分権的情報ならびに物々交換制度の下における均衡配分の達成不可能性定理について

福　岡　正　夫

1　前稿[(1)]において考察したオストロイおよびスターの定理は，一つには集権的情報が利用可能な場合に，双方取引をつうじて競争均衡配分を達成する取引ルールが存在することを，またもう一つには貨幣的交換制度の下にあっては，情報が分権化される場合にも，同様な結論が成立することを明らかにしている。前者は，物々交換経済での均衡配分の完全充足のためには，むしろ複雑な手続きが用いられうることを主張するものであるが，いうまでもなくこれは当該の取引ルールが所期の目的達成のために十分であることを示したにとどまるのであって，いまだそれが必要であることを示したものではない。もう一つの定理に謳われている貨幣の交換媒体機能に関する認識を深める上では，さらに一歩を進めて，上記の取引ルールが必要でもあること，換言すれば，物々交換制度の下で分権的情報しか利用できない場合には，一般に1ラウンド内での超過需要の完全充足は不可能であることを示すのが望ましいであろう。以下本稿でとり上げるところは問題のこの側面であり，それはいわば前稿の可能性定理に対して，一種の不可能性定理をとり扱うものということができよう。

2　本稿の読者のために，前稿で用いた記号と仮定，ならびにモデルの概略を要約しておくならば，つぎのとおりである。まず n 種の財の集合を $N=\{1, 2, \cdots\cdots, n\}$，$m$人の取引主体の集合を $M=\{1, 2, \cdots\cdots, m\}$ で示し（ここで $n<m$），取引はつねに双方取引すなわち2人ずつのグループの同時的会合の系列をつうじて行なわれるものとする。同一期間内では同じ主体はただ一つのペアにのみ所属でき，同一のペアは交換過程をつうじてただ一度しか会合しないものとして，これらの条件を満たす最小の期間数を T であらわし，$t=1, 2, \cdots\cdots, T$にわたる会合の系列を1ラウンドと呼ぶ。正の価格ベクトル $p=(p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n)$，$p$ の下での各主体の超過需要ベクトル $z_r=[z_{1r}, z_{2r}, \cdots\cdots, z_{nr}]$ $(r=1, 2, \cdots\cdots, m)$，各主体の初期保有量ベクトル $\bar{x}_r=[\bar{x}_{1r}, \bar{x}_{2r}, \cdots\cdots, \bar{x}_{nr}]$ $(r=1, 2, \cdots\cdots, m)$ は所与であり，これらは当初からつぎの仮定を満たしている。

$$(\mathrm{U})\quad (1)\sum_{r=1}^{m} z_r=0,\ (2)\ pz_r=0,\ \text{all } r\in M,\ (3)\ -z_r\leqq\bar{x}_r,\ \text{all } r\in M$$

注(1)「交換媒体としての貨幣と取引過程の分権化」，『三田学会雑誌』1981年6月号。

また t 期の取引に先立つ各主体の財保有量ベクトルは $w_r^t=[w_{1r}^t,\ w_{2r}^t,\ \cdots\cdots,\ w_{nr}^t]$ で，その期の純取引量ベクトルは $a_r^t=[a_{1r}^t,\ a_{2r}^t,\ \cdots\cdots,\ a_{nr}^t]$ で示し，a_r^tの正の成分は当該の財の受け取りを，負の成分はその引き渡しをあらわすものとする。t 期の取引は明らかにつぎの条件を満たすものでなくてはならない。

(A)　(1) $a_r^t=-a_s^t$, (2) $pa_r^t=pa_s^t=0$,　(3) $w_r^t+a_r^t\geqq 0$; $w_s^t+a_s^t\geqq 0$

以上の想定から，どの r，t についても $w_r^{t+1}=w_r^t+a_r^t$，ただし $w_r^1=\bar{x}_r$，が成り立ち，さらに t 期首における未充足超過需要ベクトルを $v_r^t=[v_{1r}^t,\ v_{2r}^t,\ \cdots\cdots,\ v_{nr}^t]$ とすれば，$v_r^t=z_r-(w_r^t-\bar{x}_r)=z_r-\sum_{\tau=1}^{t-1}a_r^\tau$ が成り立つことはいうまでもない。各主体にとってある t について$v_r^t=0$ となるときに取引の目的は達成されるわけであるが，いま前記の1ラウンドですべての主体にとって所期の目的が成就されること，すなわち

(E)　$\sum_{t=1}^{T}a_r^t=z_r$,　all $r\in M$

となることをもって，超過需要の1ラウンド内での完全充足 (Full Execution Within One Round) と呼べば，そのような充足条件を満たす取引ルールの存在，不存在が分析の対象となる。

t 期に会合する交換ペアの組は主体の集合 $M=\{1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m\}$ の置換 $\pi^t(r)=s$ によってあらわされるが，このさい r，s が利用できる情報を L_{rs}^tで示せば，取引ルールは L_{rs}^tの集合を定義域とし，2人の取引量の集合を値域とする関数 $(a_r^t,\ a_s^t)=\rho(L_{rs}^t)$ であると定義することができる。いま各主体の t 期の環境を $\mathscr{I}_*^r(t)=(v_r^t,\ w_r^t,\ N,\ \pi^t(r),\ p)$ であらわすとき，

(D*)　$L_{rs}^t=\mathscr{I}_*^r(t)\times\mathscr{I}_*^s(t)$

となることをもって，もっとも分権的な情報が利用可能であることの定義とすれば，取引ルールはその定義域が (D*) を満たす場合に，もっとも情報分権的な取引ルールである。

本稿でわれわれが興味を寄せるのは，間接的な物々交換制度の下にあって，しかも利用できる情報が (D*) タイプのものに限られている場合，果たして (A) および (E) をともに満たすような取引ルールが存在するかという問題であり，この問いに否定的に答えることが以下の所論の目的となっているのである。

3　この問題はオストロイ＝スターによって始めて提起され，考察されたところであるが[(2)]，遺憾なことに彼らの定理はその推論過程において重要なスリップを含んでおり，主張を完うしていると

注(2) J. M. Ostroy and R. M. Starr, "Money and the Decentralization of Exchange", *Econometrica*, November 1974, p. 1098 の Theorem 2。その証明については pp. 1105–1108, またその推論がもとづくProposition 2-5 の証明については pp. 1112–1113 の Appendix 参照。

は思われない[3]。そこで本稿ではとりあえず彼らとは別個の途を辿り，取引ルールの匿名性の仮定を付加して新たな証明を試みたブラッドレーの推論[4]にもとづきつつ，それを敷衍補強することをつうじて問題の解決を図ることにしたい。ここで取引ルールが匿名的であるとは，すべての t および r，s について

(N)

(1) $(v_s^t,\ w_s^t)=(v_q^t,\ w_q^t)$ とするとき

$$\rho(L_{rs}^t) = \rho(L_{rq}^t)$$

(2) $\bar{\pi}$を財の置換として，$q=r$，s について $\tilde{v}_{iq}^t=v_{\bar{\pi}(t)q}^t$，$\tilde{w}_{iq}^t=w_{\bar{\pi}(t)q}^t$，そして$\tilde{p}_i=p_{\bar{\pi}(t)}$ とするとき，L_{rs}^t の v_r^t，w_r^t，v_s^t，w_s^t，p を $\tilde{v}_r^t$，$\tilde{w}^t$，$\tilde{v}_s^t$，$\tilde{w}_s^t$，$\tilde{p}$ に置き換えた情報 $\tilde{L}_{rs}^t$ について

$$\rho(\tilde{L}_{rs}^t) = (\tilde{a}_s^t,\ \tilde{a}_s^t)$$

ただし $\tilde{a}_{ir}^t=a_{\bar{\pi}(i)r}^t$，$\tilde{a}_{is}^t=a_{\bar{\pi}(t)s}^t$

の二つの条件が成り立つことをいう。(N) の (1) は取引相手が異なる名前の個人になっても，その超過需要量や財保有量の数値が同一でありさえすれば，同一の取引量が決定されることを意味しており，(2) は財の名前をつけ換えても，超過需要量，保有量ならびに価格の数値が同じであれば，やはり同一の取引量が決定されることを意味している。本稿では一貫して，特定の主体がブローカーとして機能したり，特定の財が貨幣として機能したりすることを 仮定しないから，(N) の (1) (2) の援用には格別の不都合は生じないであろう。

ところで財の数や主体の数が少ない場合には，情報が (D*) に限定されても，(A) および (E) を満たす取引が存在することは，容易に推測される。したがって標記の不可能性定理を定式化するにあたっては，われわれはそれが成立しうる「もっとも小さい」事例を確定することが必要である。以下においてわれわれはまずオストロイ＝スターに負うつぎの取引ルール (T_γ) を設定し， それ

注(3) オストロイ＝スターは前掲論文 pp. 1104–1105 の Lemma 4 の証明において，一つには彼らの取引ルール γ が命題 $(v_{ir}^t-a_{ir}^t)$ $(v_{is}^t-a_{is}^t)$ ≧0 の必要かつ十分条件であることを主張している。しかし取引ルール γ が満たされているときに後者の命題が成り立つことは自明であるが，逆に後者の命題が成り立つからといって，取引ルールが γ でなくてはならない必然性はない。この点は，γ 以外のルールの下で $(v_{ir}^t-a_{ir}^t)$ $(v_{is}^t-a_{is}^t)$ ≧0が成り立つ事例を容易に見出しうるところから明らかであろう。ところがオストロイ＝スターの推論は，第1期に取引主体 1，2 のペアについてルール γ が満たされないと $(v_{i1}^1-a_{i1}^1)$ $(v_{i2}^1-a_{i2}^1)$ ≧0 が満たされないという命題に立脚しているから，もし上記のわれわれの主張が正しいとすれば，彼らの推論は端的に誤謬である。

またもう一つには，かりに彼らのこの命題が正しいものとしても，(a) $v_{i1}^1-a_{i1}^1>0$，$v_{i2}^1-a_{i2}^1<0$ の場合の彼らの推論は帰結を導くが，(b) $v_{i1}^1-a_{i1}^1<0$，$v_{i2}^1-a_{i2}^1>0$ の場合のそれは同様には運ばない。したがって "Supposing(b), a similar conclusion follows" というのは適切でない。

そこでこれら二つの理由で Lemma 4 が成立しないとすれば，それに依拠している Proposition 2 と，さらに後者に依拠している Proposition 5 は成立しないことになり，したがって Theorem 2 はその基礎を失う。

(4) G. H. Bradley, "Trading Rules for a Decentralized Exchange Economy", in S. E. Elmaghrabig ed., *Symposium on the Theory of Scheduling and its Applications*, 1973.

を利用することによって，$z_{ir} \neq 0$ の財が2財の事例，また同じく $z_{ir} \neq 0$ の取引主体が2人および3人の事例については，かならず (A)(D*)(N) および (E) のすべてを満足する取引ルールが存在しうることを証明するであろう。

$$\gamma(L^t_{rs}) = (a^t_r,\ a^t_s) = (b^t_r + y^t_r,\ b^t_s + y^t_s)$$

$$(\mathrm{T}_\gamma) \quad \text{(i)} \quad b^t_{ir} = -b^t_{is} = \begin{cases} 0 & \text{for } v^t_{ir}\ v^t_{is} \geqq 0 \\ \min\,(|v^t_{ir}|,\ |v^t_{is}|) & \text{for } v^t_{ir} > 0,\ v^t_{is} < 0 \\ -\min\,(|v^t_{ir}|,\ |v^t_{is}|) & \text{for } v^t_{ir} < 0,\ v^t_{is} > 0 \end{cases}$$

$$\text{(ii)} \quad y^t_{ir} = -y^t_{is} \quad \begin{cases} pb^t_r > 0 \Rightarrow [v^t_r - b^t_r]^- \leqq y^t_r \leqq 0 \ \text{ かつ } \ p(b^t_r + y^t_r) = 0 \\ pb^t_s > 0 \Rightarrow [v^t_s - b^t_s]^- \leqq y^t_s \leqq 0 \ \text{ かつ } \ p(b^t_s + y^t_s) = 0 \end{cases}$$

このルールが意味するところは一目瞭然であるが，要するに (i) はどの取引主体もその超過需要の符号を変えない限度でできうるかぎりそれを減らすように取引することをあらわしている。また(ii)はその結果，等価条件が満たされず，たとえば $pb^t_r > 0$ となっている場合には，いまだ超過供給状態にある財の組合わせを適当に選んで，差額分を補填することをあらわしている。このルールは前稿の貨幣的取引ルール (T_μ) に類似しているが，(T_μ) ではもっぱら貨幣財を用いて等価条件が充足されたのに対して，(T_γ) では任意の財の組合わせがその用途に当てられていることに注目すべきである。

ルール (T_γ) が (D*) を満たすこと，また (N) を満たすことは自明であるから[5]，つぎにそれが一般に (A) をも満たすことを補助定理の形で証明しておこう。

補助定理 1 (U) を満たすすべての $(p,\ Z,\ \overline{X})$ およびすべての $\{\pi^t\}$，$t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T$ に対して，(T_γ) は (A) を満たす。

証　明

(T_γ) のつくり方から，それが (A) の (1)，(2) を満たすことは自明。したがって以下ではもっぱら (A) の (3) を満たすことを示す。

注(5) より厳密にいえば，ルール (T_γ) は (ii) を満たす y_r，y_s がかならずしも一意的には定まらないところから，多価関数ないしは対応の形をとっており，したがって関数 γ は元来その選択子と解すべきものである。一般に対称的な対応の選択子が対称的な関数になる保証はないが，いまの場合は(ii)によって定義される対応 Y_r，Y_s が凸値であるところから，γ はかならず対称的な関数となり，したがって財についての匿名性の仮定を満たすことになる。この点については R. Miura, "A Trading Rule and its Anonymity Property" (Unpublished) に負う。

まず $t=1$ について $w_{ir}^1+a_{ir}^1\geqq 0$ となることを，$v_{ir}^1\geqq 0$ の場合と $v_{ir}^1<0$ の場合に分けて示すことにしよう。

$v_{ir}^1\geqq 0$ の場合は，もし $v_{is}^1\geqq 0$ なら(T_7)の(i)から $b_{ir}^1=0$。ゆえに $v_{ir}^1-b_{ir}^1\geqq 0$ となり，したがって $pb_r^1>0$ なら (ii) の$[v_{ir}^1-b_{ir}^1]^-\leqq y_{ir}^1\leqq 0$ の条件から $y_{ir}^1=0$。よって $a_{ir}^1=0$ すなわち $w_{ir}^1+a_{ir}^1=w_{ir}^1\geqq 0$ となる。また $pb_r^1=0$ なら，いうまでもなく $y_{ir}^1=0$ であるから，やはり同様の帰結を得る。そこで残った $pb_r^1<0$ の場合であるが，この場合は $pb_s^1>0$ となるから $[v_{is}^1-b_{is}^1]^-\leqq y_{is}^1\leqq 0$, $v_{is}^1-b_{is}^1\geqq 0$ $(\because v_{is}^1\geqq 0,\ b_{is}^1=-b_{ir}^1=0)$ の条件から，$y_{is}^1=0$。ゆえにふたたび $y_{ir}^1=-y_{is}^1=0$ となり，前二つの場合と同様の帰結が成立する。他方 $v_{is}^1<0$ であっても，$v_{ir}^1=0$ なら，やはり(i)から $b_{ir}^1=0$ となり，$pb_r^1\geqq 0$ の場合には前とまったく同様の推論をつうじて $w_{ir}^1+a_{ir}^1\geqq 0$ となる。$pb_r^1<0$ すなわち $pb_s^1>0$ の場合は (ii) の条件から $y_{is}^1\leqq 0$ となるから，$y_{ir}^1=-y_{is}^1\geqq 0$。ゆえに $b_{ir}^1=0$ と相俟って $a_{ir}^1\geqq 0$ となり，$w_{ir}^1+a_{ir}^1\geqq 0$ を得る。最後に $v_{ir}^1>0$, $v_{is}^1<0$ の場合には，(i)から $b_{ir}^1=-b_{is}^1=\min\ (|v_{ir}^1|,\ |v_{is}^1|)>0$。そして当然 $v_{ir}^1-\min\ (|v_{ir}^1|,\ |v_{is}^1|)\ \geqq 0$ であるから，$v_{ir}^1-b_{ir}^1\geqq 0$。よって $pb_r^1>0$ なら (ii) から $y_{ir}^1=0$ となり，$a_{ir}^1=b_{ir}^1=\min\ (|v_{ir}^1|,\ |v_{is}^1|)\geqq\ v_{ir}^1$。ところが $v_{ir}^1=z_{ir}$ であり，また (U) の (3) から $z_{ir}\geqq-\bar{x}_{ir}=-w_{ir}^1$ であるから，結局 $a_{ir}^1\geqq-w_{ir}^1$ すなわち $w_{ir}^1+a_{ir}^1\geqq 0$ を得る。$pb_r^1=0$ なら，$y_{ir}^1=0$ で，$a_{ir}^1=b_{ir}^1$。そして目下の場合 $b_{ir}^1>0$ であるから，結論の成立は明らか。最後に $pb_r^1<0$ すなわち $pb_s^1>0$ なら (ii) から $y_{ir}^1=-y_{is}^1\geqq 0$ となり，$b_{ir}^1>0$ と併せて，やはり結論の成立は明らかである。

$v_{ir}^1<0$ の場合についても，$v_{is}^1\leqq 0$, $v_{is}^1>0$ のそれぞれにケースを分けて，ほぼ同様の推論を mutatis mutandis に適用すればよい。

こうして $t=1$ については $w_{ir}^1+a_{ir}^1\geqq 0$ となることが知られたから，つぎにこの帰結にもとづいて $t=2$ についても $w_{ir}^2+a_{ir}^2\geqq 0$ が成り立つことを示す。

ここでも $v_{ir}^2\geqq 0$ 場合と $v_{ir}^2<0$ の場合を分けてとり扱わねばならないが，まず $v_{ir}^2\geqq 0$ の場合は，もし $v_{is}^2\geqq 0$ なら $b_{ir}^2=0$, もし $v_{is}^2<0$ なら $b_{ir}^2>0$ で，いずれにせよ $b_{ir}^2\geqq 0$ となり，また $v_{ir}^2-b_{ir}^2\geqq 0$ となるから，前と同様の推論にもとづいて $y_{ir}^2=0$ を得る。ゆえに $a_{ir}^2=b_{ir}^2\geqq 0$ となるが，他方前段で証明したところにより $w_{ir}^2=w_{ir}^1+a_{ir}^1\geqq 0$ であるから，$w_{ir}^2+a_{ir}^2\geqq 0$ が得られる。

つぎに $v_{ir}^2<0$ の場合は，$v_{is}^2\leqq 0$, $v_{is}^2>0$ のいずれのケースについても，前段と類似の推論を適用することによって $v_{ir}^2\leqq a_{ir}^2$ となることを証明することができる。すると定義から $v_{ir}^2=v_{ir}^1-a_{ir}^1$ なのであるから，これと $v_{ir}^2\leqq a_{ir}^2$ とから $v_{ir}^1\leqq\ a_{ir}^1+a_{ir}^2$ が導かれ，ここで $v_{ir}^1=z_{ir}$ であることから，$\bar{x}_{ir}+z_{ir}\leqq\bar{x}_{ir}+a_{ir}^1+a_{ir}^2$ が導かれる。ところが (U) の (3) によって $\bar{x}_{ir}+z_{ir}\geqq 0$ であり，他方 $\bar{x}_{ir}+a_{ir}^1=w_{ir}^1+a_{ir}^1=w_{ir}^2$ であるから，以上をとりまとめて $w_{ir}^2+a_{ir}^2\geqq 0$ が得られたことになる。

以上で任意の i，r について $w_{ir}^1+a_{ir}^1\geqq 0$ となること，また $w_{ir}^1+a_{ir}^1\geqq 0$ ならば $w_{ir}^2+a_{ir}^2\geqq 0$ と

なることが示された。ゆえに，あとは同じ議論を recursive に繰り返せば，すべての t について $w_{ir}^{t}+a_{ir}^{t}\geqq 0$ となることは明らかであろう。

この補助定理によって，条件（A）についていうかぎりは，一般に主体の数mおよび財の数nにかかわりなく，これを満足する分権的な取引ルールの存在することが知られたわけである。

他方，条件（E）については，そのようなわけにはいかないが，すでに言及した非ゼロの超過需要の財が2財の事例（主体の数は任意）と非ゼロの超過需要の主体が2人ならびに3人の事例（財の数は任意）については，同じく（T_τ）が（E）を満たすことを示すことができる。われわれは以下二つの補助定理の形で，このことを証明する。

そのためにいま

$$\tilde{M}=\{r\in M|z_{ir}\neq 0 \text{ for some } i\in N\}$$

$$\tilde{N}=\{i\in N|z_{ir}\neq 0 \text{ for some } r\in M\}$$

と定義すれば，まず

補助定理2　$\#\tilde{N}=2$ のとき，(U) を満たすすべての (p, Z, $\overline{X}$) およびすべての $\{\pi^t\}$, $t=1, 2, \cdots\cdots, T$ に対して，（T_τ）は（E）を満たす。

証　明

一般性を失うことなく $\tilde{N}=\{1, 2\}$ とすれば，補助定理1の帰結と条件（U）の（2）から

$$(1)\qquad \begin{aligned} &p_1v_{1r}^t+p_2v_{2r}^t=0\\ &p_1v_{1s}^t+p_2v_{2s}^t=0\end{aligned}$$

が成り立つから，

$$(2)\qquad v_{1r}^t=\left(-\frac{p_2}{p_1}\right)v_{2r}^t,\quad v_{1s}^t=\left(-\frac{p_2}{p_1}\right)v_{2s}^t$$

となり，したがって

$$(3)\qquad \begin{aligned} &|v_{1r}^t|>|v_{1s}^t| \text{ なら } |v_{2r}^t|>|v_{2s}^t|\\ &|v_{1r}^t|<|v_{1s}^t| \text{ なら } |v_{2r}^t|<|v_{2s}^t|\\ &|v_{1r}^t|=|v_{2s}^t| \text{ なら } |v_{2r}^t|=|v_{2s}^t|\end{aligned}$$

となることがただちに分かる。また (1) から

(4)
$$v_{1r}^t>0,\ v_{1s}^t<0 \text{ なら } v_{2r}^t<0,\ v_{2s}^t>0$$
$$v_{1r}^t<0,\ v_{1s}^t>0 \text{ なら } v_{2r}^t>0,\ v_{2s}^t<0$$

となることはいうまでもない。そこで (T_r) の (i) によって b_{ir}^t, b_{is}^t ($i=1,\ 2$) を定め，(3), (4) を考慮すれば

(5) $$\sum_{i=1}^{2} p_i b_{ir}^t=0 \text{ および } \sum_{i=1}^{2} p_i b_{is}^t=0$$

となり，ゆえに (T_r) のつくり方から

(6) $$y_{ir}^t=-y_{is}^t=0 \quad (i=1,\ 2)$$

すなわち

(7) $$b_{ir}^t=a_{ir}^t,\ b_{is}^t=a_{is}^t \quad (i=1,\ 2)$$

となる。これは $\#\tilde{N}=2$ であるときには，b_{ir}^t の正負の符号が逆転することはありえず，その大きさが絶対値において単調に減少することを意味している。

さてここで結論に反して，$v_{ir}^{T+1}\neq 0$ となるような i, r があったとしよう。いま $v_{ir}^{T+1}>0$ とすれば ($v_{ir}^{T+1}<0$ としても推論は同じ)，自明の理由からかならず $v_{is}^{T+1}<0$ となる $s\neq r$ があり，その s は $t=1,2,\ \cdots\cdots,\ T$ のどこかの t でかならず1回だけ r と会っている。そのとき，もし $|v_{is}^t|<|v_{ir}^t|$ であれば，$v_{is}^t>0$, $v_{is}^t<0$ のいずれであっても，かならず $v_{is}^{t+1}=v_{is}^t-a_{is}^t=0$ となり，したがって前のパラグラフの結論から $v_{is}^{T+1}=0$ となるから，仮定の $v_{ir}^{T+1}>0$ と矛盾する。他方 $|v_{is}^t|\geqq|v_{ir}^t|$ であれば，同様の理由でこんどは $v_{ir}^{t+1}=0$ となるから，$v_{ir}^{T+1}=0$ となって，やはり仮定と相反する。

よってすべての i, r について $v_{ir}^{T+1}=0$ が成り立つのでなくてはならない。

補助定理 3　$\#\widetilde{M}=2$ あるいは3のとき，(U) を満たすすべての (p, Z, $\overline{X}$) およびすべての $\{\pi^t\}$, $t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T$ に対して，(T_r) は (E) を満たす。

証　明

$\#\widetilde{M}=2$ のときは，$\widetilde{M}=(1,\ 2)$, $\pi^{t_1}(1)=2$ とすれば，(U) の (1) から $z_1=-z_2$ であるから，すべての i について

(8)　　$v_{i1}^{t}=-v_{i2}^{t},\ t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ t_1$

が成り立つ。ゆえに t_1 での取引に (T_r) を適用すれば

(9)　　$b_{i1}^{t_1}=-b_{i2}^{t_1}=z_{i1}=-z_{i2}$

となり，他方 (U) の (2) によって $pz_1=0$，$pz_2=0$ であるから，それと (9) から $pb_1^{t_1}=0$，$pb_2^{t_1}=0$ となる。したがって $y_1^{t_1}$，$y_2^{t_1}$の成分はすべてゼロ，すなわち $a_r^{t_1}=b_r^{t_1}$ $(r=1,\ 2)$ となり，以上の結果と併せて $v_r^{t_1+1}=v_r^{t_1}-a_r^{t_1}=z_r-z_r=0$ $(r=1,\ 2)$ を得る。

つぎに $\#\widetilde{M}=3$ のときは，同様に $\widetilde{M}=(1,\ 2,\ 3)$，$\pi^{t_1}(1)=2$，$\pi^{t_2}(1)=3$，$\pi^{t_3}(2)=3$，$t_1<t_2<t_3$ として (i) $v_1^{t_2+1}=0$，(ii) $v_2^{t_3+1}=v_3^{t_3+1}=0$となることを示す。(6)

(i)帰謬法によるとして，$v_1^{t_2+1}\neq 0$ であったとすれば，$t_3\geqq t_2+1$ においても $v_{i1}^{t_3}\neq 0$ となる財 i がかならず見出される。そこでいま一般性を失うことなく $v_{i1}^{t_3}>0$ と仮定すれば，(T_r) のつくり方から t_1，$t_2<t_3$ においても

(10)　　$v_{i1}^{t_1}>0,\ v_{i1}^{t_2}>0,\ a_{i1}^{t_1}\geqq 0,\ a_{i1}^{t_2}\geqq 0$

となり，また

(11)　　$v_{i1}^{t_1}-a_{i1}^{t_1}>0,\ v_{i1}^{t_2}-a_{i1}^{t_2}>0$

となるのでなくてはならない。(7)

さてこれらの帰結にもとづき，$t=t_1$ において，もし $v_{i2}^{t_1}\geqq 0$ であれば $b_{i1}^{t_1}=0$ となり，また $v_{i2}^{t_1}$

注(6)　以下の議論については浜田裕一郎「分権的交換過程と支払手段としての貨幣」，『三田学会雑誌』1977年2月号，pp. 92-93に負う。

(7)　$v_{i1}^{t_s}=v_{i1}^{t_s-1}-a_{i1}^{t_s-1}=v_{i1}^{t_s-1}-(b_{i1}^{t_s-1}+y_{i1}^{t_s-1})$ であるから，$v_{i1}^{t_s}>0$ なら

$$v_{i1}^{t_s-1}-b_{i1}^{t_s-1}>y_{i1}^{t_s-1}$$

となる。ここでもし $pb_1^{t_s-1}>0$ なら，$[v_{i1}^{t_s-1}-b_{i1}^{t_s-1}]^-\leqq y_{i1}^{t_s-1}\leqq 0$ が用いられるから，$v_{i1}^{t_s-1}-b_{i1}^{t_s-1}>0$ のときは $y_{i1}^{t_s-1}=0$ となるが，$v_{i1}^{t_s-1}-b_{i1}^{t_s-1}\leqq 0$ のときは $v_{i1}^{t_s-1}-b_{i1}^{t_s-1}\leqq y_{i1}^{t_s-1}$ となって，上の不等式に矛盾する。また $pb_1^{t_s-1}=0$ なら，いうまでもなく $y_{i1}^{t_s-1}=0$，$pb_1^{t_s-1}<0$ なら，$y_{i1}^{t_s-1}\geqq 0$ となるから，以上を総合して，上の不等式から $v_{i1}^{t_s-1}-b_{i1}^{t_s-1}>0$ を得る。

するとこの帰結にもとづき，$v_{i1}^{t_s-1}>0$ となることがいえる。事実もし $v_{i1}^{t_s-1}=0$であれば　$b_{i1}^{t_s-1}=0$　となるから，$v_{i1}^{t_s-1}-b_{i1}^{t_s-1}=v_{i1}^{t_s-1}>0$ となって矛盾。また $v_{i1}^{t_s-1}<0$ であれば，$\pi^{t_s-1}(1)=s$ として，$v_{is}^{t_s-1}\leqq 0$ ならふたたび $b_{i1}^{t_s-1}=0$ となって矛盾，他方 $v_{is}^{t_s-1}>0$ なら $b_{i1}^{t_s-1}=-\min\ (|v_{i1}^{t_s-1}|,\ |v_{is}^{t_s-1}|)$ すなわち $v_{i1}^{t_s-1}-b_{i1}^{t_s-1}\leqq 0$ となって，やはり矛盾が出る。

これで $v_{i1}^{t_s}>0$ なら $v_{i1}^{t_s-1}>0$ となることが分かり，以下同じ推論を繰り返していくことによって，t_1，$t_s<t_s$ について $v_{i1}^{t_s}>0$，$v_{i1}^{t_1}>0$ が成り立つことになる。

ところで $v_{i1}^{t_s}>0$ なら (T_r) から $b_{i1}^{t_s}\geqq 0$ となることは自明，また前の前のパラグラフで見たように $y_{i1}^{t_s}\geqq 0$となるから，$a_{i1}^{t_2}=b_{i1}^{t_2}+y_{i1}^{t_2}\geqq 0$ が得られる。$a_{i1}^{t_1}$についてもまったく同様である。

最後に $v_{i1}^{t+1}=v_{i1}^{t}-a_{i1}^{t}$であるから，$v_{i1}^{t_2+1}>0$，$v_{i1}^{t_1+1}>0$ がいえれば $v_{i1}^{t_2}-a_{i1}^{t_2}>0$，$v_{i1}^{t_1}-a_{i1}^{t_1}>0$ となることは明らかである。

<0 であれば $b_{i1}^{t_1}=\min(|v_{i1}^{t_1}|, |v_{i2}^{t_1}|)$ となることはいうまでもないが，後者の場合かならず $|v_{i1}^{t_1}|>|v_{i2}^{t_1}|$，したがって $b_{i1}^{t_1}=|v_2^{t^t}|$ となることを示すことができる。事実 $|v_{i1}^{t_1}|\leqq|v_{i2}^{t_1}|$ であったとすれば，$b_{i1}^{t_1}=|v_{i1}^{t_1}|=v_{i1}^{t_1}$ となるが，(10)(11) に示したように $v_{i1}^{t_1}>a_{i1}^{t_1}\geqq 0$ であるから，$a_{i1}^{t_1}=b_{i1}^{t_1}+y_{i1}^{t_1}=v_{i1}^{t_1}+y_{i1}^{t_1}$ の関係から $y_{i1}^{t_1}<0$ となるのでなくてはならない。しかしこれは目下の場合，不可能である。

他方 $t=t_2$ についても，まったく同様の推論をつうじて，もし $v_{i3}^{t_2}\geqq 0$ なら $b_{i1}^{t_2}=0$，また $v_{i3}^{t_2}<0$ なら $b_{i1}^{t_2}=|v_{i3}^{t_2}|$ となることが明らかである。

そして $v_{i1}^{t_1}>0$, $v_{i2}^{t_1}<0$ の場合はかならず $y_{i1}^{t_1}\geqq 0$，また $v_{i1}^{t_2}>0$, $v_{i2}^{t_2}<0$ の場合はかならず $y_{i1}^{t_2}\geqq 0$ となるから，以上の議論をつうじて

(12)　$v_{i2}^{t_1}<0$ なら $a_{i1}^{t_1}\geqq|v_{i2}^{t_1}|$，　$v_{i3}^{t_2}<0$ なら $a_{i1}^{t_2}\geqq|v_{i3}^{t_2}|$

という命題が成立したことになる。

ここで $v_{i2}^{t_1}$, $v_{i3}^{t_2}$ の符号を組合わせることによって可能なケースを四つに分け，以上の結果からそのいずれの場合にも矛盾が生じることを明らかにしよう。

ケース1　$(v_{i2}^{t_1}, v_{i2}^{t_1})\geqq 0$ の場合

(10) から $z_{i1}=v_{i1}^{t_1}>0$ であり，また仮定により $z_{i2}=v_{i2}^{t_1}\geqq 0$, $z_{i3}=v_{i3}^{t_1}=v_{i3}^{t_2}\geqq 0$ であるから，$z_{i1}+z_{i2}+z_{i3}>0$ となって (U) の (1) に矛盾する。

ケース2　$(v_{i2}^{t_1}, v_{i3}^{t_1})\leq 0$ の場合

さきに (12) として示したところから，かならず $a_{i1}^{t_1}\geqq|v_{i2}^{t_1}|=-v_{i2}^{t_1}$ あるいは $a_{i1}^{t_2}\geqq|v_{i3}^{t_2}|=-v_{i3}^{t_2}=-v_{i3}^{t_1}$ の少なくともいずれかが成立する。したがって $z_{i2}\geqq -a_{i1}^{t_1}$ または $z_{i3}\geqq -a_{i1}^{t_2}$ とならねばならないが，他方仮定から

$$v_{i1}^{t_3}=v_{i1}^{t_1}-a_{i1}^{t_1}-a_{i1}^{t_2}>0$$

であるから，ふたたび $z_{i1}+z_{i2}+z_{i3}>0$ となり，(U)(1) に矛盾。

ケース3　$v_{i2}^{t_1}<0$, $v_{i3}^{t_2}>0$ の場合

前に示したように $v_{i2}^{t_1}<0$ ならかならず $|v_{i1}^{t_1}|>|v_{i2}^{t_1}|$ となるから，

$$v_{i1}^{t_1}>-v_{i2}^{t_1}=-z_{i2},$$

ゆえに $z_{i1}+z_{i2}>0$ となる。ところが仮定により $v_{i3}^{2}=v_{i3}^{1}=z_{i3}>0$ であるから，やはり $z_{i1}+z_{i2}+z_{i3}>0$ となって，(U)(1) に矛盾。

ケース4　$v_{i2}^{t_1}>0$, $v_{i3}^{t_2}<0$ の場合

前のケースと同様に $v_{i3}^{t_2}<0$ から $|v_{i1}^{t_2}|>|v_{i3}^{t_2}|$ すなわち $v_{i1}^{t_2}>-v_{i3}^{t_2}=-v_{i3}^{t_1}=-z_{i3}$ となり，また $v_{i1}^{t_1}\geqq v_{i1}^{t_2}$，$v_{i1}^{t_1}=z_{i1}$ であるから，$z_{i1}+z_{i3}>0$ となる。ゆえに $v_{i2}^{t_1}=z_{i2}>0$ と相俟って，同じ矛盾が導かれる。

こうして仮定 $v_{i1}^{t_3}>0$ は誤まりであることが知られたから，$v_{i1}^{t_3}\leqq 0$ であるほかはない。ところが $v_{i1}^{t_3}<0$ であれば，$pv_1^{t_3}=0$ から $v_{k1}^{t_3}>0$ のような財 k がなくてはならず，この財に対して財 i の場合と同一の議論を用いることにより，ふたたび矛盾が導かれることになる。よって $v_{i1}^{t_3}=0$ とならねばならず，すべての i について $v_{i1}^{t_2+1}=0$ となることが示された。

(ii) (U) と (A) から

$$v_1^{t_3}+v_2^{t_3}+v_3^{t_3}=0 \tag{13}$$

であるから，(i)によって $v_1^{t_3}=v_1^{t_2+1}=0$ が成り立てば，

$$v_2^{t_3}=-v_3^{t_3} \tag{14}$$

となる。ゆえに (14) の下で (T_τ) が定める取引は，前に $\#\widetilde{M}=2$ の場合 (9) で見たように

$$b_{i2}^{t_3}=v_{i2}^{t_3}=-v_{i3}^{t_3}=-b_{i3}^{t_3}, \tag{15}$$

そして (A) から $pv_2^{t_3}=pv_3^{t_3}=0$ であるから，$pb_2^{t_3}=pb_3^{t_3}=0$ でもあり，

$$a_2^{t_3}=b_2^{t_3},\quad a_3^{t_3}=b_3^{t_3} \tag{16}$$

が成り立つ。したがって(15)，(16)から

$$\begin{aligned} v_2^{t_3+1}&=v_2^{t_3}-a_2^{t_3}=0\\ v_3^{t_3+1}&=v_3^{t_3}-a_3^{t_3}=0 \end{aligned} \tag{17}$$

となり，証了となる。

以上三つの補助定理をつうじて，われわれはつぎのような基本定理の一つを確立したことになるであろう。

定理 1 $\#\widetilde{N}=2$ あるいは $\#\widetilde{M}\leqq 3$ の場合には，(U) を満たす任意の $(p,\ Z,\ \overline{X})$ および任意の $\{\pi^t\}$，$t=1, 2, \cdots\cdots, T$ に対して，(A)(D*)(N) および (E) のすべてを満たす取引ルールが存在する。

4　本稿でのつぎの課題は，$\#\widetilde{N}$ ならびに $\#\widetilde{M}$ すなわち超過需要が非ゼロな財の数と取引主体の数がさらにどこまで多くなったときに，上記のような匿名的かつ情報分権的な取引ルールが存在

しなくなるかを究めることである。この問題については，まず $\# N=\# \tilde{N}=3$，$\# M=\# \widetilde{M}=4$ のときに（T_{γ}）が（E）を満たしえない事例のあることが浜田氏によって指摘されているが[8]，より一般的に $\# \tilde{N}=3$，$\# \widetilde{M}=$任意多数の場合に何がいえるかという問題は，現在のところまだ open question にとどまっている。以下本節においては，われわれはただちに $\# \tilde{N} \geqq 4$，$\# \widetilde{M} \geqq 4$ の事例の考察に進み，その場合に所望の取引ルールが存在しえないことを示すブラッドレー流の不可能性定理の証明ととり組むことにしたいと思う。

定理2　$\# \tilde{N} \geqq 4$ および $\# \widetilde{M} \geqq 4$ の場合には，(U) を満たす任意の (p，Z，$\overline{X}$) および任意の $\{\pi^t\}$，$t=1, 2, \cdots\cdots, T$ に対して，(A)(D*)(N)および（E）のすべてを満たす取引ルールは存在しない。

証　明

(A)(D*)(N) を満たす取引ルールが，ある (p，Z，$\overline{X}$) および $\{\pi^t\}$，$t=1$，2，$\cdots\cdots$，T に対して（E）を満たさないことを示せばよい。以下ではもっぱらブラッドレーが与えた4人4財の二つの事例[9]

$$Z^*=\begin{bmatrix} 8 & 0 & -8 & 0 \\ -8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -8 \\ 0 & -8 & 0 & 8 \end{bmatrix},\quad Z^{**}=\begin{bmatrix} 8 & 0 & -1 & -7 \\ -8 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & 0 & -8 \\ 0 & -8 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

にもとづいて論を運ぶことにする。ここで Z^*，Z^{**} はそれぞれ各行が各財の各主体への超過需要の配分をあらわし，したがって各列が各主体の超過需要ベクトルをあらわしている。どの事例についても価格ベクトルはつねに (1，1，1，1) であるとし，主体 {1，2，3，4} の会合の順序は ((1，2)，(3，4))，((1，4)，(2，3))，((1，3)，(2，4)) のように定められているとする。また初期保有量行列 $\overline{X}$ は，オストロイ＝スターのいわゆる minimally sufficient の条件すなわち $[Z]^-=-\overline{X}$ の条件を満たしているものとする。一見して分かるように，Z^* と Z^{**} は主体1，2について正確に同一の超過需要ベクトルを含んでいるが，ここでまず Z^* について超過需要の完全充足を達成するためには，ただ一通りの取引パターンしかありえないことを示し，ついで Z^{**} について，もしそこでもそれらの取引主体が Z^* において必要とされたのと同じ取引を行なうほかないとすれば，かならず完全充足の実現が不可能になることを示す，というのが以下での証明の論旨である。

最初にまず Z^* について，ラウンド1では主体1は主体2に財2を $a \geqq 0$ の量だけ与え，また

注(8)　浜田，前掲論文，pp. 93–94 を参照されたい。
(9)　Bradley, *op. cit.*, pp. 235–237 参照。

主体3は主体4に財1を $b\geqq 0$ の量だけ与えるとする。するとこの取引ののちにおいては，明らかに当初の超過需要行列 $Z^*=V^{1*}$ はつぎの V^{2*} に転化する。

$$V^{2*}=\begin{bmatrix} 8 & 0 & -8+b & -b \\ -8+a & -a & 8 & 0 \\ 0 & 8 & -b & -8+b \\ -a & -8+a & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

つぎにラウンド2においては，主体1は主体4に財4を a だけ提供し，その代り主体4から財1を b だけ受け取るとする。他方，主体2は主体3に財2を a だけ提供し，主体3から財3を b だけ受け取るとする。そうすれば

$$V^{3*}=\begin{bmatrix} 8-b & 0 & -8+b & 0 \\ -8+a & 0 & 8-a & 0 \\ 0 & 8-b & 0 & -8+b \\ 0 & -8+a & 0 & 8-a \end{bmatrix}$$

となり，明らかにラウンド3に完全充足が達成されうることになるが，いささか検討してみればすぐ分かるように，完全充足の達成を保証しうる取引はこの取引のみである。そして，これについては（A）の等価条件が満たされていなければならないのであるから，$p_1(8-b)+p_2(-8+a)=8-b-8+a=0$，すなわち

$$a=b \tag{18}$$

が成立しなければならないことになる。

さてつぎに，主体3，4について財2，4の名称を入れかえた事例

$$\tilde{Z}^*=\begin{bmatrix} 8 & 0 & -8 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 0 & -8 \\ 0 & -8 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

を構成してみる。匿名性の条件（N）の（2）が仮定されているかぎり，彼らの取引はこのような財の relabeling によって影響を蒙らないはずであるから，ラウンド1が終れば

$$\tilde{V}^{2*}=\begin{bmatrix} 8 & 0 & -8+b & -b \\ -8+a & -a & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -b & -8+b \\ -a & -8+a & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

となり，したがってラウンド2が終れば

$$\tilde{V}^{3*}=\begin{bmatrix} 8-b & 0 & -8+b & 0 \\ 0 & -a & 0 & a \\ 0 & 8-b & 0 & -8+b \\ -a & 0 & a & 0 \end{bmatrix}$$

となる。するとふたたび (A) の等価条件から $p_1(8-b)+p_2(-a)=8-b-a=0$ となるから,

(19) $$a+b=8$$

の条件が成立し, (18) と (19) から

(20) $$a=4,\ b=4$$

とならねばならないことが分かる。

ここで第二の事例 Z^{**} に舞台を移す。前述のとおり Z^{**} の第1列, 第2列は Z^* のそれらとまったく同じものであるから, ラウンド1において主体1, 2は Z^* におけると正確に同じ取引を行なうのでなくてはならない。したがって主体1は主体2に財2を4単位提供すると同時に, 主体2から財4を4単位受け取ることになる。他方, 主体3は主体4に財1を c 単位引き渡し, 後者から財3を c 単位受け取ると想定するが, ここで minimally sufficient の条件から $0\leqq c\leqq 1$ でなくてはならず, また $c=1$ とすれば主体3, 4について財1, 3の名称を入れかえることによって $c=0$ の場合と同じことになってしまうから, $c<1$ でなくてはならない[10]。以上の想定の下でラウンド1の取引がなされれば

$$V^{2**}=\begin{bmatrix} 8 & 0 & -1+c & -7-c \\ -4 & -4 & 1 & 7 \\ 0 & 8 & -c & -8+c \\ -4 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

となり, さらにこれにもとづいて超過需要の完全充足を達成しようとすれば, つぎのような取引がとり計らわれねばならない。

(イ) 主体1は主体4に財4の4単位すべてを提供し, 代りに主体4は主体1に財1の $7+c$ 単位すべてを提供する。しかし, 財3については主体4はそのいかなる量をも主体1に提供しない。また財2の取引量は等価条件から決定され, 主体1が主体4にその $3+c$ 単位を提供することになる。

(ロ) 主体2は主体3に財2の c 単位を提供し, 主体3は主体2に財3の c 単位を提供する。財1, 財4については, そのいかなる量をも交換しない。

ラウンド2でこのような取引を行なうならば,

$$V^{3**}=\begin{bmatrix} 1-c & 0 & -1+c & 0 \\ -1+c & -4+c & 1-c & 4-c \\ 0 & 8-c & 0 & -8+c \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

注(10) $c=0$ の場合でも, ある意味では超過需要の完全充足は可能である。しかし, そのためにはラウンド2において, 主体2, 3は一方が財2の超過供給をもち, 他方が超過需要をもっているにもかかわらず, その折角の交換機会を見送るのでなくてはならない。これは (D*) の仮定の下では, 明らかに不合理であるというべきであろう。

となり，ラウンド3での取引を経て，完全充足が達成される。

推論のこの段階で，上記のラウンド2での主体1，4の会合がラウンド1で主体1，2について生じるつぎのような新しい事例を考えることにする。

$$Z^{***}=\begin{bmatrix} 8 & -7-c & -1+c & 0 \\ -4 & 7 & -3 & 0 \\ 0 & -8+c & 8-c & 0 \\ -4 & 8 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

この事例のつくり方と当面の仮定から，主体1，2はラウンド1で，ちょうど主体1，4が前の事例のラウンド2で行なったのと同じ取引を行なうことになる。したがって主体3，4は取引しないと想定すれば，ラウンド1の取引後においては

$$V^{2***}=\begin{bmatrix} 1-c & 0 & -1+c & 0 \\ -1+c & 4-c & -3 & 0 \\ 0 & -8+c & 8-c & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

を得るが，ここで主体2はつぎのラウンド2で主体3から財2の供給を受けるとしても，なお現在主体1の所持する財2の $1-c$ 単位を必要とするわけであり，主体2がそれを充足できる唯一の途は，主体1がラウンド2において財2の当該量を主体4に移転することでしかない。ところがこれは，主体4が問題の交換を賄うに足りるだけの財の手持量を十分に持っていないことから不可能である。ゆえにここで，超過需要の完全充足が不可能な事例のありうることが知られたわけである。(11)

ところで上記の事例で主体4の超過需要ベクトルは厳密に〔0, 0, 0, 0〕とされているが，それに非ゼロ成分が混じると考えても，その絶対値が十分に小であれば，結論には何らの相違も生じてこない。したがってわれわれはまた上記の事例に任意数の dummy の主体を加え，その超過需要ベクトルに perturbation を加えることによって，任意数の $\tilde{N}$，$\tilde{M}$ について同様の結論を導き出すことができる。よって定理の証明が終了したことは明らかであろう。(12)

5　以上までのところ，われわれが示しえたことは，貨幣が交換媒体として用いられるかぎり，取引所の制度を欠如した経済にあっても，情報分権的な取引ルールをつうじて有限期間のうちに超過需要の完全充足を達成できること，ならびに貨幣が存在しなければ，情報を集権化し交換過程を統

注(11)　ブラッドレーは前掲論文，pp. 237–238 において，さらにdummy の主体をもう一人導入し，問題の会合がいずれもラウンド2に合致するような工夫を凝らしているが，議論の本質には何の変わりもない。この考察によって $\#M\geq 4$ を $\#M\geq 5$ に制限したとしても，匿名性の仮定 (N) の (1) の使用を免れることはできないであろう。

(12)　われわれが示したところは，たとえ各取引主体が全部で何人の取引主体がその経済にいるかを知っており，またどのような会合の系列のなかに自らが位置するかを知っているとしても，なお完全充足を保証するような分権的取引ルールをつくり出すことはできないということである。これらの仮定が満たされない場合，定理の結論が a fortiori に妥当することはいうまでもないであろう。

合化することなくして，そのような超過需要の完全充足は不可能であること，である。これらの帰結は，普遍的な交換媒体として貨幣がもっている大幅な情報節約的機能を明確化したものといってよいであろう。

ここで注意すべきは，上記の第二定理で主張されている完全充足の不可能性が，有限期間内，より詳しくいえば1ラウンド内での完全充足の不可能性であることである。これをいい換えるならば，物々交換制度の下にあっても，より長い時間をかけるならば，分権的な取引ルールによって超過需要の完全充足を図ることはまだその可能性を閉じられていないわけであって，事実われわれは前記の分権的ルール（T_r）にもとづく交換過程が均衡配分のパターンに収束することを示すことができるのである。本節の残りの部分はこの主張の証明に当てられるが[13]，結果を先取りしていうならば，これは交換媒体としての貨幣がたんに情報節約化の機能をもつばかりでなく，さらに取引時間節約化の機能をももつことを意味するものと解されよう。

補助定理 4　（U）および（T_r）の下では，すべての r，t について $\left|\sum_{\tau=0}^{T-1}[a_{ir}^{t+\tau}]^-\right| \geqq \left|[v_{ir}^t]^-\right|$ が成り立つ。

証　明

$v_{ir}^t \geqq 0$ であれば定理の帰結は自明であるから，$v_{ir}^t<0$ の場合のみを考える。

いま t において $v_{is}^t>0$ となっている主体の集合を S_i^t とすれば，$\pi^{\tau_s}(r)=s$ についてかならず

(21)　$v_{ir}^{t+\tau_s}<0<v_{is}^{t+\tau_s}$ かつ $|v_{ir}^{t+\tau_s}| \leqq |v_{is}^{t+\tau_s}|$ となるような s が S_i^t のなかにある

ことを示すことができる。

事実もし命題（21）が成り立たないとすれば，

(22)　すべての $s \in S_i^t$ について (イ) $v_{ir}^{t+\tau_s} \geqq 0$ あるいは $v_{is}^{t+\tau_s} \leqq 0$ となるか，
(ロ) $|v_{ir}^{t+\tau_s}|>|v_{is}^{t+\tau_s}|$ となるかのいずれかが成り立つ

のでなくてはならない。ところが，仮定から $v_{ir}^t<0$ であるから，明らかに $v_{ir}^{t+\tau_s} \leqq 0$ となり[14]，(イ)の $v_{ir}^{t+\tau_s}>0$ の場合は起こりえない。また $v_{ir}^{t+\tau_s}=0$ とすれば，この期には r にとって財 i はすべて捌けているわけであるから $\left|\sum_{\tau=0}^{\tau_s-1}[a_{ir}^{t+\tau}]^-\right| \geqq \left|[v_{ir}^t]^-\right|$ となるのでなくてはならず，いうまでもなく

注(13)　以下でとり扱うところは，R. M. Starr, "Decentralized Nonmonetary Trade", *Econometrica*, September 1976 の所論のより立入った証明である。
(14)　第3節の注（7）参照。

$|\sum_{\tau=0}^{T-1}[a_{ir}^{t+\tau}]^-|\geqq|\sum_{\tau=0}^{\tau_s-1}[a_{ir}^{t+\tau}]^-|$ であるから，定理の主張が成り立ってしまう。したがって以下においては $v_{ir}^{t+\tau_s}<0$ として議論を進めればよく，すると結局，帰謬法の仮定としては，すべての $s\in S_i^t$ について (イ) $v_{is}^{t+\tau_s}\leqq 0$ となるか，(ロ) $v_{is}^{t+\tau_s}>0$ で $|v_{ir}^{t+\tau_s}|>|v_{is}^{t+\tau_s}|$ となるかの二つの場合を考えればよいことになろう。

ここで $\max_s \tau_s=\tau_{s^*}$ とすれば，(イ) の場合は $v_{is}^{t+\tau_s}\leqq 0$ から $v_{is}^{t+\tau_{s^*}}\leqq 0$ となるが，他方(ロ)の場合も (T_r) から $v_{is}^{t+\tau_s}\leqq 0$ となり[15]，したがって同様に $v_{is}^{t+\tau_{s^*}}\leqq 0$ となる。そこで

$$(23)\qquad \sum_{s\in M} v_{is}^{t+\tau_{s^*}}=v_{ir}^{t+\tau_{s^*}}+v_{is^*}^{t+\tau_{s^*}}+\sum_{s\in S_i^t\setminus\{s^*\}} v_{is}^{t+\tau_{s^*}}+\sum_{s\in S_i^t\setminus\{r\}} v_{is}^{t+\tau_{s^*}}$$

について右辺各項の符号を考えれば，第1項は前に述べたところから負，第2項と第3項はいま示したように (イ) の場合についても (ロ) の場合についても非正，そして第4項は $s\in S_i^t$ したがって $v_{is}^t\leqq 0$ であるところから非正である。ゆえに $\sum_{s\in M} v_{is}^{t+\tau_{s^*}}<0$ とならざるをえないが，これは (U) の (1) に矛盾する。

ここで命題 (21) の成り立つことが知られたので，(T_r) を用いれば $b_{ir}^{t+\tau_s}=-\min(|v_{ir}^{t+\tau_s}|, |v_{is}^{t+\tau_s}|)=-|v_{ir}^{t+\tau_s}|=-v_{ir}^{t+\tau_s}$ が成り立ち，ゆえに $pb_r^{t+\tau_s}>0$ のときは $[v_{ir}^{t+\tau_s}-b_{ir}^{t+\tau_s}]^-\leqq y_{ir}^{t+\tau_s}\leqq 0$ から $y_{ir}^{t+\tau_s}=0$。また $pb_r^{t+\tau_s}<0$ のときは $pb_s^{t+\tau_s}>0$ したがって $[v_{is}^{t+\tau_s}-b_{is}^{t+\tau_s}]^-\leqq y_{is}^{t+\tau_s}\leqq 0$ であるが，$-b_{is}^{t+\tau_s}=b_{ir}^{t+\tau_s}=v_{ir}^{t+\tau_s}$ で，しかも $|v_{ir}^{t+\tau_s}|\leqq|v_{is}^{t+\tau_s}|$，$v_{ir}^{t+\tau_s}<0$，$v_{is}^{t+\tau_s}>0$ であるところから，$v_{is}^{t+\tau_s}-b_{is}^{t+\tau_s}\geqq 0$，したがって $[v_{is}^{t+\tau_s}-b_{is}^{t+\tau_s}]^-=0$ となるから，ふたたび $y_{is}^{t+\tau_s}=0=-y_{ir}^{t+\tau_s}$。ゆえにいずれにしても $y_{ir}^{t+\tau_s}=0$ が成り立つ。ところが $v_{ir}^{t+\tau_s}-b_{ir}^{t+\tau_s}=0$ であったのであるから，この帰結は

$$v_{ir}^{t+\tau_s}-a_{ir}^{t+\tau_s}=0$$

を意味することになり，これは τ_s までの取引で r の財 i がすべて捌けてしまったことを意味している。よって前と同様

$$|\sum_{\tau=0}^{\tau_s}[a_{ir}^{t+\tau}]^-|\geqq|[v_{ir}^t]^-|$$

となるが，明らかに $|\sum_{\tau=0}^{T-1}[a_{is}^{t+\tau}]^-|\geqq|\sum_{\tau=0}^{\tau_s}[a_{ir}^{t+\tau}]|^-$ であるから，証明は終了したことになる。

注(15) (T_r) から $b_{ir}^{t+\tau_s-1}=-b_{is}^{t+\tau_s-1}=-\min(|v_{ir}^{t+\tau_s-1}|, |v_{is}^{t+\tau_s-1}|)=-|v_{is}^{t+\tau_s-1}|=-v_{is}^{t+\tau_s-1}$ となるから ($v_{is}^{t+\tau_s}>0$ なら $v_{is}^{t+\tau_s-1}>0$)，$v_{is}^{t+\tau_s-1}-b_{is}^{t+\tau_s-1}-=0$。したがって $pb_s^{t+\tau_s-1}>0$ の場合は $[v_{is}^{t+\tau_s-1}-b_{is}^{t+\tau_s-1}]^-\leqq y_{is}^{t+\tau_s-1}\leqq 0$ から $y_{is}^{t+\tau_s-1}=0$。$pb_s^{t+\tau_s-1}<0$ の場合は $pb_r^{t+\tau_s-1}>0$ だから $[v_{ir}^{t+\tau_s-1}-b_{ir}^{t+\tau_s-1}]^-\leqq y_{ir}^{t+\tau_s-1}\leqq 0$ から $y_{is}^{t+\tau_s-1}=-y_{is}^{t+\tau_s-1}\geqq 0$。$pb_s^{t+\tau_s-1}=0$ の場合はいうまでもなく $y_{is}^{t+\tau_s-1}=0$。よっていずれの場合も $y_{is}^{t+\tau_s-1}\geqq 0$ となる。ゆえに $v_{is}^{t+\tau_s}=v_{is}^{t+\tau_s-1}-a_{is}^{t+\tau_s-1}=v_{is}^{t+\tau_s-1}-b_{is}^{t+\tau_s-1}-y_{is}^{t+\tau_s-1}=0-y_{is}^{t+\tau_s+1}\leqq 0$。

補助定理5　(U) および (T_r) の下では

$$\sum_{r \in M} p\ [v_r^{t+T}]^+ \leqq \frac{1}{2} \sum_{r \in M} p[v_r^t]^+$$

となる。

証　明

まずすべての r について

$$(24) \qquad p\sum_{\tau=0}^{T-1} [a_r^{t+\tau}]^+ \geqq p[v_r^t]^+$$

となることを証明する。

事実，補助定理4の帰結に p_i を乗ずることによって

$$p_i \left|\sum_{\tau=0}^{T-1} [a_{ir}^{t+\tau}]^-\right| \geqq p_i |[v_{ir}^t]^-|$$

すなわち

$$-p_i \sum_{\tau=0}^{T-1} [a_{ir}^{t+\tau}]^- \geqq -p_i [v_{ir}^t]^-$$

を得るから，それをベクトルの内積の形に書きなおせば

$$(25) \qquad -p\sum_{\tau=0}^{T-1} [a_r^{t+\tau}]^- \geqq -p[v_r^t]^-。$$

ところが (T_r) は (A) の条件を満たすから，[16]

$$pa_r^{t+\tau} = 0 = p[a_r^{t+\tau}]^+ + p[a_r^{t+\tau}]^-$$

$$pv_r^t = 0 = p[v_r^t]^+ + p[v_r^t]^-$$

が成り立ち，したがって

$$(26) \qquad \begin{aligned} -p\sum_{\tau=0}^{T-1} [a_r^{t+\tau}]^- &= p\sum_{\tau=0}^{T-1} [a_r^{t+\tau}]^+ \\ -p[v_r^t]^- &= p[v_r^t]^+ \end{aligned}$$

が成り立つ。よって (25) と (26) とから (24) を得る。

つぎに

$$(27) \qquad p\sum_{r \in M} [y_r^{t+\tau}]^+ \leqq p\sum_{r \in M} [b_r^{t+\tau}]^+$$

注(16)　第3節の補助定理1参照。

となることを証明する。

まず (A) から

$$(28)\qquad pa_r^{t+\tau}=pb_r^{t+\tau}+py_r^{t+\tau}=0$$

となるが，ここで (イ) $pb_r^{t+\tau}>0$ の場合と (ロ) $pb_r^{t+\tau}\leqq 0$ の場合を分けて扱うならば，(イ) の場合は $y_r^{t+\tau}\leq 0$ したがって $[y_r^{t+\tau}]^+=0$ となるから，(28) から $pb_r^{t+\tau}+p[y_r^{t+\tau}]^-=0$。そして $p[y_r^{t+\tau}]^-=-p[y_s^{t+\tau}]^+$ であるから，明らかに

$$(29)\qquad p[y_s^{t+\tau}]^+=pb_r^{t+\tau}\leqq p[b_r^{t+\tau}]^+$$

が成り立つ。他方

$$(30)\qquad p[y_r^{t+\tau}]^+=0\leqq p[b_s^{t+\tau}]^+$$

が成り立つことはいうまでもない。また (ロ) の場合も $[y_r^{t+\tau}]^-=0$ となるところから，同様な推論をつうじて

$$(31)\qquad p[y_r^{t+\tau}]^+=-pb_r^{t+\tau}\leqq p[b_s^{t+\tau}]^+$$

$$(32)\qquad p[y_s^{t+\tau}]^+=0\leqq p[b_r^{t+\tau}]^+$$

となり，以上 (イ) (ロ) いずれの場合も

$$(33)\qquad p[y_r^{t+\tau}]^++p[y_s^{t+\tau}]^+\leqq p[b_r^{t+\tau}]^++p[b_s^{t+\tau}]^+$$

となることが知られる。そしてこの関係は $t+\tau$ 期に会合するすべての対の主体について成り立つから，(27) の成立は明らかである。

さて以上のように (24) と (27) が成り立っていれば，そのことから不等式

$$(34)\qquad \frac{1}{2}\sum_{r\in M}p[v_r^t]^+\leqq\sum_{r\in M}p\sum_{\tau=0}^{T-1}[b_r^{t+\tau}]^+$$

の成立を示すことができる。事実

$$\sum_{r\in M}p\sum_{\tau=0}^{T-1}[a_r^{t+\tau}]^+\leqq\sum_{r\in M}p\sum_{\tau=0}^{T-1}\left([b_r^{t+\tau}]^++[y_r^{t+\tau}]^+\right)$$

$$=\sum_{\tau=0}^{T-1}\left(p\sum_{r\in M}[b_r^{t+\tau}]^++p\sum_{r\in M}[y_r^{t+\tau}]^+\right)$$

であるが，ここで (27) を用いることによって

$$(35)\qquad \sum_{r\in M}p\sum_{\tau=0}^{T-1}[a_r^{t+\tau}]^+\leqq 2\sum_{\tau=0}^{T-1}p\sum_{r\in M}[b_r^{t+\tau}]^+$$

を得，他方（24）から

$$(36)\qquad \sum_{r\in M} p\ [v_r^t]^+ \leqq \sum_{r\in M} p \sum_{\tau=0}^{T-1} [a_r^{t+\tau}]^+$$

となるから，(34) が成り立たねばならない。

最後に

$$(37)\qquad [v_r^{t+T}]^+ = [v_r^t]^+ - \sum_{\tau=0}^{T-1} [b_r^{t+\tau}]^+$$

となることを証明しよう。

この場合もし $[v_{ir}^t]^+=0$ であるとすれば，たびたび見たように $\tau\leqq T$ のすべての τ について $[v_{ir}^{t+\tau}]^+=0$ となるから，(T$_r$) から $b_{ir}^{t+\tau}\leqq 0$，ゆえに $[b_{ir}^{t+\tau}]^+=0$ となって，(37) は $0=0-0$ の形で成立する。

他方 $[v_{ir}^t]^+>0$ であるときは $[v_{ir}^{t+T}]^+\geqq 0$ となるが，ここでも場合を二つに分けて考えるとして，もし $[v_{ir}^{t+T}]^+>0$ であれば，$\tau\leqq T$ のすべての τ についても $[v_{ir}^{t+\tau}]^+>0$。そのときには前に見たように $v_{ir}^{t+\tau}-b_{ir}^{t+\tau}>0$ となることがいえるから,[17] $pb_r^{t+\tau}\geqq 0$ の場合は $y_{ir}^{t+\tau}=0$，また $pb_r^{t+\tau}<0$ の場合は，$v_{is}^{t+\tau}-b_{is}^{t+\tau}\geqq 0$ ならふたたび $y_{ir}^{t+\tau}=0$，そして $v_{is}^{t+\tau}-b_{is}^{t+\tau}<0$ の事態は起こりえない。[18] ゆえにいずれにしても $y_{ir}^{t+\tau}=0$ となり，したがって $a_{ir}^{t+\tau}=b_{ir}^{t+\tau}$ となる。しかもこの場合は (T$_r$)から明らかに $b_{ir}^{t+\tau}\geqq 0$ であるから，

$$[v_{ir}^{t+T}]^+ = v_{ir}^{t+T} = v_{ir}^t - \sum_{\tau=0}^{T-1} a_{ir}^{t+\tau} = [v_{ir}^t]^+ - \sum_{\tau=0}^{T-1} [b_{ir}^{t+\tau}]^+$$

となって (37) が成立する。他方もし $[v_{ir}^{t+T}]^+=0$ であるとすれば，ある $T^*\leqq T$ があって，そこで $[v_{ir}^{t+T^*}]^+=v_{ir}^{t+T^*}=v_{ir}^t-\sum_{\tau=0}^{T^*-1} a_{ir}^{t+\tau}=0$ となり，$\tau<T^*$ のようなすべての τ については，前と同じように $y_{ir}^{t+\tau}=0$，$a_{ir}^{t+\tau}=b_{ir}^{t+\tau}\geqq 0$，また $\tau\geqq T^*$ のようなすべての τ については $b_{ir}^{t+\tau}\leqq 0$ となっているのでなくてはならない。ゆえに

$$[v_{ir}^t]^+ - \sum_{\tau=0}^{T-1} [b_{ir}^{t+\tau}]^+ = v_{ir}^t - \sum_{\tau=0}^{T^*-1} b_{ir}^{t+\tau} - \sum_{\tau=T^*}^{T} [b_{ir}^{t+\tau}]^+ = 0$$

注(17)　第3節注（7）参照。

(18)　目下の場合については $v_{is}^{t+\tau}-b_{is}^{t+\tau}<0$，$b_{ir}^{t+\tau}=-b_{is}^{t+\tau}$，$b_{ir}^{t+\tau}\geqq 0$ であるところから，

$$b_{ir}^{t+\tau}<-v_{is}^{t+\tau}=|\,v_{is}^{t+\tau}|,$$

したがって

$$b_{ir}^{t+\tau}=\min\left(|v_{ir}^{t+\tau}|,\ |v_{is}^{t+\tau}|\right)=|v_{ir}^{t+\tau}|=v_{ir}^{t+\tau}$$

となるのでなくてはならないが，これはすでに示した $v_{ir}^{t+\tau}-b_{ir}^{t+\tau}>0$ と矛盾する。

となって，ふたたび (37) が成立することになる。

ここまで準備が整えば，補助定理の証明はあと一息である。まず (37) の両辺に p を乗じて集計し，(34) を用いることによって，ただちに

$$(38) \qquad \sum_{r\in M} p\ [v_r^{t+T}]^+ = \sum_{r\in M} p\ [v_r^t]^+ - \sum_{r\in M} p \sum_{\tau=0}^{T-1} [b_r^{t+\tau}]^+$$

$$\leqq \sum_{r\in M} p\,[v_r^t]^+ - \frac{1}{2}\sum_{r\in M} p\,[v_r^t]^+$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r\in M} p\ [v_r^t]^+$$

を得ることができる。

定理 3　(U) を満たすすべての $(p,\ Z,\ \overline{X})$ およびすべての $\{\pi^t\}$, $t=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ T$ に対して，(T_r) は

$$\sum_{r\in M} p\ [v_r^{1+\nu T}]^+ \leqq \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu} \sum_{r\in M} p\ [z_r]^+,\ \nu=1,\ 2,\ \cdots\cdots$$

を満たす。

証　明

補助定理 5 の結論から

$$\sum_{r\in M} p\ [v_r^{1+T}]^+ \leqq \frac{1}{2}\sum_{r\in M} p\ [v_r^1]^+,\ v_r^1 = z_r$$

$$\sum_{r\in M} p\ [v_r^{1+2T}]^+ \leqq \frac{1}{2}\sum_{r\in M} p\ [v_r^{1+T}]^+$$

$$\leqq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sum_{r\in M} p\ [z_r]^+ \ 。$$

以下 T 期ごとにこの繰返し計算を続けていくことによって，定理の成立は明らかである。

6　こうして普遍的な交換媒体を欠く分権的取引過程では，一般に 1 ラウンド内で均衡配分を達成することはできないが，取引に要する時間を延長しさえすれば，均衡配分への収束を保証することはできるのである。ただしこの主張が立脚している取引ルール (T_r) は，物々交換のルールとはいっても，欲望の両面一致の条件には制約されない間接交換のルールであり，ある意味においてはすべての財が無差別に「貨幣」として用いられる「貨幣的」交換のルールであるとみなされうるかもしれない。

前稿ならびに本稿第4節までの帰結が示すところによれば，取引に必要な情報量と貨幣の使用とのあいだにトレード・オフの関係が存在するわけであり，その関連での貨幣の役割は，それが交換媒体として用いられることによって組織の分権化と情報の節約化を可能ならしめるところに見出された。他方本稿第5節の所論は，取引に必要な時間量と貨幣の使用とのあいだにトレード・オフの関係があることを示すものであり，その関連での貨幣の役割は，目的達成に要する時間を1ラウンドに短縮化するところに求められるのである。これら二つの結論は，かつてジョン・スチュアート・ミルが表明したつぎのような見解

「貨幣は，それがない場合には手間どり不便にしか行なわれないはずの物事を，迅速かつ便利に行なうための機械である」

を現代的に定型化したものということができよう。

(T_7) に類する分権的物々交換ルールの下において，有限期間のうちに均衡配分を達成しうる事例が存在するかどうかは，今日いまだ答えられていない問題である。

（経済学部教授）