慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	不遇の統計学者エッジワース
Sub Title	An unfortunate statistician, Francis Ysidro Edgeworth
Author	蓑谷, 千凰彦
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1982
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.75, No.1 (1982. 2) ,p.39- 64
JaLC DOI	10.14991/001.19820201-0039
Abstract	
Notes	小特集：フランシス･ Y･ エッジワース：『教理精神科学』公刊百年を記念して
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19820201-0039

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

小特集：フランシス・Y・エッジワース

不遇の統計学者エッジワース

蓑 谷 千凰彦

はじめに

『数理心理学』(1881) 上梓後100年，統計理論に関する処女論文“誤差法則”(1883) 発表後約100年，長逝 (1926) 後半世紀以上を経過した。この1世紀，経済学者としては高く評価されているにもかかわらず，統計学者としてのエッジワースは不遇であった。エッジワースが，統計学者として過去どのように評価されてきたかを振り返ってみよう。

「エッジワースは，非凡な才能と経歴を有する独創的な思想家であったことは疑いない。しかし，……彼の統計的研究は，一般的に，読解するのに非常に骨が折れる。その価値は彼の同時代人にとって，そして多分エッジワース自身も含めて，十分明らかでなかった。今日，それはほとんど読まれていないと私は思う。」(ケンドール〔18〕)。

今日ばかりでなく，同時代の人にさえエッジワースの統計論文は余り読まれなかったらしいと多くの論評家が指摘している。家庭教師のもとで教育を受けたエッジワースは，古典や詩を自由に引用できる能力をもち，ドイツ語，フランス語，スペイン語，イタリア語に深い造詣を持ち，新しい単語を作り，単語に新しい意味を持たせるという特異な能力を有していた。その上，すべての論理的可能性をひとつひとつ緻密に論じていくエッジワースの分析方法は，表現方法を難解にするばかりでなく，煩項にもした。エッジワースの研究が当時どのように評価されていたかを示す次のようなエピソードがある（スティグラー〔28〕)。

エッジワースは，1889, 1894, 1896年と少なくとも3回にわたって，王立協会 Royal Society の会員として選出される機会をもったが，いずれも失敗した。ゴルトン Galton, Francis (1822-1911) は，エッジワースの統計研究に非常に感銘を受け，ベン Venn, John (1834-1923) や他の人々の協力のもとにエッジワースを王立協会の会員にすべく努力した。1896年には，ウェルドン Weldon, Walter Frank Raphael (1860-1906) も，K. ピアソン Pearson, Karl (1857-1936) を会員として選出する妨げとならなければ，エッジワースを支持すると表明した。しかし，その年，ピアソンは会員に選出されたがエッジワースは選出されず，エッジワースは結局王立協会の会員に

はついになれなかった。ベンは，1896年4月26日付のゴルトンへの手紙で，エッジワースの統計理論への貢献を高く評価し，王立協会のメンバーであるべきだとは思いながらも，「彼の論文のうちで，どれが才能と独創性の点で決定的な論文なのかを指摘することが，K. ピアソンと異なり困難である」と言っている。果してエッジワースは独創性に欠けていたのであろうか？　その後多くの論評家に受け継がれていったベンのエッジワース像は正しい姿を伝えているであろうか？

エッジワースを「独創的な思想家」とよぶケンドール，「生物統計学者として評価することもできる」というK. ピアソンは，エッジワースを統計学者としては高く評価していないようにみえる。「彼はいつも生物統計学者の耕地とは全く離れたところで働いていた」という有名な，K. ピアソンのエッジワース評価がある。1926年2月13日，81歳で逝去したエッジワースについて，同月に開かれたゴルトン夕食会の席上，K. ピアソンは次のようなスピーチをした。

「ウイリアム・ベートソン氏ばかりでなく，もう一人の批判家 critic エッジワース氏も亡くなられました。「バイオメトリカ」への貢献を考えれば，エッジワース氏をほとんど生物統計学者とよぶこともできます。実際，氏は，生物統計学会への出席を希望されました。昨年12月のことにすぎませんが，学会へ来られ，以前よりほんの少しばかり年齢を感じさせられるだけでしたが，いつものように話をされ，氏の批判はいつものように失敗でした。というのも，そこの人々の共通の用語で話されなかったからです。しかし氏は，そこでは幸せそうでした。……皆さんの中には，昨年6月，生物統計学会がウェスターゴード教授のために夕食会を開いたとき，会終了後，エッジワース氏が，食堂から研究室までの行列の前で，一人，中庭ではしゃいで踊っておられたのを記憶している方がいらっしゃると思います。たとえ，エッジワース氏の論法が不明瞭で有名であったとしても，80歳でなお，氏の気持や喜びの表現は少年のそれのように若々しかったのです。

氏はいつも生物統計学者の耕地とは全く離れたところで耕やしておられましたが，私は氏を生物統計学者の一人として評価したいと思います。とりわけ私達が氏に負っていることがあります。すぐれたドイツ人と同様に，氏はギリシャ文字の κ は近代の c ではないことを知っておられました。それではバイオメトリカの k はどこからきたのか不思議に思われる方も，皆さんの中にはおられることでしょう。率直に白状しますが，この k はエッジワース氏から私が盗用したものであり，k をみるたびに，いつもあのエッジワース氏をなつかしく想い出します。」（ケンドール〔18〕より引用）。

エッジワースはきわめて謙虚な人であったという。その謙虚さにくらべ，エッジワースを生物統計学者とよぶこともできる，あるいは生物統計学者の一人として評価したいというK. ピアソンのスピーチは，生物統計学からみたエッジワースへの賞辞なのであろうか？　それともK. ピアソンの傲岸さであろうか？　エッジワースの統計学への貢献は，「バイオメトリカ」の k ぐらいではなかったはずである。K. ピアソン自身の相関理論や適合度検定は，エッジワースに多くを負っていたのではないだろうか？　あるいは，エッジワースの多くの独創的な着想が，K. ピアソンに大き

な知的刺激を与えなかったといいきれるだろうか？

「王立統計協会誌」*Journal of the Royal Statistical Society* は，1926年3月号に，エッジワースの死亡記事を載せた。L. L. P. と署名されている。Price L. L. のことである。この記事によっても，エッジワースの研究は同時代人に余り読まれず，理解されてもいないと記されている。

「彼の一般的立場は，少なくともイングランドおよびアメリカにおいて特異であり，大陸の統計学者のそれとも異なっており，彼の研究は広く知られていないか，あるいは理解されていない。しかし経験的数理統計学が一般的である時代に，統計的応用の基礎に確率論を据えて基礎的分析を行ない，その含意を徹底的に，忍耐強く突きとめていった彼の分析態度は科学的にきわめて重要である。彼の統計学の諸論文を対照させ，統計理論と真剣に取り組んでいる学生にも利用可能となるような手段が講じられることが望ましい。このようなことがなされるであろうという予想のもとで，現段階では，諸論文に示されている彼の研究を評価することはしない。」(プライス〔26〕)。

しかし，エッジワースの研究が「広く知られていないか，あるいは理解されていない」というのは本当だったのであろうか？ 現代の目からみて，エッジワースの業績は史料としての意味しかもたないのであろうか？ 確かに K. ピアソンや R. A. フィッシャー Fisher, Ronald Aylmer (1890-1962) の著作にエッジワースからの文献引用はほとんどない。しかしエッジワースから全く影響を受けず，彼等が彼等の体系を築き上げていったとは思えない。もっとも彼等に，知的先達の業績に対して正直さが欠けていたのではないかというような論議をここで始める積りはない。

さて，前述のプライスの予想にもかかわらず，エッジワースの『統計学論文集』は王立統計協会から出版されなかった。これはエッジワース自身の期待にも背くことになった。1925年王立経済協会 Royal Economic Society から『政治経済学論文集』全3巻が出版されたとき，エッジワースは身内への手紙の中で，王立統計協会も，過去40年間にわたって「王立統計協会誌」に発表してきた多数の論文をそのうち再刊してくれるであろうと信じると述べている。しかし“そのうち”はついにやって来なかった。わずかに，1928年，ボーレー Bowley, Arthur Lyon (1869-1957) によって『エッジワースの数理統計学への貢献』が出版されたが，エッジワースの厖大な全論文を網羅したわけではなく，解説も分りやすいとは言えない。不正確な箇所や欠落している箇所があり，エッジワース自身の分析への追加あるいは変更が明示されていないため，ボーレーのこの書をもってエッジワースの原論文に代えるべきではない，とスティグラー〔28〕は評価している。もっと広い内容をカバーして，現代の観点からエッジワースの諸論文を解説，再評価したボーレーの書に代るものが翹望されている。

80歳を迎えてもなお矍鑠としていたエッジワースが長逝したのは，1926年2月13日であった。1891年の創刊以来死去するまで，エッジワースが編集者として情熱を傾けてきた「経済誌」*Economic Journal* は，1926年3月号に，同じく同誌の編集者であったケインズの14頁から成る“フランシス

・イシドロ・エッジワース (1845-1926)"〔20〕を掲載し，同年12月号にはボナール Bonar, James の "F. Y. エッジワースの想い出"〔1〕を載せた。わずか7頁である。また「王立統計協会誌」は，1926年3月号に，やはり7頁の死亡記事 "フランシス・イシドロ・エッジワース"〔26〕を載せた。いずれも，エッジワースの統計学上の業績を具体的に採り上げ，積極的に評価するという内容ではない。

19世紀末から20世紀初頭にかけて，数理統計学の指導的学者はエッジワースと K. ピアソンの2人であった。K. ピアソンが1936年4月27日に逝去したとき，「バイオメトリカ」は直ちに，息子 E. S. ピアソン Pearson, Egon Sharpe (1895-1980) による "カール・ピアソン：その生涯と研究の若干の側面の評価" という延べ151頁にもおよぶ長論文を2回にわたって掲載した。この好対照は，エッジワースが不遇な扱い方をされたというよりも，あるいはエッジワース統計学が色あせていたというよりも，すでに生前，エッジワース統計学を評価できる人や，"エッジワース学派" の人がいなかったことを示している。

エッジワースは彼の時代に何を貢献し，後世の統計学に何を遺したのであろうか？　3節以降でそのことを見ていきたい。

1　エッジワースとその時代

歴史の流れと同様，統計学も現代という地点へ直線的に流れてきたわけではない。現代の数理統計学を支えている思想や分析手法を標準として，エッジワース統計学の欠々たることを指摘するのは容易である。しかしながら，エッジワースが統計学史上いかに卓越した人物であったかを知るためには，彼の時代背景を語らなければならない。

エッジワースの統計学に関する処女論文は1883年の "誤差法則" である。古典的確率論はラプラス Laplace, Pierre Simon (1749-1827) の『確率の解析理論』(1812) によって完成され，その後19世紀末までに，ポアッソン Poisson, Siméon Denis (1781-1840)，ガウス Gauss, Johann Karl Friedrich (1777-1855)，ド・モルガン de Morgan, Augustus(1806-1871)，クールノー Cournot, Autoine Augustin (1801-1877)，チェビシェフ Chebyshev, Pafnutti Livovich (1821-1894)，ベルトラン Bertrand, Joseph (1822-1900)，ポアンカレ Poincaré, Henri (1854-1912)，マルコフ Markov, Andreĭ, Andreevic (1856-1922) などの重要な貢献があって，確率・統計理論は広く行き渡り，特に確率論は高い水準に達していた。また1830年からの20年間は「統計万能時代」といわれ，「統計学を全科学の女王として祭り上げんとした」ケトレー Quetelet, Lambert Adolphe Jacques (1796-1874) が活躍した。ケトレーは社会現象に統計学を広汎に応用し，統計制度，統計調査の世界的確立に尽力し，それまでの国状学，政治算術，確率論を統計学の名称のもとに統一し

た。

物理学的に社会をとらえようとしたケトレーに反発して，ドイツ歴史学派の影響を受けたシュモラー Schmoller, Gustav von (1838-1917)，クナップ Knapp, George Friedrich (1842-1926)，リューメリン Rümelin, Gustav von (1815-1889)，マイヤ Mayr, Georg von (1841-1925) は，社会統計学派を興したが，ケトレーの統計的分析方法の発展はイギリス，アメリカの数理統計学派へと受け継がれていった。特に，ケトレーの人体測定に関する統計的研究はゴルトンに影響を与え，近代統計学発展への道を開いた。

しかし依然として，統計学に現われる諸概念は，その使用法が混沌としているばかりでなく，不十分であった。後にもっと完全に展開されるようになる統計学の諸概念（平均，メジアン，モード，標準偏差，カータイル偏差，相関，回帰等々）の原型が現われるのは19世紀末である。他方，統計的分析手法の応用，特に，最小二乗法はもっぱら天文学，測地学に限定されていた。

エッジワースが統計学に着手した頃は，統計学という名称はあったが，学問体系としてはきわめて不十分であった。1880年代初期，イギリスで統計理論を研究しているのはゴルトンぐらいしかいなかった。1883年というエッジワースの最初の統計論文が発表された年に，ゴルトン61歳，エッジワース38歳，K. ピアソン28歳，ユール Yule, George Udny (1871-1951) は12歳，ゴセット（ペンネーム“スチューデント”）Gosset, William Sealy (1876-1936) は7歳の少年であり，R. A. フィッシャーはまだ生まれていなかった。結局，1880年代，イギリスで統計理論と本格的に取り組んでいたのは，ゴルトンとエッジワースの2人ぐらいであった。1880年代，イギリスで刊行された統計理論，誤差論，保険統計の78篇の論文中，40篇がゴルトンとエッジワースである（マッケンジー〔21〕)。ロンドンの University College で応用数学および数学を教えていたK. ピアソンが，生物統計学者としての道を歩み始めるのは，ゴルトンの『自然遺伝』(1889) および新しく生物学教授に任命されたウェルドンから影響を受けた1890年以降のことである。

従兄チャールズ・ダーウィン Darwin, Charles Robert (1809-1882) の『種の起源』から大きな知的刺激を受け，地理学者から人類学者，優生学者へと変貌を遂げたゴルトンは，遺伝の問題を始めて統計学的にあつかおうとしていた。1865年の“遺伝的才能と性格”に始まって，『遺伝的天才』(1869)，『科学分野におけるイギリス人：彼等の氏と育ち』(1874)，『人間能力の考察』(1883) がすでに発表されていた。ゴルトンは『遺伝的天才』の序文で，遺伝的天才の理論を「統計的にあつかい，数値的結果に到達し，“平均からの偏差の法則” を遺伝に関する議論へ導入するのは私が最初である。」と述べた。オージャイブ曲線 ogive curve（累積度数曲線のこと)，中心の尺度としてのメジアン，変動の尺度としてのカータイル偏差という概念を創ったのもゴルトンであった。1877年の論文，“典型的遺伝法則”において，ゴルトンはほとんど回帰と相関の概念に到達していたが，まだ漠々としており，一般にこれらの概念が知られるようになったのは1889年出版の『自然遺伝』

によってである。

1880年代，統計理論を前進せしめたのはゴルトンとエッジワースの2人であったが，両者とも統計理論を専門職としていたわけではない。ゴルトンは優生学を，エッジワースは数理経済学，計量経済学を構築しようとしていた。当時，専門職としての統計理論家はイギリスにいなかった。統計理論は大学の講義科目に設置されておらず，統計理論専門の学術雑誌もなかった。ロンドンには1834年に創立された統計協会 Statistical Society の雑誌「ロンドン統計協会誌」*Journal of the Statistical Society of London* があり，1887年に，協会は王立統計協会と改称されて，雑誌も「王立統計協会誌」*Journal of the Royal Statistical Society* と改められた。1891年には「経済誌」*Economic Journal*（エッジワースが編集者）が創刊されて，経済学専門誌と統計学専門誌に分れた。しかし「王立統計協会誌」の内容は伝統的に社会統計の論文が多く，1834年の創刊からの50年間で統計理論をあつかった論文はわずか2パーセントであった（マッケンジー〔21〕)。統計理論がイギリスで本格的に開花するのは，20世紀に入ってからである。「バイオメトリカ」*Biometrika* の創刊は1901年である。

エッジワースが活躍し始めた19世紀末には統計的推測理論はいうまでもなく，記述統計学といわれる体系ももちろんなかった。19世紀後半から20世紀前半は，平均，メジアン，モード，カータイル，標準偏差，回帰，相関などの基本的諸概念の確立と発展，カイ二乗適合度検定，分割表，回帰分析などの分析手法の開発，そしてベイズ流の推定から脱して現代推定論確立への胎動，有意性検定の萌芽を含んでいた。そこでは記述統計学の完成と同時に，小標本理論，推定，検定という現代推測統計学への歩みが始まっていた。19世紀末，統計学は現代の数理統計学への胎動を感じ，新しい統計学はまさに発酵し始めていた。しかし，19世紀の統計的推測の基礎となっていたのはベイズの方法であった。事象（あるいは命題）の確からしさについてわれわれが事前に有している確信が，経験によっていかに修正されていくかを示すベイジアンの帰納的推論は，現実世界の経験に重きをおく人にとっては魅力的であった。他方，ベイジアンの帰納的推論の基礎にある事前分布という考え方，特に，無知ゆえに一様分布を事前分布として仮定するという議論は論難の的ともなった。ベンは『偶然の論理』*Logic of Chance* (1866) において，確率論の目的は，経験によって確信がどのように変化していくかを分析することではなく，観測事象の系列を分析することであると述べた。ベンは事象の確率を，確信の度合いではなく，無限試行系列における相対頻度の極限値と定義した。しかし，ベイジアンの方法――逆確率の方法ともよばれる――に代る代替的な統計的推測法はなかった。エッジワースの方法も基本的にはこのベイズの方法であった。

エッジワースを中心とする統計学関係年表が表1に示されている。1883年以降のエッジワースの主論文と関連事項を表に納めた。統計学の基本的諸概念や分析方法が確立され，記述統計学が完成され，現代推測統計学が開始される時代をエッジワースは生きた。

表1　エッジワースを中心とする統計学関係年表

ラプラス『確率の解析理論』	1812	古典的確率論の完成
ケトレー『人間の諸能力の発達について』	1835	ケトレー時代の現出。社会現象への統計学の応用。近代統計学の開始
ダーウィン『種の起源』	1859	進化論。生物統計学へ刺激
ジェヴォンズ「金価格の暴落」	1863	指数論の先駆的研究
ラスパイレス「1851～63年のハンブルグの物価」	1864	ラスパイレス式の提唱
ゴルトン『遺伝的天才』	1869	遺伝の統計学的分析に先鞭をつける
パーシェ「ハンブルグの物価上昇」	1874	パーシェ式の提唱
レキシス『人間社会の集団現像について』	1877	人口・社会現象の規則性に確率論を援用
ゴルトン『人間能力の考察』	1883	優生学の創始
エッジワース「誤差法則」	〃	誤差法則による数学的推論
エッジワース「統計学の方法」	1885	誤差法則の応用
〃　「出生・死亡・婚姻率の変動を確認する方法」	〃	分散分析の先駆的研究
〃　「観測値と統計」	1887	最良平均を得る方法
〃　「誤差法則の経験的証明」	〃	適合度検定（2×2分割表）
〃　「指数論覚書き」	1887	指数論の統計的研究（～1890)
ゴルトン『自然遺伝』	1889	相関，回帰の概念の登場
エッジワース「相関のある平均」	1892	多変量正規分布における相関理論の展開
K. ピアソン『科学の文法』	1892	マッハの影響を受けたK. ピアソンの科学の方法の展開
K. ピアソン「進化論への数学的寄与」	1894	進化論の統計的研究。ピアソン系度数曲線の定式化。標準偏差，平均偏差，モードの概念が使用される（～1895)
K. ピアソン「所与の体系の適合基準」	1900	適合度検定の検定統計量としてχ^2分布を再発見
ウェルドン，ゴルトン，K. ピアソン	1901	「バイオメトリカ」創刊
ボーレー『統計学要論』	〃	当時の代表的テキスト
エッジワース「誤差法則」	1905	エッジワース展開
ユール「相関論」	1907	偏相関，線形重回帰論
ゴセット「平均の確率誤差」	1908	スチューデントのt分布の発見。小標本理論開始
エッジワース「度数定数の確率誤差」	〃	最尤推定量とその漸近的特性の先駆的研究
I. フィッシャー『貨幣の購買力』	1911	フィッシャーの理想算式を提唱
エッジワース「統計表示法」	1913	変換法を提唱（～1918)
R. A. フィッシャー「標本相関係数の度数分布」	1915	正規標本における相関係数の分布
R. A. フィッシャー「理論統計学の数学的基礎」	1922	母集団と標本概念を明確化。推測論を始めて体系的に展開
I. フィッシャー『指数作成法』	〃	150余の指数算式を提示。算式選出のためのテストを考案
R. A. フィッシャー「統計的推定論」	1925	推定論を展開
〃　『研究者のための統計的方法』	〃	数理統計学の原典

2　エッジワースの目的

エッジワースの目的は数理心理学の建設であり，効用の測定は数理経済学へ，確信の度合計算は

確率論へと彼を向かわせた。しかし確率概念自体が哲学的論議の的であった。エッジワースは，賢明にも，確率概念をめぐる哲学的論議には没入せず，「彼はしだいに哲学的基礎に対しては懐疑的な態度を取るとともに，こうした基礎が本当はどれほど不確実なものであろうとも，その上に首尾よく立てられた実際の応用に対しては実用主義的な態度をとるようになった。その結果は，彼の興味の中心が徐々に確率から統計の理論へ……と移っていくことになった……」（ケインズ〔20〕)。

エッジワースが統計学を適用しようとする分野は，ゴルトンのように遺伝学ではなく，社会科学，特に経済学であった。経済学における不確実性を数量化し，統計的処理を施すという野心的な計画を抱いていた。「私の主目的は誤差法則を実際に応用することである。」と“統計学の方法”(1885)で述べた。誤差論は，天文学，測地学において惑星軌道，土地測量などの観測誤差の理論として，18世紀後半から19世紀初頭にかけて発達した。算術平均を最確値としてもたらす分布として正規分布（別名ガウスの誤差分布）がガウスによって得られており，誤差の分布法則として用いられていた。この誤差法則を用いて，エッジワースは次の課題に答えようとした。

(1)提起された Means（位置と変動の両方の尺度を含む）の間の差が，偶然的かそれとも何らかの法則を示唆しているか。

(2)どの Mean を用いるのがもっとも良いか。

(1)は有意性検定の問題となり，(2)は最良の推定量を選択する問題となる（それぞれ4節で説明する)。誤差法則の応用という問題意識は，エッジワース統計学を一貫して流れている。非正規の誤差分布に対しては，一般誤差法則あるいはエッジワース展開が示され（1905)，あるいは非正規変数を変換によって正規分布にしたがうようにする変換法が推奨される（1913)。推定量選択の問題は，最尤推定量とその漸近的特性を導く先駆的研究をもたらし（1908～1909)，物価指数における平均的価格変動の研究にも関連する。有意性検定は，理論体系として結実しなかったが，論理においてネイマン＝ピアソンの両側検定と同じであり，また分散分析に先鞭をつけた（1885)。

確率に基礎をおいた統計的方法を経済学に応用したという点においても，エッジワースは際立った存在である。確率，統計学を用いて社会現象あるいは経済現象を分析しようとしたのは，もちろんエッジワースが最初ではない。ケトレー，ゴルトン，レキシス Lexis, Wilhelm (1837-1914) がいた。しかし，彼等は現象の記述にとどまり，差の有意性検定，推定量の比較，選択というエッジワースの到達した段階までいかなかった。

エッジワース以前に，誤差法則を社会科学に応用できる人がいたとすれば，それはジェヴォンズ Jevons, William Stanley (1835-1882) であった。しかし彼はそれをしなかった。数理経済学者ジェヴォンズは，統計学者でもあった。確率，統計学をロンドンの University College のド・モルガンから教わったジェヴォンズは，季節変動，物価指数を研究し，統計図表を重視した（寺尾〔29〕)。「私はすべての経済著作家は，いやしくも彼らが科学的である限りは，数学的でなくてはな

らないと主張する。なぜなら彼らは経済的数量およびこのような数量間の関係を取り扱うが，一切の数量および数量の関係は数学の領域に入ってくるからである。」(ジェヴォンズ〔17〕) と『経済学の理論』(1871) 第2版への序文で述べたジェヴォンズは，キングの法則の方程式化も試みているが，統計学を経済学に応用するまでには到らなかった。それだけに19世紀末のエッジワースの試みは，個々の研究業績を離れてもなお，斬新かつ壮大な試みであった。エッジワースに，計量経済学のパイオニア達の中で特に高い位置が与えられているゆえんである。

3　エッジワースの方法

エッジワースの統計的推測方法は基本的に逆確率の方法である。確率は不完全な確信と関連している。確率の大きさは確信の度合に対応している。ところで，われわれは確信の度合を計測することができるであろうか？　ある事象の確率は，一連の経験を通じて長期的な度数によって決定される。完全なサイコロにおいて6の目の出る（事後）確率は6分の1であることが長期度数からわかる。しかしサイコロが完全であるあるいは不正であるという（事前）確率はいくつか？　すべての確率の測定においては，このように，事前確率のの要素が含まれているとエッジワースは言う。すなわち観測値を確からしさと関連させる前に事前確率の原理が存在している。この事前確率の原理は確率の経済学への応用にも現われる。「確率は，……独善的理論家達が想像するよりもっと広い応用を政治経済学に対して有している。確率計算と経済学の原理は，全く異なった知識分野であるかのようにみえる。しかし，それらは共通根を有しているということを私は提示したい。確率論は，他の諸科学に対してそうであるように，経済学に対しても，純粋直観や帰納法によってではなく，一般的印象および数学的常識とよばれているものによってある種の証拠となる前提を与える。ラプラスが提示し，ピアソンが支持した“確率分布の定数について何も知識を有していなければ，1つの値は他の値と同様の確からしさをもつという仮定”はこの種の前提である。このいわゆる「事前」確率は，確率分布の定数に対してばかりでなく，他の種類の定数に対しても，測定理論において用いられる。曲線や平面を特徴づける定数，および解析関数の幾何学的形状を特徴づける定数の値が，極端な値をとらないとか，きわめて大きくあるいは無限に小さくはならないと，逆の証拠がない限り，仮定される。」(エッジワース〔11〕)。

しかしながら，事前分布を用いるとき quoesita（母集団の未知パラメータ）の可能なすべての値が同様に確からしいと仮定することはできない。なぜなら，quoesita について通常何ら確固たる知識を有していないということばかりでなく，たとえば modulus $c(=\sqrt{2}\sigma)$ のすべての可能な値が同様に確からしいと仮定されるならば，その逆数 $h=1/c$ あるいは c の関数たとえば c^2 については，その等確率の条件が成立しなくなるからである。しかしながら，観測値の数が大きいときに

は，事前確率に関する知識は余り要求されない。いいかえれば，事前分布に一様分布を仮定しようとその他の分布を仮定しようと，観測値の数が大きければ，事後分布の means（平均値や modulus）を最大にする推定値はほとんど変わらない。

エッジワースは，自らの方法を純逆確率法 genuine inverse method とよぶ。純逆確率法とは，観測事実 observations déja faites からそれをもたらした未知の原因を推測することであり，提案された種々の原因からその観測事実が生ずる確率を計算するというベイジアンの方法にほかならない。

エッジワースの立場はこのように基本的にベイジアンのそれであったが，エッジワース自身，K. ピアソンと同じように，確率概念に関しては揺れ動いていた。エッジワースは確率概念の哲学的基礎にいつまでも拘泥せず，統計学の理論とその経済学への応用という方向へ進んだ。

純逆確率法を唱えるエッジワースの立場は，20世紀他の数理統計学者とは際立った対照をなしていたために，エッジワースには逆確率信奉者のレッテルが貼られた。ところが，エッジワースには直接確率 direct probability（R. A. フィッシャーが相対度数によって定義した）からの接近もある。特に最尤推定量は逆確率および直接確率の両方法を用いて得られていることは注目に値する。推測統計が逆確率の方法から完全に脱け出すためには，1922年のR. A. フィッシャーの有名な論文“理論統計学の数学的基礎”まで待たねばならなかった。

4　エッジワースの業績

統計学の分野に限っても，エッジワースの著作は厖大な数に上るといわれている。ボーレーによる『エッジワースの数理統計学への貢献』（1928）には74篇の論文リストと簡単な注釈がつけられているが完全なリストではないらしい。ハリー・ジョンソンによる完全なリストが大英博物館図書室，王立統計協会，LSE（London School of Economics）などにあるらしいが日本にはない。

エッジワースの完全な文献リストを提示するのがここでの目的ではない。エッジワースの統計学上の業績を次の諸点についてみておきたい。

(1)一般誤差法則の展開。

(2)最尤法の先駆的研究。

(3)相関理論の一般化。

(4)指数理論の統計的研究。

(5)種々の先駆的研究（適合度検定，分散分析，有意性検定，t 分布の導出）。

(1) 一般誤差法則の展開

天文学，測地学の分野で発達した誤差法則（正規分布）を，社会科学に応用することは最初の論文“誤差法則”(1883) 以来，エッジワースの一貫したテーマであった。エッジワースは確率の性質と誤差法則の応用を終始話題にした。1904年，経済学者の仲間同士でケンブリッジ郊外へサイクリングしたときも，車の往来で少し危険であるにもかかわらず，エッジワースは変換法のことなどを論じ始めた。キャノン教授は脇へ寄ってきて言った。「スピードを上げよう，ボーレー，時速12マイル以上なら彼も数学を話すことはできないよ。」ボーレー〔4〕はこのような逸話を伝えている。

誤差法則の応用という場合，2つの側面が考察されている。1つは，経済変量に現われる変動のなかで，偶然的なものとそうでないもの（何らかの系統的な変動原因を有しているもの）を区別することである。たとえば2変数間の，あるいは2時点間の平均の差が偶然的かどうかを知りたいとしよう。この問題意識は，算術平均，モード the greatest ordinate，メジアン，幾何平均，加重算術平均などの“平均”のなかで，いかなる平均を選ぶべきか，という推定量選択の問題，および差がどれぐらいの範囲内であれば偶然変動とみなすことができるかという有意性検定の問題につながる。推定量選択の問題は，R. A. フィッシャーに10年以上先んずる最尤法の提唱となって結実し，有意性検定の問題は，古典的な誤差論で用いられていた“確率誤差” probable error にもとづく検定（$\mu\pm0.6745\sigma$ の範囲内に入る確率は0.5である。この 0.6745σ が確率誤差とよばれ，測定精度の目安とされた）に代る有意水準 0.005 の両側検定の提示となった。

誤差法則の応用のもう1つの側面は，正規分布では説明できない偶然変動をも数学的に表わす一般的な度数曲線を示そうとしたことである。一般誤差法則あるいはエッジワース展開とよばれている方法である。中心極限定理を考察することによって，エッジワースはエッジワース展開と今日よばれている概念に到達した。このエッジワース展開から中心極限定理の種々のタイプを導き，多数の経験的度数分布を近似させるのにこの一般誤差法則を用いた。エッジワース展開とは，x を標準変数，$f(x)$ をその密度関数とすれば，現代的に書くと次式である。

$$f(x)=\phi(x)\left\{1+\frac{Q_1(x)}{\sqrt{n}}+\frac{Q_2(x)}{n}+\frac{Q_3(x)}{n\sqrt{n}}+\cdots\cdots\right\}$$

ここで

$$Q_1(x)=\frac{\kappa_3}{6\sigma^3}(x^3-3x)$$

$$Q_2(x)=\frac{\kappa_4}{24\sigma^4}(x^4-6x^2+3)+\frac{\kappa_3^2}{72\sigma^6}(x^6-15x^4+45x^2-15)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

κ_m は m 次のキュムラント

nが十分大きいときは$\sqrt{n}$以下のオーダーの項を無視して，$f(x)$ は $\phi(x)$ で近似できることがこのエッジワース展開よりわかる。

このような一般誤差法則が展開されたのは，観測された正規性からのズレが，データのとり方が悪いとか，データ数が少ないということではなく，観測事実のなかには非正規性が一般的なものとして認識され始めたことに対応しているであろう。

「私は最初，経験と，誤差法則が導出される純粋確率理論との間のギャップは，ケトレーが用いた法則よりもっと一般的なポアッソンによる法則を用いれば埋めることができるかも知れないと思った。……正規法則は無数の独立な要素の合成から得られる最終形とみなすことができるのに対して，ポアッソンによってもたらされた一般形はこの過程における最後から2番目の段階，すなわち寄与している諸原因を完全にバラバラにできないような段階を表わしている。換言すれば，誤差の正規法則は実際の形への1次近似であり，その修正は2次近似をもたらす。この2次近似は，ボーレー博士が彼の『統計学要論』で示したように，適度に非対称的な度数曲線のグループを表わすには十分である。私は所与の度数分布に3次近似を行ない，最後から2番目より前の段階へ進むことによって，理論と事実の間の適合範囲を拡げた。しかしこの拡張によっても，あるいは“一般誤差法則”の名称の下に私が与えたより高次の近似によっても，数学的表示を必要とするすべての度数曲線を表わすことはできない，と一般に考えられているように思われる。“正規”および“一般”誤差法則によって表わすことができるのは，全グループの一部，といっても約90パーセントという大部分であろう。」(エッジワース〔9〕)。

一般誤差法則にはこのような限界があり，限界を超えたところでは，経験式で満足しなければならない。このような限界に対する代替的な方法が変換法 method of translation である。正規分布にしたがわない確率変数を適当に変換することによって，正規分布にしたがう変数にするという方法である。この変数変換の着想は，後に R. A. フィッシャーの z 変換に影響を与えたと思われる。

エッジワースは正規分布で説明できる例，できない例をあげ，説明できないものについては一般誤差法則あるいは変換法によって説明しようとしている。非正規型の度数に対して，一般誤差法則と変換法のどちらを用いるべきかに関し，エッジワースは次のような結論を下している。「正規型の近傍では，一般誤差法則，変換法あるいは両者の混合いずれを用いようと同じように利点がある。どちらを用いるべきかという選択は分析目的に依存している。正規型から離れていくほど，変換法が好ましくなる。一般目的に対して適切な1つの方法だけを選ばなければならないとすれば，それは一般誤差法則ではなく変換法である。」(〔9〕)。

ところで，3次近似までのエッジワース展開を度数曲線として用いる場合，そのエッジワース曲線のパラメータをいかにして求めるかという推定問題が発生する。エッジワースはパラメータ推定法として，モーメント法とパーセンタイル法を比較し，モーメント法の欠点をあげ（高次モーメン

トを観測値から求めることには大きな標本変動が伴う，μ，σ^2 をそれぞれ $\bar{x}$，$\sum(x_i-\bar{x})^2/n$ から求めることは最尤推定量としての意味をもっているが，κ_3，κ_4 についてはその保証がない。モーメントを正確に決定できないほど，観測値は広い範囲にわたって，あるいは不規則に変動しているかも知れない)，パーセンタイル法を推奨している（〔9〕)。

度数曲線の当てはめに関しては，すでにピアソン系度数曲線が1894年に発表されていた。エッジワースは，このピアソン体系とエッジワース体系の長所と短所を詳細に比較・検討している（〔9〕)。しかし結論は非常に控え目である。どちらのシステムが良いかを比較するにあたっては慎重に考慮しなければならない。判定を下すのはやめよう。どちらを採用すべきかは統計数値の表示目的に依存している。

しかし一体，エッジワースは（そして K. ピアソンも）観測度数に良く当てはまる曲線を見出し，何をしようとしていたのであろうか？ 母集団分布の型を見出し，最良のパラメータ推定量を求めるというような問題意識とは結びついていないし，分布曲線の型を見出すことが，待ち行列理論における到着数の分布やサービス時間の分布を見出すことのように，応用面とも，当時はつながっていない。悪くすれば，曲線当てはめゲームになりかねない。エッジワースは当時すでにこのこと，あるいはそのむなしさ？ に気がついていたのではなかろうか？ 延べ116頁におよぶ長論文“統計データの数学表示”(1916-1917) の末尾は次の文章で結ばれている。「しかし，われわれの研究に対するもっとも困難な質問の1つは，その研究結果を何に使うのか？ ということである。」

しかしながら，このエッジワース展開という中心極限定理の精密化は，きわめて高い理論水準にエッジワースが達していたことを示しており，また変換法はその後広く使用されるに至る着想であった。そしてスティグラー〔28〕が言うように，正規分布一般化の構想が1883年，非対称曲線への関心が1885年にまでさかのぼることができるとすれば，エッジワースの誤差法則一般化の着想は，1894年の K. ピアソンの一般度数曲線の研究に示唆を与えたに違いない。

(2) 最尤法の先駆的研究

最尤法は，R. A. フィッシャーの名とともに知られている。パラメータ推定法として最尤法を提唱し，有効推定量，十分統計量，フィッシャー情報量などの概念を導入したのは R. A. フィッシャーである。尤度という用語を始めて用いたのも R. A. フィッシャーであるが，考え方としては，最尤法はガウス Gauss, Karl Friedrich (1777-1855) にまでさかのぼることができる。算術平均を最も確からしい値としてもたらす誤差分布は何か，という観点から正規分布を導いたのはガウスである。

しかし標本抽出理論との関連で最尤法を論じ，最尤推定量の漸近的効率を導出したのはエッジワースが最初である。1908-1909 年のエッジワースの論文“度数分布の定数の確率誤差について”の

中に尤度という言葉はないが，まぎれもなくエッジワースが述べているのは最尤推定量であり，その漸近的効率である。まず逆確率の方法によって一般的結論を得ているが，同じ結論を事前分布を仮定する必要のない直接法 direct method からも得ている。直接法によって議論を展開していくためには，「もはや，観測値をもたらした原因まで事後的に遡及するために，特定の観測値の組に立脚する必要はない。むしろ，われわれは観測する以前に前もって観測値の分布を考え，観測値の組からつくられ，種々の値をとる観測値の対称関数の中で，ある定数の真の値のまわりで最小の散らばりをもつ関数はどれかを決定」(〔8〕) すればよいと述べている。明らかに，エッジワースは，逆確率を用いないで，いくつかの推定量の中から，その標本分布を比較・考察することによって，漸近的に（エッジワースは観測値の数が大きい場合を考察している）最小分散をもつ推定量を得ようとしている。

エッジワースの原論文〔8〕の記号ではなく，プラット〔25〕にしたがってエッジワースの議論を紹介しておこう。

$$\sum k(x_i-\hat{\theta})=0$$

の方程式を満たす位置パラメータの推定量 $\hat{\theta}$ を考える。目的は，n が大のとき，$\hat{\theta}$ の分散を最小にするような関数型 k を決定することである。もし密度が $f(x-\theta)$ であり，$\hat{\theta}$ の漸近的平均が θ ならば，$\int kf=0$ であり，$\hat{\theta}$ は分散 V/n をもつ漸近的正規分布となる。ここで

$$V=\int k^2f/(\int k'f)^2$$

である。そしてエッジワースは，V は

$$k=Af'/f \quad (A\text{は定数})$$

のとき最小になることを証明している。$k=Af'/f$ のとき，$\sum k(x_i-\hat{\theta})=0$ の解は最尤推定量を与える（数学注参照）。

エッジワースは自らの方法を，純逆確率法 genuine inverse method とよんだことから，エッジワースは逆確率の方法によってのみ議論を展開したと同時代および後世の人からみられたのであろうか？　エドワーズの『尤度』*Likelihood*〔13〕もエッジワースを簡単に逆確率論者としてしかみていない。真相は，誰もエッジワースの原論文，あるいはボーレーによるエッジワース論文の解説を読まないでエッジワースを論評したということであろう。なぜなら，前述〔8〕からの引用文から判断しても，エッジワースは直接確率によって議論を展開していることは明らかであり，また1928年刊行のボーレー〔3〕にもくわしく説明されているからである。最尤法に関して，エッジワースは，多くの注釈者が示唆している以上に R. A. フィッシャーに先んじており，きわめて大きな貢献をしていると指摘したのはプラット〔25〕である。これまでの断片的なエッジワース評価ではなく，最尤法へのエッジワースの貢献を全面的に再検討し，高い評価を与えたプラット論文の発表は，エッジワースの重要な補遺〔8〕が発表（1909）されてから67年後のことである。しかし R.

A. フィッシャーは，最尤法に関するエッジワースの優先権を認めなかったばかりでなく，エッジワースの非常に多くの最尤法への貢献も認めようとしなかった。フィッシャーは最尤法の着想およびその特性に関して，先達の業績について何も言及していないが，フィッシャーはエッジワースの論文を，補遺〔8〕も含めて読んだであろうとプラット〔25〕は臆測している。プラットの臆測が正しいかどうかは今後の研究を待たねばならないが，エッジワースが逆確率ばかりでなく直接確率によっても最尤法を展開していること，最尤推定量の標本特性に言及し，その漸近的効率を証明していることは明らかである。R. A. フィッシャーに先んじること13年前である。

(3) 相関理論の一般化

相関という概念を統計学に始めて導入したのはゴルトンである。1877年，王立学会 Royal Institution における「人間の典型的遺伝法則」と題する講演において，はじめて相関概念を与えた。1885年，人類学研究所へ提出された論文において，ゴルトンは，2本の回帰線の図（YのX，XのYへの回帰）と相関表を発表し，2変量正規相関の理論を完成しつつあった。1888年には，王立協会へ提出した論文“相関関係および主に人体測定データからのその計測”において，はじめて相関関係という用語が現れた。「私の知る限り相関関係を明確に定義し，その動きを調べ，あるいはその程度をどのようにして計測するかをこれまで試みた人はいなかった。」（K. ピアソン〔23〕より引用）と論文冒頭で述べている。相関と回帰の概念が広く知られるようになったのは，ゴルトンの『自然遺伝』(1889) の出版以降である。ゴルトンは負の相関，重相関という概念にまでは到達していなかった。

エッジワースの相関理論研究への契機はゴルトンにある。ゴルトンの研究によって示唆された問題に取り組み，1892～1894年に7篇の論文を書いた。「哲学誌」*The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1892 年8月号に発表された最初の相関理論に関する論文“相関のある平均” Correlated Averages において，ゴルトンの“相関指標” Index of Co-relation，ウェルドンの“ゴルトン関数” Galton's Function という用語の代りに，相関係数という用語を用いた。現在用いられている相関係数のことである。

エッジワースは，ゴルトンの到達点

$$Je^{-(x_1^2-2\rho x_1x_2+x_2^2)/(1-\rho^2)}$$

から出発し，相関の一般理論へ到達した。3変量正規分布の同時確率密度関数の形

$$Je^{-R}$$

ここで

$$\begin{aligned}R=\Delta\{&(1-\rho_{23}^2)x_1^2+(1-\rho_{31}^2)x_2^2+(1-\rho_{12}^2)x_3^2\\&-2x_1x_2(\rho_{12}-\rho_{13}\rho_{23})-2x_2x_3(\rho_{23}-\rho_{21}\rho_{31})\\&-2x_3x_1(\rho_{31}-\rho_{32}\rho_{12})\}\end{aligned}$$

$$\Delta^{-1}=\{(1-\rho_{23}{}^{2})(1-\rho_{12}{}^{2})-(\rho_{12}\rho_{23}-\rho_{13})^{2}\}$$

を導いたのはエッジワースが最初である。そして1892年の前述の論文において，「この推論は全く一般的である。3変数の場合で得られた上述の結果を4変数以上の場合に拡張することができる。」（ボーレー〔3〕より引用）と述べている。エッジワースの推論の線に沿ってn変量の場合へと一般化することは困難である，とK. ピアソン〔23〕は論じているが，ボーレーはn変量への一般化はエッジワースがすでに1892年に到達していると述べ，n変量の同時確率密度関数を与えている（〔3〕110頁)。1934年の「エコノメトリカ」*Econometrica* 誌上においても，ボーレーは，エッジワースとK. ピアソンのどちらが先に，現在よく知られている方法への着想をもつに到ったかを決定しようとしても，そんなことは価値がない，現在用いられている公式と本質的に同じ形をもつ重相関の一般形を1892年にエッジワースは与えていると述べた（〔4〕)。

現在用いられているn変量正規面の定式化，相関係数の計算法などは，K. ピアソンの1896年の論文“回帰，遺伝およびパンミクシー”にもとづいていることは確かであるが，相関理論を一般化した栄誉はエッジワースに与えられるべきであろう。エッジワースが言ったように，n変量正規面への一般化は，エッジワースの示唆にしたがって行われたに違いないからである。それゆえ，K. ピアソンが，「1892年のエッジワースの研究は，重相関の問題をきわめて不完全な状態のまま残したと私は結論する。彼は多分，自分自身何を求めているかを知っていたであろうが，それを他の人にも明らかにすべく言葉で言い表わしたり，覚書を印刷しておくというような必要な措置を講じなかった。それゆえ，この問題を今振り返ってみれば，1895年に，重相関の問題を“エッジワース問題”と私はよぶべきであったかどうか大いに疑わしく思っている。普通の数学訓練を受けた人が，n変数の s. d.（標準偏差）と相関が計算されれば，直ちにn変量（正規）面の型を決定できるような定式化をエッジワースが与えなかったことは確かである。このような私の言明が正当だと思うのは，私が重相関の問題をあつかったとき，エッジワースの論文や彼の表示法から出発したという記憶がないからである。」(K. ピアソン〔23〕) と相関理論へのエッジワースの寄与を過小評価し，1895年には“エッジワース問題”と自ら名付けて，エッジワースから多大の示唆を受けたことを仄めかしながらも，私の研究はエッジワースとは独立であると言明するのは，余りにも過度に自己防御的である。K. ピアソンの名声と不公正なエッジワース評価のために，相関理論一般化でエッジワースが果した役割は，今日不当に低く評価されたままになっている。

(4) 指数理論の統計的研究

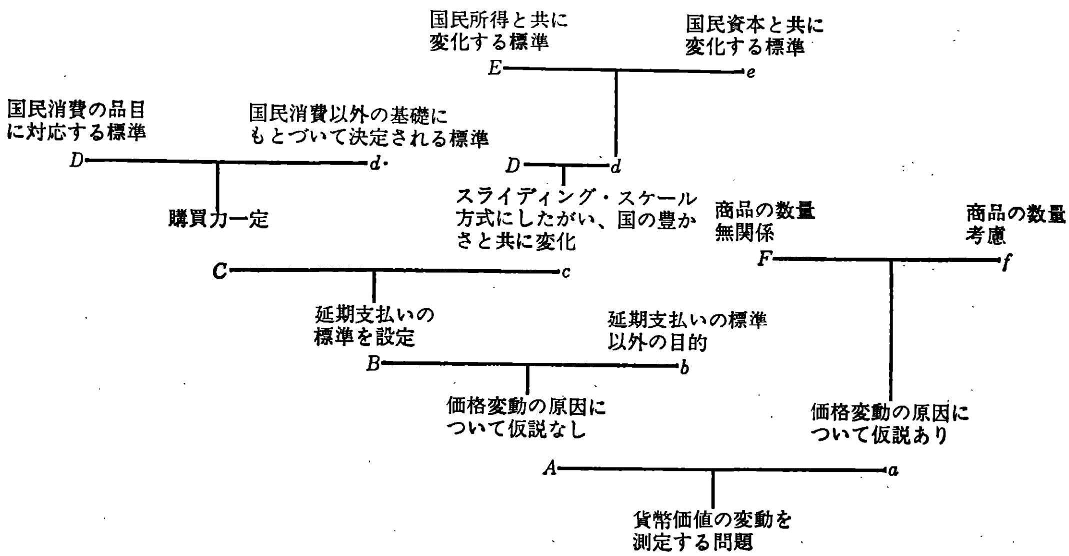
エッジワースの指数問題に関する最初の論文は，統計学の処女論文“誤差法則”が発表された1883年に早くも1篇出ている。“金価値の変化を確証する方法について”と題する論文である。この論文は明らかにジェヴォンズから刺激を受けている。ジェヴォンズは，1863年“確証された金価値

の暴落”において指数算式として幾何平均を採用すべきであると提案した。1848年のカリフォルニア，1851年オーストラリアのヴィクトリア，1859年のコロラドにおける金鉱発見によって金価値が下落したと推定されたが，当時，金価値下落の意味も測定方法もなく，「ジェヴォンスは物価指数問題を事実上第一歩から解かねばならなかった。」(寺尾〔29〕)。貨幣価値の変化は商品価格一般の上昇又は下降より求めるべきである。そして商品価格一般の変化は，それまで疑問なしに用いられていた算術平均ではなく，幾何平均を採用すべきであるとジェヴォンズは主張した。この主張に対し，ラスパイレス Laspeyres, Étienne (1834-1913) は1864年ラスパイレス式を提唱し，幾何平均は不合理であると論じた。ジェヴォンズは1865年“1782年以来の価格および通貨価値の変動”においてこれに応酬した。指数理論に関する論争の開始である（寺尾〔29〕)。

エッジワースは，「物価指数の父」といわれるこのジェヴォンズの2論文によって刺激されたことは間違いない。そして指数に関する主要な研究は，エッジワースがイギリス科学振興協会の貨幣価値基準委員会の幹事を勤めたときになされた。1887年から1890年までに発表された覚書3篇，報告4篇がそれである。指数問題を統計理論の観点から徹底的に研究したのはエッジワースが最初である。

指数はヤード尺で長さを測定するような正確さをもたなければならない，あるいは物価指数は不正確で使用できないという説に論駁して，貨幣価値の変動を示す式は一意的に決定すべきものではなく，指数は目的に応じて算式を異にするという指数算式複数説を主張した。たとえば，客観的な購買力の尺度，標準人口，外国貿易の価値の変化などを測る指数と，生計費指数とは明らかに概念が異なり，区別すべきであると述べた。エッジワースは〔12〕で図1のような論理樹を作成して議

図1　指数算出の論理樹



論を展開する。同時代人を辟易させた「論理的に可能なすべての組合せを明示的に考慮しようとする」（ヒルドレース〔15〕）あの分析態度である。

この論理樹の ABCD のケース，すなわち延期支払いの標準を決定するための指数を考えてみよう。このケースは国民消費の品目にもとづいており，消費者に一定の購買力を保証し，価格変動の原因については何の仮説も設定されていない場合である。この ABCD において，エッジワースは8通りの指数算式を比較する。記号で示せば次の通りである。式に現われる $\sum p_0q_0=\sum_{i=1}^{n}p_{0i}q_{0i}$, $\sum p_1q_0=\sum_{i=1}^{n}p_{1i}q_{0i}$ 等々であり，p_{0i} は0時点における品目 i の価格，q_{0i} は0時点における品目 i の購入量である。

(1) $\dfrac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0}$ （ラスパイレス式）

(2) $\dfrac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}$ （パーシェ式）

(3) $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0}+\dfrac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}\right)$ （(1)，(2)の単純平均）

(4) $\dfrac{\sum p_1\frac{1}{2}(q_0+q_1)}{\sum p_0\frac{1}{2}(q_0+q_1)}=\dfrac{\sum p_1(q_0+q_1)}{\sum p_0(q_0+q_1)}$ （エッジワース式）

(5) $\dfrac{\sum p_1q_1\left(\frac{p_1}{p_0}\right)}{\sum p_1q_1}$

(6) $\dfrac{\sum p_0q_0\left(\frac{p_1-p_0}{p_0}\right)}{\sum p_0q_0}$

(7) $\dfrac{\sum p_1q_1/\sum q_1}{\sum p_0q_0/\sum q_0}=\dfrac{\sum q_0}{\sum q_1}\cdot\dfrac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}$

(8) $\dfrac{P_1}{P_0}$

$$P_0=\frac{\sum p_0q_0}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{q_{0i}+q_{1i}}{p_{0i}q_{0i}+p_{1i}q_{1i}}\right)}$$

$$P_1=\frac{\sum p_1q_1}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{q_{1i}+q_{2i}}{p_{1i}q_{1i}+p_{2i}q_{2i}}\right)}$$

エッジワースはこの8つの算式のなかで(4)の式を推奨した。(4)はエッジワース式あるいはマーシャル＝エッジワース式あるいはボーレー＝エッジワース式などともよばれる。

非加重幾何平均を指数算式法として推奨したのは aF のケースである。すなわち，商品の数量と無関係であり，貨幣供給に影響を与えつつ，完全市場の場合のように価格が変動する多数の品目

グループがある場合に，指数を作成する方法である。このとき好ましい指数として非加重幾何平均を推奨した。エッジワースは他に ABCd, ABcD, ABcdE, ABcde, af のケースも考察している。

エッジワースの包括的で鋭い指摘を含む指数理論の統計的研究は，理想算式を提唱し，指数算式選出のためのテストを考案した I. フィッシャー Fisher, Irving (1867-1947) に影響を与えた。

(5). その他の先駆的研究

澎湃として起こる着想とそれを理論化し，解析するエッジワースの能力は，上記以外にも現代統計学で重要な役割を果している種々の分野に及んでいる。"誤差法則の経験的証明" (1887) において，2つのクラスに分割されたデータの正規分布からの期待度数と観測度数を比較し，カイ2乗適合度検定を行なっている。エッジワースはこの検定を2クラス以上に拡張することを知らなかった，と後に K. ピアソンは述べたが，しかし K. ピアソンのカイ2乗検定 (1900) に10年以上も先んじているとスティグラー〔28〕は指摘した。またスティグラーは前述の論文において，分散分析の先駆者としての栄誉をエッジワースに与えている。1885年の "出生・死亡および婚姻率の変動を確証する方法について" と題する論文において，二元分類表の分散分析法をエッジワースがすでに示し，そこには次のような驚くべき洞察がなされている，とスティグラーは注目すべき研究結果を発表した。

(イ) 分散分析表の作成方法が示されている。

(ロ) F統計量と同等の行効果と列効果を別々に計測する方法が示されている。

(ハ) 残差平方和にもとづいて，誤差分散の推定値が与えられている。

(ニ) これら推定値への相互作用の効果が評価されている。

エッジワースのこの論文はレキシスの影響を受けたと思われるが，これまで，分散分析については，R. A. フィッシャー以前の貢献者として，基本的な考え方でレキシスやボルトケヴィッチ Bortkiewicz, Ladislaus von (1866-1931) への言及がなされても，エッジワースの寄与が注目されたことはなかった。 R. A. フィッシャーによる分散分析の基本原理と分析方法に影響を与えたという点では，ドイツ人であるレキシスやボルトケヴィッチよりも同じ英国人，エッジワースの方が重要であるかも知れない。R. A. フィッシャーがエッジワースの前述論文から分散分析法への示唆を受けたという記録はないが，影響が本当に皆無であったかどうか，今後埋めるべき分散分析の歴史の空白部分でもある。

さて，以下ではエッジワースの他の重要な先駆的研究として，有意性検定と t 分布について記しておこう。

有意性検定

観測された，たとえば2つの平均値間の差が偶然的かどうかを判断する問題は仮説検定の問題である。帰無仮説と対立仮説，2種類の過誤，検定力などの概念を用いて仮説検定論がネイマンNeyman, Jerzy (1894-　) と E. S. ピアソンによって展開されるのは1920年代後半から1930年代である。エッジワースの時代には，古典的な“確率誤差”にもとづく検定が用いられていた。正規分布の例でいえば，真値は $\bar{x}\pm0.6745s/\sqrt{n}$ の間に入るべきであるという方法である。

エッジワースは1885年6月，統計協会50周年記念大会において講演し，統計理論の主要問題を論じた。その中に有意性検定の方法がある。内容は“統計学の方法” Methods of Statistics (1885) として発表された。2つの平均値の差を δ，その modulus を c_δ とすれば，$|\delta|/c_\delta>2$ のとき差を有意とみなす検定を提唱した。$c_\delta=\sqrt{2}s_\delta$ （s_δはδの標準偏差）であるから，正規検定の場合，エッジワースのこの方法は，有意水準0.005の両側検定に他ならない。2組の人口集団の身長の差，両性の出生率の差は偶然的かどうかの検定など，人体測定学，出生・死亡・婚姻率，経済統計の分野から多数の例が挙げられている。

このエッジワースの有意性検定の方法を，ウェスターゴード Westergaard, Harald Ludvig (1853-1936) は，1932年に出版された『統計学史』の中で，次のように賞讃している。

講演会後「催された極めて短時間の討論において，エッジワースは，その論文によって何等か新しい方法をもたらしたか否かという，まことに率直な質問をうけたのである。これに対して彼は謙遜しながら，何等新しい説を立てたものとは思わないが，しかしある種の読者にとっては，新しいことがあるかも知れないと答えた。これは全くその通りであったが，要するに，彼の論文は，これ迄に統計理論の到達した諸種の結果を包括的に評論し，かつ同時に誤差の法則の今後の探究，および学者の問題となっておりながら，余り歓迎されない検証法の実際的適用に関する，いわばプログラムを示したものである。当時はまだディレタンティズムは全然姿を消したとは言えないけれども，統計理論が真の科学的基礎を得たということは，今や明白となった。」(〔31〕。漢字，仮名遣いは訂正)。

有意性検定の注目すべきもう1つの例は，データ系列がトレンドをもつか否かの検定である。“進行平均” Progressive Mean と題する1886年の論文であつかわれている。

$x_{-n},\cdots\cdots, x_{-1}, x_0, x_1,\cdots\cdots, x_n$ の $2n+1$ 個のデータ系列がある。mを一定の単位時間当たり変化率とする。このとき

$$x_t-\bar{x}=mt,\quad t=-n,\cdots\cdots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \cdots\cdots,n$$

と書くことができる（厳密に言えば $x_t=\mu+mt+\varepsilon_t$ と書くべきであろう）。

$$\sum_{t=-n}^{n}(x_t-\bar{x}-mt)^2$$

の最小化から

①
$$m=\frac{\sum_{-n}^{n}tx_t}{\sum_{-n}^{n}t^2}=\frac{\sum_{1}^{n}t(x_t-x_{-t})}{2\sum_{1}^{n}t^2}$$

が得られる。ところで

$$\sum_{-n}^{n}tx_t$$
$$=(x_1-x_{-1})+2(x_2-x_{-2})+\cdots\cdots+n(x_n-x_{-n})$$

であるから，もし x が，標準偏差 σ の正規分布より得られたトレンドをもたない unprogressive 無作為標本であるならば，$\mathrm{Var}\left(\sum_{-n}^{n}tx_t\right)=2\sigma^2\sum_{1}^{n}t^2$ となる。このとき m の標準偏差は

②
$$\frac{\sqrt{2\sigma^2\sum_{1}^{n}t^2}}{2\sum_{1}^{n}t^2}=\frac{\sigma}{\sqrt{2\sum_{1}^{n}t^2}}=\frac{\sqrt{3}\sigma}{\sqrt{n(n+1)(2n+1)}}$$

で与えられる。したがって①によって計算された m の値が，②のたとえば2倍を越えれば，トレンドがある（progress がある）という証拠になる。σ^2 は $\sum_{-n}^{n}(x_t-\bar{x})^2/(2n+1)$ によって推定できる。

これは当時の統計理論の状態を考えれば，まさに progressive な方法である。H_0：$m=0$，H_1：$m\neq 0$ を立て，H_0 が正しいという条件のもとで検定統計量の値を計算し，両側検定を行なっていることに等しい。エッジワースの検定論がネイマンや E. S. ピアソンに影響を与えたという痕跡はなく，エッジワースも一層の発展を試みなかった。しかしエッジワースの有意性検定の方法は当時としては画期的であり，方法論的には今なお正しい。

t 分布の導出

ゴセットがスチューデントのペンネームで t 分布を発見したのは1908年である。しかるに，1883年の論文"最小2乗法"において，エッジワースが逆確率の方法を用いて t 分布をすでに導出していると指摘したのはウェルチ〔30〕である。

観測された標本を，$S=(x_1,\ x_2,\cdots\cdots,x_n)$ とし，$x_i\sim N(\mu,\ \sigma)$ とすると，μ，σ 所与のときの S の p. d. f. は

$$f(S\mid\mu,\sigma)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sigma^{-n}\exp\left\{-(2\sigma^2)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}$$

となる。$g(\mu,\sigma)$ を μ，σ の事前分布とすると，標本 S とパラメータ μ，σ の結合分布は

$$h(S,\mu,\sigma)=f(S\mid\mu,\sigma)g(\mu,\sigma)$$

によって与えられる。したがって標本 S 所与のとき，μ と σ の事後分布は

$$p(\mu,\sigma\mid S)\propto h(S,\mu,\sigma)$$

の関係を用いて求めることができる。μ のみの事後分布は次式から求めればよい。

$$p(\mu \mid S)=\int_0^\infty p(\mu,\ \sigma \mid S)d\sigma$$

エッジワースは，事前分布に

$$g(\mu,\ \sigma)=C\sigma^{-2}$$

を仮定したとき，μの事後分布が

$$\begin{aligned}&p(\mu \mid S)\\&=K\left\{1+n(\bar{x}-\mu)^2\Big/\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right\}^{-(n+1)/2}\end{aligned}$$

となることを示した。$t=(\bar{x}-\mu)/(s/\sqrt{n})$，$s^2=\sum(x_i-\bar{x})^2/(n-1)$ とおけば，上式より

$$p(t \mid S)\propto\left(1+\frac{t^2}{n-1}\right)^{-(n+1)/2}$$

が得られる。これは t 分布にほかならない。

nが大のとき上式を $(n-1)^{-1}$ のベキで展開すれば

$$p(t)\propto \exp\left\{-\frac{t^2}{2}+(t^4-4t^2)/4(n-1)+\cdots\cdots\right\}$$

となる。エッジワースは $p(\mu \mid S)$ を sub-exponential distribution とよび，確率誤差を与える因子が標準正規分布と異なることに注目した。もし nが十分大きいときには，$p(t)$ の式の｛　｝の第2項以下は無視できるから，標準正規分布と $p(t)$ は同じになると述べた。

しかしながら，エッジワースはこの結果を重要視しなかった。なぜなら，もし事前分布として仮定する $g(\mu,\ \sigma)$ の型が異なれば，$p(t)$ の式の第2項 $(t^4-4t^2)/4(n-1)$ は異なってくるであろうと考えたからである。いいかえれば，エッジワースは事前分布 $g(\mu,\ \sigma)$ の型を与えるときの恣意性に気がついており，それゆえ特定の $g(\mu,\ \sigma)$ の型から得られた自らの結果を軽視した。

数学的にはエッジワースは t 分布をすでに1883年に導出していたということから，ゴセットに対して優先権を主張すべきであろうか？　そうはいえない。ゴセットの実際的な問題意識とエッジワースのそれとは根本的に異なり，方法論的にも，事前分布の仮定という恣意性をもつ逆確率の方法をゴセットは用いていない。ギネスビールの技術者ゴセットの問題意識とは小標本をあつかうことができる統計理論の構築であった。大麦，ホップのようなビール原材料の品質，温度変化のような製造条件，ビール醸造，これらの間の関係を分析するためには，大標本を用意することはできず，小標本に頼らざるを得ない。それゆえ小標本理論を確立する必要があった。この実際的要請から得られたのが1908年のスチューデントの t 分布であり，ゴセットの問題意識はほとんどの農事試験，若干の化学実験，多くの生物実験にとって共通であった。時代がまだそれを要請していないエッジワースにはゴセットの問題意識はなく，したがってエッジワースの“t 分布の発見”が小標本理論へと発展していく必然性は全くなかった。

5　おわりに

厖大なエッジワースの著作のなかには，まだ未発掘のものがあるに違いない。また，エッジワースが，1908年のスチューデントの t 分布の発見を契機に，ゴセット，R. A. フィッシャーを中心として急速に展開する小標本理論，統計的推測理論をどのように考え，どのような立場を堅持したかについての解明が残されている。

しかし，なぜエッジワースのように独創的かつ多産的で，優れた業績を残した人が，統計学の発展に小さな貢献しかしていないかのように評価されてきたのであろうか？

エッジワースが種子を播き，耕やそうとした土壌は，当時主流であった生物統計ではなく，経済統計であった。そのため，ゴルトン→K. ピアソン→R. A. フィッシャーの流れのみが強調され，エッジワースの統計学上の業績に余り注意が払われなかったのかも知れない。その上，K. ピアソンや R. A. フィッシャーは彼等の着想，研究方向，分析方法に関してエッジワースに非常に多くを負っていながら，そのことに余り触れず，公正なエッジワース評価をしなかった。エッジワースが経済統計ではなく，生物統計の耕地を鋤き起こしたとすれば全く違った評価になったであろう。しかし生物学は彼の関心事ではなかった。

エッジワースはいつも謙譲で，控え目であり，“エッジワース統計学派”を形成することもなく，彼の統計学を継承する学徒を持とうともしなかった。また，彼は，彼が前進させた数多くの成果を“宣伝”しようともしなかった。

エッジワースの文章には古典からの引用，外国語の単語，エッジワース自身の造語がよく現われ，数学的詳細は省略されることが多かった。このような文体が読者を当惑させたことも，エッジワース論文から人を遠去けた一因であるかも知れない。

エッジワースは自らの方法を純逆確率法 genuine inverse method とよび，実際，逆確率を用いた分析も多かったために，人はエッジワースに逆確率信奉者のレッテルを貼り，真剣にエッジワースの研究業績を検討しなかった。

また，エッジワースは自らの研究成果を踏まえて，統計学の体系書を作り，“エッジワース統計学”の全貌を明瞭な言葉で示そうともしなかった。「体系書だの結婚だのといった大規模な事業は，一度も自分の心を引いたことがない」(ケインズ〔20〕) というのがエッジワースの答えであった。

しかしながら，漸やく，死後半世紀以上を経過した今日，不遇の統計学者エッジワースの業績が仔細に考証され，相応の頌辞をもって遇すべく，時代は変化しつつあるように思われる。それは孤独な鋤で，生物統計学の耕地から遠く離れて，塊然と経済統計学の耕地を耕やしていたエッジワース個人の統計学者としての復権を意味するばかりでなく，記述統計学の時代として区分されてきた

19世紀後半から20世紀初頭を見直し，統計理論の歴史的連続性の認識にも繋がる作業となるであろう。推測統計学の扉の前に立っていたのではなく，エッジワースは自ら扉を開けようとしていた。

〔数学注〕

$X_1, \cdots\cdots, X_n$ は p. d. f. $f(x-\theta)$ をもつ分布からの無作為標本とする。ここでθは位置パラメータであり，$-\infty<\theta<\infty$とする。このとき対数尤度関数は

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i-\theta)$$
$$= -\sum_{i=1}^{n} \mu(x_i-\theta)$$

となる。ここで $\mu(x)=-\ln f(x)$ である。そして

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{f'(x_i-\theta)}{f(x_i-\theta)} = \sum_{i=1}^{n} k(x_i-\theta)$$

と書くことができる。ここで

$$k(x) = -\frac{f'}{f} = \mu'(x)$$

である。したがって $d \ln L(\theta)/d\theta=0$ の解，すなわち，

$$\sum_{i=1}^{n} k(x_i-\theta)=0$$

の解は最尤推定量 maximum likelihood estimator を与える。頭文字mをとって，この解はしばしばM-推定量ともよばれる。

〔参考文献〕

〔1〕Bonar, J. (1926). Memories of F. Y. Edgeworth. *Economic Journal*, Vol. 36, 647–653.

〔2〕Bowley, A. L. (1901). *Elements of Statistics*. P. S. King & Son.

〔3〕—— (1928). *F. Y. Edgeworth's Contribution to Mathematical Statistics*. Royal Statistical Society. (Reprinted 1972 by Augustus M. Kelley Publishers).

〔4〕—— (1934). Francis Ysidro Edgeworth. *Econometrica*, Vol. 2, 113–124.

〔5〕Edgeworth, F. Y. (1883). The Method of Least Squares. *Philosophical Magazine* (Fifth Series) Vol. 16, 360–375.

〔6〕—— (1886). Progressive Means. *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. 49, 469–475.

〔7〕—— (1892). Correlated Averages. *Philosophical Magazine* (Fifth Series), Vol. 34, 190–204.

〔8〕—— (1909). Addendum on "Probable Errors of Frequency-Constants". *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. 72, 81–90.

〔9〕—— (1916–1917). On the Mathematical Representation of Statistical Data. *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. 79, 455–500, Vol. 80, 65–83, 266–288, 411–437.

〔10〕 —— (1925). The Plurality of Index-Numbers. *Papers Relating to Political Economy*, Vol. 2, Royal Economic Society に所収。

〔11〕 ——(1925). Applications of Probabilities to Economics. *Papers Relating to Political Economy*, Vol. 2. Royal Economic Society に所収。

〔12〕 ——(1925). Measurement of Change in Value of Money. Third Memorandum, Variorum Notes on Index-Numbers. Pierson on Scarcity of Gold. A Defence of Index-Numbers. いずれも *Papers Relating to Political Economy*, Vol. 2, Royal Economic Society に所収。

〔13〕 Edwards, A. W. F. (1972). *Likelihood.* Cambridge University Press.

〔14〕 Fisher, R. A. (1959). *Statistical Methods and Scientific Inference.* Oliver and Boyd Limited. 渋谷政昭，竹内啓訳『統計的方法と科学的推論』，岩波書店，1962.

〔15〕 Hildreth, C. (1978). Edgeworth, Francis Ysidro. *International Encyclopedia of Statistics.* The Free Press.

〔16〕 Irwin, J. O. (1978). Gosset, William Sealy. *International Encyclopedia of Statistics.* The Free Press.

〔17〕 Jevons, W. S. (1871). *The Theory of Political Economy.* 小泉信三，寺尾琢磨，永田清訳，寺尾琢磨改訳，『経済学の理論』，近代経済学古典選集 4，日本経済評論社，昭和56年。

〔18〕 Kendall, M. G. (1968). Francis Ysidro Edgeworth, 1845–1926. *Biometrika*, Vol. 55, 269–275. Pearson, E. S. & M. G. Kendall eds. *Studies in the History of Statistics and Probability*, Vol. 1. Charles Griffin & Company Limited, 1970 に所収。

〔19〕 —— (1978). The History of Statistical Method. *International Encyclopedia of Statistics.* The Free Press.

〔20〕 Keynes, J. M. (1926). Francis Ysidro Edgeworth: 1845–1926. *Economic Journal*, Vol. 36, 140–153. 大野明男訳「フランシス・イシドロ・エッジワース (1845–1926)」，『人物評伝』，ケインズ全集第10巻，東洋経済新報社，1980に所収。

〔21〕 Mackenzie, D. A. (1981). *Statistics in Britain* 1865–1930. Edinburgh University Press.

〔22〕 Patrick, P. J. F. (1960). Leading British Statisticians of the Nineteenth Century. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 55, 38–70.

〔23〕 Pearson, K. (1920). Notes on the History of Correlation. *Biometrika*, Vol. 13, 25–45. Pearson, E. S. & M. G. Kendall eds. *Studies in the History of Statistics and Probability*, Vol. 1. Charles Griffin & Company Ltd. 1970 に所収。

〔24〕 Pearson, E. S. (1967). Some Reflexions on Continuity in the Development of Mathematical Statistics, 1885–1920. *Biometrika*, Vol. 54, 341–355. Pearson, E. S. & M. G. Kendall eds. *Studies in the History of Statistics and Probability*, Vol. 1. Charles Griffin & Company Ltd., 1970 に所収。

〔25〕 Pratt, J. W. (1976). F. Y. Edgeworth and R. A. Fisher on the Efficiency of Maximum Likelihood Estimation. *The Annals of Statistics*, Vol. 4, 501–514.

〔26〕 Price, L. L. (1926). Francis Ysidro Edgeworth. *Journal of the Royal Statistical Society*, Vol. 89, 371–377.

〔27〕 Stanley, J. C. (1978). Analysis of Variance. *International Encyclopedia of Statistics.* The Free Press.

〔28〕 Stigler, S. M. (1978). Francis Ysidro Edgeworth, Statistician. *Journal of the Royal Statistical Society*, Series A. No. 141, 287-313.

〔29〕 寺尾琢磨 (1944). 「統計学者としての W. S. ジェヴォンス」, 『三田学会雑誌』, 第38巻第1号, 1-7.

〔30〕 Welch, B. L. (1958). 'Student' and Small Sample Theory. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 53, 777-788.

〔31〕 Westergaard, H. (1932). *Contribution to the History of Statistics*. P. S. King & Son Ltd. 森谷喜一郎訳『統計学史』, 栗田書店, 1943.

〔32〕 山田勇 (1951). 「エッジワース」. 『統計学辞典』増補版, 東洋経済新報社, 1979.

(経済学部助教授)