペアについては仮定の（O）が適用され，また主体2，3のペアについてはスペシフィケーションの(44)が適用されるから，ふたたび

$$A^3=[0]$$

で，

$$V^4=V^3$$

である。

第4回目の会合では，主体 1，6 のペアと 3，5 のペアはやはり仮定（O）から取引せず，2，4 のペアのみが取引するが，もはや彼らの取引はその後の議論と無関係であるから

$$A^4=\begin{bmatrix} 0 & * & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & 0 & * & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と書き，

$$V^5=\begin{bmatrix} 1 & * & -1 & * & 0 & 0 \\ -1+k & * & 1 & * & 0 & 0 \\ -k & * & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & 0 & * & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と書くことにしよう。

さて第５回目の会合はいよいよ最後の会合であり，そこで超過需要が完全に充足されるためには，いうまでもなく

(48) $$k=0$$

となるのでなくてはならない。そこで (47) にこの結果を代入することによって，スペシフィケーション

(49) $$\rho\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が得られる。

(ix) ここで (v) の場合と同じく，４人の主体から成る事例，$p=(1,\ 1,\ \cdots,\ 1)$,

$$X=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \overline{X}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V^1=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

会合順序 ((1, 2), (3, 4)), ((1, 3), (2, 4)), ((1, 4), (2, 3)) を構成する。

第１回目の会合では，主体 1，2 はスペシフィケーション (49) によって，主体 3，4 はスペシフィケーション (44) によって，いずれも取引せず，$A^1=[0]$ したがって

$$V^2=V^1$$

であるが，第2回目の会合では，主体 1，3 はスペシフィケーション (38) によって，また主体 2，4 はスペシフィケーション (43) によって

$$A^2=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

の取引を行い，その結果

$$V^3=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

を得る。

ところが最後に残された第3回目の会合では，主体3は主体2と，そして主体4は主体1とペアを組む番であり，主体 3，4 が取引する機会はもはや開かれていない。したがって $n=3$ の場合と同様，超過需要が clear されえないことは明白であり，当初の帰謬法の仮定は偽であることが判明したのである。

福岡正夫（経済学部教授）
三浦　礼（経済学研究科博士課程）