Title	公共的生産要素の最適供給について
Sub Title	On optimal supply of public inputs
Author	塩沢, 修平
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1981
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.74, No.2 (1981. 4) ,p.138(24)- 158(44)
JaLC DOI	10.14991/001.19810401-0024
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19810401-0024

公共的生産要素の最適供給について(1)

塩沢　修平

1. 序

すべての生産者に影響を与えるような，中間生産物としての公共的生産要素を含む経済において，分権的な方法による最適資源配分達成のための手段を考察する。

サミュエルソン〔18〕は，公共財を等量消費財として定式化し，パレート最適のための条件を導出した。サミュエルソンとほぼ同様な枠組において，公共財が私的財の生産にも投入される場合を論じたものに貝塚〔10〕がある。そこでは各財についての個別な生産関数が考えられており，効率的な生産のための必要条件が導出されている。しかし〔18〕および〔10〕においては，それらの条件が分権的な価格機構では達成分可能であるということが指摘されており，最適な資源配分をいかに達成するかという問題は解かれていない。したがって，価格機構を補完するような政策が必要となる。

等量消費財としての公共財に対し，真の選好を表明させるインセンティブをいかに与えるか，という問題を論じたものにグローブス＝レッドヤード〔5〕があるが，そこでは中間生産物としての公共財は扱かわれておらず，均衡解の厳密な存在証明もなされていない。また，公共的生産要素に

注(1) 塩沢〔20〕は，本稿と同様な枠組において等量消費財としての公共財を扱かっている。本稿および前稿の作成に当たり，本塾経済学部の川又邦雄教授，丸山徹氏など多くの方々から有益な助言を頂いた。

対するインセンティブの問題について部分均衡分析を行なったものにグローブス＝ローブ〔6〕がある。

この論文では，公共的生産要素を含む一般均衡モデルにおいて，政府はある課税規則および公共的生産要素の生産規則を提示し，それに対し生産者は公共生産要素に対する自発的な負担額を政府へ伝達する，という調整機構を考える。そのもとで各主体の主体的行動に基づく均衡解が存在することを厳密に証明し，またその均衡がパレート最適であることを示す。この場合，公共的生産要素はすべて政府によって供給され，すべての生産者の生産関数に成分として入るものとする。したがって，ミード〔14〕における「環境創出」型の要素の定式化の一般化と考えられる(6)。また私的財については，市場の調整機構が働くと考える。

2節では，モデルの基本的な枠組と課税および公共的生産要素の生産規則が示され，均衡解の存在証明に必要な仮定が述べられる。ここで重要なことは，生産者が公共的生産要素の生産についての情報をもつということである。

3節では，各主体の最大化行動から，私的財に対する個別需要関数，供給関数および生産者から政府へ伝達される情報の決定関数が導出され，それらの関数の性質が考察される。

4節では，3節で導かれた個別の関数から，社会全体での私的財に対する超過需要関数と生産者から政府への情報の決定関数がつくられる。そしてこれらの関数に私的財の価格調整関数を組合せて，その不動点を求めるという方法によって，このモデルの均衡解の存在が証明される。

5節では，その均衡においてパレート最適のための条件が満たされていることを示す。

以上のようにこのモデルにおいては，政府は公共的生産要素の与える効果を算定しなくても，生産者から伝達される情報と私的財の価格についての情報のみによって，パレート最適な資源配分の達成が可能となる。

2. 基本的仮定

L種類の私的財（番号$l=1, \cdots, L$），K種類の公共財（番号 $k=1, \cdots, K$），I人の消費者（番号 $i=1, \cdots, I$），N 人の生産者（番号 $n=1, \cdots, N$）および政府から成る経済を考える。

私的財の価格ベクトルは $p=(p_1, \cdots, p_L)$，$p\in\mathbb{R}^L$ によって表わされる。

各消費者は私的財のみを初期保有するものとし，第 i 消費者の初期保有ベクトルは $\omega^i=(\omega^i_1, \cdots, \omega^i_L)$，$\omega^i\in\mathbb{R}^L$ によって表わされる。消費者は私的財のみを消費するものとし，第 i 消費者の消費ベクトルは $x^i=(x^i_1, \cdots, x^i_L)$，$x^i\in\mathbb{R}^L$ によって表わされる。第 i 消費者の消費可能集合をX^iとし，その選好関係を $\underset{i}{\succsim}$ で表わす。X^i および選好関係について以下の仮定をおく。

注(2)　混雑現象は考えていないので Meade〔14〕のいう不払い要素ではない。

仮定1　X^i は閉かつ凸であり，　　下に有界である。

仮定2（連結性）　任意の x^{i0}，$x^{i1}\in X^i$ に対して

$x^{i0}\underset{i}{\succsim}x^{i1}$　あるいは　$x^{i1}\underset{i}{\succsim}x^{i0}$

の少なくともいずれか一方が成り立つ。

仮定3（推移性）　任意の x^{i0}，x^{i1}，$x^{i2}\in X^i$ に対して

$x^{i0}\underset{i}{\succsim}x^{i1}$，$x^{i1}\underset{i}{\succsim}x^{i2}$　ならば　$x^{i0}\underset{i}{\succsim}x^{i2}$

が成り立つ。

仮定4（連続性）　任意の $x^{i\prime}\in X^i$ に対して集合 $\{x^i\in X^i \mid x^{i\prime}\underset{i}{\succsim}x^i\}$ および $\{x^i\in X^i \mid x^i\underset{i}{\succsim}x^{i\prime}\}$ は X^i のなかで閉じている。

仮定5（単調性）　任意の x^i，$x^{i\prime}\in X^i$について，もし $x^i\geq x^{i\prime}$(3) ならば $x^i\underset{i}{\succsim}x^{i\prime}$ が成り立つ。さらに，異なる第 l 成分をもつふたつの財の組について上の条件が成立するなら，厳密な選好関係が成り立つような，第 l 私的財が存在する。

仮定6　（凸性）x^{i0}，$x^{i1}\in X^i$，$0<a<1$ について，もし$x^{i0}\underset{i}{\succsim}x^{i1}$ ならば，$ax^{i0}+(1-a)x^{i1}\underset{i}{\succsim}x^{i1}$ が成り立つ。

仮定7　$\omega^i\in\mathrm{int}\,X^i$，すなわち私的財の初期保有量は消費可能集合の内点である。

仮定1～4の下で連続な効用関数は存在が証明される(4)。第 i 消費者の効用関数を

（1）　$u^i=u^i(x^i)$

によって表わす。

次に生産者についての仮定を述べる。生産者は公共財と私的財を投入して，私的財のみを生産する。公共財はすべて政府によって供給され，すべての生産者によって等量に生産要素として投入される。公共財の供給ベクトルは$y=(y_1,\ \cdots,\ y_K)$，$y\in\mathbf{R}^K$ によって表わされる。第 n 生産者の生産計画を私的財と公共財のベクトルの組 $(g^n,\ y)=(g_n^1,\ \cdots,\ g_L^n,\ -y_1,\ \cdots,\ -y_K)$，$(g^n,\ y)\in\mathbf{R}^{L+K}$ によって表わす。正の成分は産出，負の成分は投入を表わす。したがって y ベクトルはすべて負の成分をもつ。第 n 生産者の生産可能集合を$\overline{F}^n\subset\mathbf{R}^{L+K}$ とし，$\overline{F}^n$ の私的財空間への射影を F^n とする。また生産関数を

（2）　$f^n(g^n,-y)=0$

とする。

仮定8　$\overline{F}^n$は閉かつ凸で，原点を含む。

注（3）　ここで $x^i\geq x^{i\prime}$ は，$x^i\geqq x^{i\prime}$ で，しかも $x^i\neq x^{i\prime}$ であることを意味する。

（4）　福岡〔4〕pp. 29–37, Debreu〔2〕pp. 56–59

仮定9（凹性）　$(g^{n\prime}, -y') \in \bar{F}^n$，$f^n(g^{n\prime}, -y')=0$，$(g^{n\prime\prime}, -y'') \in \bar{F}^n$，$f^n(g^{n\prime\prime}, -y'')=0$，$0<a<1$ について，$f^n[a(g^{n\prime}, -y')+(1-a)(g^{n\prime\prime}, -y'')]<0$ が成り立つ。

さらに F^n を社会全体で考え，$F \equiv \sum_{n=1}^{N} F^n$ とおき，F について以下の仮定を課す。

仮定10（非可逆性）　$F \cap (-F) = \{0\}$

仮定11（無料処分）　$F \supset \mathbb{R}^L_-$

次に政府活動および公共財の生産についての仮定を述べる。政府は生産者から徴収した租税で，私的財市場において生産要素としての私的財を購入し，それを投入して公共財を生産するものとする。公共財の生産には他の公共財は用いられない。第 k 公共財の生産のために各生産者に課せられる税額 T^n_k，$n=1, \cdots, N$，$k=1, \cdots, K$は，次のような規則によって決められる。(5)

（3）　$T^n_k = \alpha^n_k \, p_1 \sum_{n'=1}^{N} \varphi^{n'}_k$

$$0<\alpha^n_k<1,\ \sum_{n=1}^{N} \alpha^n_k = 1,\ \sum_{n'=1}^{N} \varphi^{n'}_k \geqq 0$$

ここで φ^n_k は，第 n 生産者が第 k 公共財の生産のために自発的に負担してもよいと表明した，第1私的財によって測られた額を示す。すなわち第 n 生産者は，φ^n_k 単位の第1私的財の価値に相当する額を表明したと考える。仮定5から，消費者の選好は単調なので，少なくともひとつの共通な欲望される財（desired good）が存在する。そのような財は価格が0とはなり得ないので，そのうちのひとつを第1私的財と考えればよい。(6) この $\varphi^n = (\varphi^n_1, \cdots, \varphi^n_K)$ を，第 n 生産者がどのような条件によって決定するかについては，主体的均衡条件の箇所で考察される。政府は，各生産者から報告された $\varphi = (\varphi^1, \cdots, \varphi^N)$ の値から，(3) 式に基づいて課税額を決定する。$\alpha^n = (\alpha^n_1, \cdots, \alpha^n_K)$，$n=0, \cdots, N$は政府の決める定数とし，各公共財について異なった値をとることができる。各生産者に対してこの値は所与である。φ^n_k は負の値をとることもできるが，その下限は定められている。すなわち，他の生産者の $\sum_{n' \neq n} \varphi^{n'}_k$ および α^n_k の値が与えられた場合，T^n_k の値が負になることは許されない。

第 n 生産者の税負担の総額 T^n は

（4）　$T^n = \sum_{k=1}^{K} T^n_k = p_1 \sum_{k=1}^{K} (\alpha^n_k \sum_{n'=1}^{N} \varphi^{n'}_k)$

となる。

第 k 公共財の生産のために，政府によって要素として投入される第 l 私的財の量をv^k_lとすれば，第 k 公共財生産のための要素投入ベクトルは $v^k = (v^k_1, \cdots, v^k_L)$，$v^k \in \mathbb{R}^L$ によって表わされる。第

注（5）　塩沢〔20〕と同様な負担規則である。類似なものとして Drése=Poussin〔3〕，Groves=Ledyard〔5〕。
（6）　desired good に関しては Nikaido〔16〕 pp. 253–4 を参照。

k公共財の生産に要素として投入可能な私的財ベクトルの集合を $F^{N+k}\subset\mathbf{R}^L$ とする。また第k公共財の生産関数を

（5） $y_k=f^{N+k}(v^k)$

とする。f^{N+k} および F^{N+k} について次のような仮定をおく。

仮定 12 f^{N+k} は連続である。

仮定 13 F^{N+k} は閉かつ凸で，下に有界である。

仮定 14 v^{k0}, $v^{k1}\in F^{N+k}$, $0<a<1$ について，もし $f^{N+k}(v^{k0})=f^{N+k}(v^{k1})$ ならば，$f^{N+k}\{av^{k0}+(1-a)v^{k1}\}>f^{N+k}(v^{k1})$ が成り立つ。

政府が第k公共財の生産のために要素として投入する私的財の価値額pv^kは，各生産者からの税負担の総額$\sum_{n=1}^{N}T_k^n$を越えないものとする。すなわち，政府には各公共財の生産についての予算制約

（6） $pv^k\leqq\sum_{n=1}^{N}T_k^n=p_1\sum_{n=1}^{N}\varphi_k^n\quad k=1,\ \cdots,\ K$

が課せられる。

政府はこの制約の下で，技術的な条件である（5）式にしたがい，公共財の生産量を最大化するものとする。このような政府活動については，次のような見解によって正当化され得るであろう。すなわち，各生産者の公共財に対する要求は，この$\sum_{n=1}^{N}\varphi_k^n$によって反映されており，そのもとで最も効率的な生産を行なうことが政府に求められている，ということである。(7)

仮定14などから，（6）式が等号で成立することは明らかである。（5）および（6）式は，政府による公共財の生産規則を表わすものである。そして政府は，これらの生産規則を各消費者に情報として提供する。

各生産者は，これらの生産規則を考慮して自分にとって最適であるようなφの値を決定し，その値を政府へ伝達する。

各生産者からのφの値が決まれば，各公共財の生産水準は，p所与のもとで技術的な条件により一意的に決まる。（3）式からも明らかなように，各生産者はその公共財の生産を0にしてしまうようなφの値を選ぶことも可能である。

ただし，すべての生産者の決定が整合的であるような均衡点に到達するためには，生産者と政府の間で，一種の模索過程のような調整過程が必要となる。この調整過程については，市場均衡解の存在証明を行なう箇所で考察される。

注(7) このような考えは Milleron〔15〕にみられる。

3. 主体的均衡

(i) 消費者

各消費者は，私的財の価格およびその初期保有量を所与とし，予算制約の下で効用最大化行動をとるものとする。

第 i 消費者の所得 m^i は，私的財の初期保有量にその価格をかけたものと，各生産者からの利潤分配とから成る。したがって予算制約式は，

(7) $px^i \leqq m^i = p\omega^i + \sum_{n=1}^{N} \theta^{in}\pi^n$

$$0 \leqq \theta^{in} \leqq 1, \ \sum_{i=1}^{I} \theta^{in} = 1$$

となる。ここで π^n は第 n 生産者の利潤，θ^{in} は π^n の第 i 消費者への分配率を表わす。このとき第 i 消費者にとっての購入可能集合 B^i は，

(8) $B^i(p, \ m^i)$

$= \{x^i \in X^i \mid px^i \leqq m^i\}$

となる。$B^i(p, \ m^i)$ は空集合となる可能性があるが，$B^i(p, \ m^i)$ を非空とするような (p, m^i) の集合を Ω^i と記し，Ω^i に含まれる $(p, \ m^i)$ のみに限定して考えてゆく。

X^i が閉かつ凸であれば，$B^i(p, \ m^i)$ は条件 $px^i \leqq m^i$ が等号を含んでいることから閉であり，$x^{i\prime}$, $x^{i\prime\prime} \in B^i(p, \ m^i)$, $0 < a < 1$ について

(9) $p\{ax^{i\prime} + (1-a)x^{i\prime\prime}\}$

$= apx^{i\prime} + (1-a)px^{i\prime\prime}$

$\leqq am^i + (1-a)m^i$

$= m^i$

となるので凸である。

$B^i(p, \ m^i)$ は Ω^i から X^i への多価関数を定義しているが，その連続性を示す。

仮定7より，私的財の初期保有量は消費可能集合の内点となっているため，予算集合の連続性の証明におけるドブリューの反例が排除される。すなわち(3)式および仮定8より

(10) $\pi^n \geqq 0, \ n = 1, \ \cdots, \ N$

であり，また $p \geq 0$ なので

(11) $px^i < p\omega^i + \sum_{n=1}^{N} \theta^{in}\pi^n$

を満たすような x^i が X^i に必ず含まれることになる。したがって

(12)　$\min pX^i \neq m^i$

の条件が必ず満たされる。

これらのことから次の定理が導かれる。ただしここでは X^i がコンパクト集合である場合をとり扱う。X^i がコンパクト集合とされるならば，B^i がコンパクト値となることは自明である。

定理1　X^i がコンパクトかつ凸であるとき，Ω^i において $B^i(p, m^i)$ は連続である。

証明(6)　(1)　優半連続性の証明

任意の$(p^0, m^{i0}) \in \Omega^i$ に収束する Ω^i の点列を $\{(p^\nu, m^{i\nu})\}$ とし，$x^{i\nu} \in B^i(p^\nu, m^{i\nu})$, $x^{i\nu} \to x^{i0}$ とすれば，X^i は閉集合であるから，$x^{i\nu} \in X^i$ から，$x^{i0} \in X^i$ となる。そして $p^\nu x^{i\nu} \leqq m^{i\nu}$ から $p^0 x^{i0} \leqq m^{i0}$ となることも明らかであるので，$x^{i0} \in B^i(p^0, m^{i0})$ となる。よってB^iは (p^0, m^{i0}) において優半連続となる。

(2)　劣半連続の証明

同じく任意の $(p^0, m^{i0}) \in \Omega^i$ に収束する Ω^i の点列を $\{(p^\nu, m^{i\nu})\}$とし，また$x^{i0} \in B^i(p^0, m^{i0})$ すなわち $x^{i0} \in X^{i0}$, $p^0 x^{i0} \leqq m^{i0}$ とする。以下場合を二つに分けて考察する。

(イ)　$p^0 x^{i0} < m^{i0}$ の場合。この場合は，ある整数 ν^* より大きいすべての ν について $p^\nu x^{i0} < m^{i\nu}$ となるから，$\nu \leqq \nu^*$ については $B^i(p^\nu, m^{i\nu})$ の任意の点を$x^{i\nu}$とし，$\nu > \nu^*$ については $x^{i\nu} = x^{i0}$ とすれば，そのような点列 $\{x^{i\nu}\}$ が $p^\nu x^{i\nu} \leqq m^{i\nu}$ を満たすことは明らかである。よって，すべての ν について $x^{i\nu} \in B^i(p^\nu, m^{i\nu})$ を満たし，かつ $x^{i\nu} \to x^{i0}$ となる点列 $\{x^{i\nu}\}$ がつくられたことになる。

(ロ)　$p^0 x^{i0} = m^{i0}$ の場合。この場合は (11) 式から，$p^0 x^{i\prime} < m^{i0}$ となるような $x^{i\prime}$ が X^i のなかに存在する。それゆえある整数 ν^* より大きいすべての ν について

(13)　$p^\nu x^{i\prime} < m^{i\nu}$ かつ $p^\nu x^{i\prime} < p^\nu x^{i0}$

とすることができる。

そこで $x^{i\prime}$ と x^{i0} を結ぶ直線が $(p^\nu, m^{i\nu})$ の定める所得超平面と交わる点をa^νとする。そのような a^ν は ν^* より大きいすべての ν について一意的に存在し，かつそはは x^{i0} に近づいてゆく。ゆえに $\nu \leqq \nu^*$ については $B^i(p^\nu, m^{i\nu})$ の任意の点を $x^{i\nu}$ とし，$\nu < \nu^*$ については

$a^\nu \in [x^{i\prime}, x^{i0}]$ の場合は $x^{i\nu} = a^\nu$

$a^\nu \notin [x^{i\prime}, x^{i0}]$ の場合は $x^{i\nu} = x^{i0}$

とすれば，$\{x^{i\nu}\}$ はつねに $p^\nu x^{i\nu} \leqq m^{i\nu}$ を満たすから，やはりすべての ν について $x^{i\nu} \in B^i(p^\nu, m^{i\nu})$ を満たし，かつ $x^{i\nu} \to x^{i0}$ となる X^i の点列 $\{x^{i\nu}\}$ がつくられたことになる。

よってB^iは (p^0, m^{i0}) において劣半連続である。　　　　(証明終了)

注(8)　この証明は福岡〔4〕と同様な方法でなされる。〔4〕pp. 59-60

第 i 消費者は，購入可能集合 B^i $(p,\ m^i)$ のなかから効用関数 $u^i(x^i)$ を最大化するような x^i を選択する。B^i はコンパクトであり効用関数 u^i は連続関数なので，u^i の値が最大となるような x^i が B^i のなかに必ず存在する。よって Ω^i からX^iへの関数 $D^i(p,\ m^i)$ が定義できることになる。

次に，この私的財に対する個別需要関数である $D^i(p,\ m^i)$ の性質を考察するが，その際に必要となる周知の「最大値の定理」の主張を述べておく。

最大値の定理(7) βを距離空間Sから距離空間Tへのコンパクト値，連続な集合値関数とする。また $f:S\times T\to\mathbb{R}$ を連続な実関数とすれば

① 関数 $x\longmapsto m(x)\equiv\max\ \{f(x,\ y)\mid y\in\beta(x)\}$ は連続

② 集合値関数 $x\longmapsto\{y\in\beta(x)\mid f(x,\ y)=m(x)\}$ は非空，コンパクト値でかつ優半連続

この「最大値の定理」を援用することにより，$D^i(p,\ m^i)$ の性質として次の定理が導かれる。

定理 2 X^i がコンパクトかつ凸であるとき，Ω^iにおいて$D^i(p,\ m^i)$ は非空，コンパクトかつ凸値であり，また優半連続である。

証明 定理 1 より，$B^i(p,\ m^i)$ は Ω^i においてコンパクト値かつ連続，また効用関数 u^i も連続なので，「最大値の定理」が適用されて，$D^i(p,\ m^i)$ は Ω^i において非空，コンパクト値かつ優半連続となる。

$D^i(p,\ m^i)$ の凸性については，次のとおりである。$x^{i*}\in D^i(p,\ m^i)$，$x^{i*\prime}\in D^i(p,\ m^i)$，$x^{i*\prime\prime}=ax^{i*}+(1-a)x^{i*\prime}$，$0<a<1$ とすれば，$x^{i*}\in B^i(p,\ m^i)$，$x^{i*\prime}\in B^i(p,\ m^i)$ および $B^i(p,\ m^i)$ の凸性から明らかに $x^{i*\prime\prime}\in B^i(p,\ m^i)$。また $B^i(p,\ m^i)$ のなかでの $u^i(x^i)$ の最大値を $u^{i*}(p,\ m^i)$ とすれば，$u^i(x^{i*})=u^i(x^{i*\prime})=u^{i*}(p,\ m^i)$ であるから，仮定 6 によって $u^i(x^{i*\prime\prime})\geqq u^{i*}(p,\ m^i)$。ところが $x^{i*\prime\prime}\in B^i(p,\ m^i)$ であるから$u^i(x^{i*\prime\prime})\leqq u^{i*}(p,\ m^i)$。ゆえに$u^i(x^{i*\prime\prime})=u^{i*}(p,\ m^i)$ となり，$x^{i*\prime\prime}\in D^i(p,\ m^i)$ となる。　　　　（証明終了）

(ii) 生産者

各生産者は，p，生産技術，他の生産者の行動および課税規則における定数α^nを所与とし，利潤最大化行動をとるものとする。第 n 生産者が直接に動かすことのできる変数は，私的財の投入産出ベクトルg^nおよび政府へ伝達する情報φ^nである。

各生産者に与えられる情報は，p，課税負担規則（3）式，公共財の生産関数（5）式およびそ

注(9) 証明については Hildenbrand〔6〕pp. 29–30

の費用条件（6）式，そして他の生産者の表明する $\varphi_k^{n'}$ の総額 $\sum_{n'\neq n}\varphi^{n'}=(\sum_{n'\neq n}\varphi_1^{n'},\ \cdots,\ \sum_{n'\neq n}\varphi_K^{n'})$ である。

このモデルにおける生産者は，他の生産者の行動を所与とするという意味で受動的に行動するが，自分の表明する φ の値が公共財生産に影響を与えるということは認識している。ここではそのような生産者の私的財に対する供給関数と φ の決定関数の導出を行ない，その性質を考察する。

第 n 生産者の利潤 π^n は，g^n に p をかけたものから課税額を減じた値

(14) $\pi^n=pg^n-p_1\alpha^n\sum_{n'=1}^{N}\varphi^{n'}$

となる。現実の生産は公共財 y にも依存しているが，第 n 生産者は y を直接動かすことはできず，$\sum_{n'\neq n}\varphi^{n'}$ が所与のもとで，φ^n を通して間接的に動かす。そして π^n を最大にするような g^n および φ^n を選択する。

p が有界のときに，第 n 生産者がとり得るすべての φ^n ベクトルの集合を $\zeta^n\subset\mathbb{R}^L$ で表わし，そのような φ^n と g^n との組の集合を $F^n\times\zeta^n\subset\mathbb{R}^{L+K}$ とする。もし集合 $F^n\times\zeta^n$ がコンパクトであると仮定するならば，(14) 式の右辺は $(g^n,\ \varphi^n)$ の連続関数なので，π^n を最大にするような $(g^n,\ \varphi^n)\in F^n\times\zeta^n$ が存在する。したがって第 n 生産者の供給対応 $S^n(p,\ \sum_{n'\neq n}\varphi^{n'})$ が定義される。この $S^n(p,\ \sum_{n'\neq n}\varphi^{n'})$ の性質として次の定理が導かれる。

定理 3　$F^n\times\zeta^n$ がコンパクトかつ凸であれば，任意の $(p,\ \sum_{n'\neq n}\varphi^{n'})$ に対して $S^n(p,\ \sum_{n'\neq n}\varphi^{n'})$ は非空，コンパクトかつ凸値であり，また優半連続である。

証明　非空，コンパクト値かつ優半連続性については，前述の「最大値の定理」から明らかである。また仮定9から，$S^n(p,\ \sum_{n'\neq n}\varphi^{n'})$ は1価関数となるので，凸性についても明らかである。

（証明終了）

$S^n(p,\ \sum_{n'\neq n}\varphi^{n'})$ は，$(p,\ \sum_{n'\neq n}\varphi^{n'})$ から $F^n\times\zeta^n$ への1価関数であるが，後の議論のために，$\zeta^n(p,\ \sum_{n'\neq n}\varphi^{n'})$ の F^n への射影と ζ^n への射影をそれぞれ

(15) $S^n(p,\ \sum_{n'\neq n}\varphi^{n'})$

(16) $\Phi^n(p,\ \sum_{n'\neq n}\varphi^{n'})$

と記す。前者は私的財に対する個別供給関数であり，後者は φ^n の決定関数である。

(iii) 政　府

政府は p，生産者から伝達される情報 φ および生産技術を所与とし，収支制約のもとで公共財の

生産量を最大化するものとする。ここでは政府がそのような行動をとる場合の，公共財生産のための要素としての私的財に対する需要関数を導出し，その性質を考察する。

第 k 公共財の生産における政府の要素購入可能集合 B^k は，p および生産者からの情報 $\sum_{n=1}^{N}\varphi_k^n=\varphi_k$ に依存する。したがって政府の収支制約式（6）から，B'^k は

(17) $B'^k(p,\ \varphi_k)=\{v^k\in F^{N+k}\mid pv^k\leqq p_1\varphi_k\}$

と表わされる。

$B'^k(p,\ \varphi_k)$ を非空とするような $(p,\ \varphi_k)$ の集合を T^k と記し，T^k に含まれる $(p,\ \varphi_k)$ のみに限定して考えてゆく。

B'^k の閉性および凸性は，消費者の購入可能集合 $B^i(p,\ m^i)$ の場合と同様に示される。

B'^k の連続性についても同様であるが，ここにおいても F^{N+k} がコンパクト集合である場合をとり扱う。

定理 4　F^{N+k} がコンパクトかつ凸であるとき，もし T^k のある点 $(p^0,\ \varphi_k^0)$ において $\min p^0 F^{N+k}\neq p_1^0\varphi_n^0$ であるならば，$B'^k(p,\ \varphi_k)$ は $(p^0,\ \varphi_k^0)$ において連続である。

証明　定理 1 の証明と同様に行なう。　　　　（証明終了）

ここで仮定されている $\min pF^{N+k}<p_1\varphi_k$ の条件は，各生産者の表明する $p_1\sum_{n=1}^{N}\varphi_k^n$ の値が，第 k 公共財の生産に必要な最低限の費用よりも大きいことを意味している。

政府は $B'^k(p,\ \varphi_k)$ のなかから，公共財の生産関数 $f^{N+k}(v^k)$ を最大化するような v^k を選ぶ。F^{N+k} がコンパクトである場合には B'^k もコンパクトであり，仮定 12 から f^{N+k} は連続であるので，f^{N+k} の値が最大となるような v^k が B'^k のなかに必ず存在する。したがって，$(p,\ \varphi_k)\in T^k$ のそれぞれに空でない均衡点 v^{k*} の集合が対応し，T^k から F^{N+k} への関数 $D'^k(p,\ \varphi_k)$ が定義できる。これが第 k 公共財生産のための，政府の要素需要関数である。

$D'^k(p,\ \varphi_k)$ の性質として，次の定理が導かれる。

定理 5　F^{N+k} がコンパクトかつ凸であるとき，もし T^k のある点 $(p^0,\ \varphi_k^0)$ において $\min p^0 F^{N+k}\neq p_1^0\varphi_k^0$ であるならば，$D'^k(p,\ \varphi_k)$ は $(p^0,\ \varphi_k^0)$ において非空，コンパクトかつ凸値であり，また優半連続である。

証明　定理 2 の証明と同様に行なう。　　　　（証明終了）

4. 市場均衡

（i） 市場均衡条件

主体的均衡の考察によって，各私的財に対する需要関数，供給関数およびφの決定関数が導かれた。それらの関数は，pおよび他の生産者の表明するφの値をパラメターとしたものであった。したがって市場においては，各主体の行動を整合的ならしめるような，pおよびφの値が決定されなければならない。

ここで，$x\equiv\sum_{i=1}^{I}x^i$，$\omega\equiv\sum_{i=1}^{I}\omega^i$，$g\equiv\sum_{n=1}^{N}g^n$，$v\equiv\sum_{k=1}^{K}v^k$，$X\equiv\sum_{i=1}^{I}X^i$，$F\equiv\sum_{n=1}^{N}F^n$，$F'\equiv\sum_{k=1}^{K}F^{N+k}$，と表わし，私的財の超過需要を $z\equiv x+v-(g+\omega)$ と定義すると，私的財の市場均衡条件は次のようになる。

(18)　$z\leqq 0$，$pz=0$

またφについては，各生産者の決定関数にはpだけでなく，他の生産者の表明する値がパラメターとして入っているので，すべての生産者について整合的な組合せが決定されなければならない。その条件は次のように表わされる。

(19)
$$\Phi^1(p,\ \sum_{n\neq 1}\varphi^n)-\varphi^1=0$$
$$\vdots$$
$$\Phi^N(p,\ \sum_{n\neq N}\varphi^n)-\varphi^N=0$$

この状態は，すべての生産者が自分の best replay 関数によって決定された戦略をとったものであり，ナッシュ型の均衡となっている。(10)

したがってこのモデルにおける均衡解の存在問題は，個別主体の最大化行動に立脚し，そこから導かれた私的財の社会的超過需要について市場均衡条件を満足せしめ，同時にφについては (19) 式にみられるようなナッシュ型の均衡状態を実現するようなpおよびφが存在するか否かを考察する問題となる。

このモデルにおける均衡解は，次の条件をすべて満足する $((x^{i*}),\ (g^{n*},\ \varphi^{n*}),\ (v^{k*}),\ p^*)$ の組である。

（a） $\{x^i\in X^i\ p^*x^i\leqq p^*\omega^i+\sum\theta^{in}(p^*g^{n*}-p_1^*\alpha^n\sum_{n'=1}^{N}\varphi^{n'*})\}$
　　のようなすべての x^i に対して
　　$u^i(x^{i*})\geqq u^i(x^i)\qquad i=1,\ \cdots,\ I$

（b） $(g^n,\ \varphi^n)\in(F^n,\ S^n)$ のようなすべての $(g^n,\ \varphi^n)$ に対し

注(10)　best replay 関数については，例えば Roberts〔17〕p. 248 を参照。

$$p^* g^{n*} - p_1^* \alpha^n \varphi^{n*} - p_1 \alpha^n \sum_{n' \neq n} \varphi^{n'*} \geqq p^* g^n - p_1^* \alpha^n \varphi^n - p_1 \alpha^n \sum_{n' \neq n} \varphi^{n'*} \quad n=1, \cdots, N$$

（c） $\{v^k \in F^{N+K},\ p^* v^k \leqq p_1^* \sum_{n=1}^{N} \varphi^{n*}\}$ となるすべての v^k に対し

$$f^{N+k}(v^{k*}) \geqq f^{N+k}(v^k) \quad k=1, \cdots, K$$

（d） $z^* \equiv \sum_{i=1}^{I} x^{i*} + \sum_{k=1}^{K} v^{k*} - \sum_{n=1}^{N} g^{n*} - \sum_{i=1}^{I} \omega^i \leqq 0$

$$p^* z^* = 0$$

（e） $\Phi\ (p^*, \sum_{n' \neq n} \varphi^{n'*}) - \varphi^{n*} = 0 \quad n=1, \cdots, N$

(ii) 超過需要関数，価格調整関数および課税額決定関数

消費者の私的財に対する需要関数

$$D^i\ (p,\ p\omega^i + \sum_{n=1}^{n} \theta^{in}\ (pg^n - p_1 \alpha^n \sum_{n=1}^{N} \varphi^n))\ i=1, \cdots, I$$

は p と $\sum_{n=1}^{N} \varphi^n$ の関数である。

生産者の私的財に対する供給関数および φ の決定関数

$$S^n\ (p, \sum_{n' \neq n} \varphi^{n'}),$$

$$\Phi\ (p, \sum_{n' \neq n} \varphi^{n'}) \quad n=1, \cdots, N$$

は p と $\sum_{n' \neq n} \varphi^{n'}$ の関数である。

そして政府による要素需要関数

$$D'^k(p,\ \varphi_k) \qquad k=1, \cdots, K$$

は p と φ_k の関数である。

これらはいずれも p に関して0次同次関数なので，p を基本単体 $\Delta \equiv \{p \mid p \geq 0,\ \sum_{l=1}^{L} p_l = 1\}$ に基準化して考える。また各生産者のとり得る φ^n の集合を $\zeta \equiv \zeta^1 \times \cdots \times \zeta^N \subset \mathbf{R}^{NK}$，$\zeta$ の凸包を $\bar{\zeta}$ とする。

このとき，私的財に対する社会的超過需要関数

(20) $E(p,\ \varphi)$

$$\equiv \sum_{i=1}^{I} D^i(p,\ \varphi) + \sum_{k=1}^{K} D'^k(p,\ \varphi) - \sum_{n=1}^{N} S^n(p,\ \varphi) - \omega$$

が $\Delta \times \zeta$ から $Z \equiv X + F' - F - \omega$ への関数として定義される。

X^i，F^n，F^{N+k}，ζ^n はいずれもコンパクトではないが，$x^i \in X^i$，$g^n \in F^n$，$v^k \in F^{N+k}$ のうち，経済全体についての実現可能性 $z \equiv \sum_{i=1}^{I} x^i + \sum_{k=1}^{K} v^k - \sum_{n=1}^{N} g^n - \omega \leqq 0$ を満たすようなもののみを考え，そのような，x^i，g^n，v^k の集合をそれぞれ $\hat{X}^i$，$\hat{F}^n$，$\hat{F}^{N+k}$ と記すとする。このとき $\hat{X}^i$，$\hat{F}^n$，$\hat{F}^{N+k}$ の性質として次の定理が導かれる。

定理6[(11)] $\hat{X}^i$, $\hat{F}^n$, $\hat{F}^{N+k}$ は有界集合となる。

証明 $\hat{X}^i$に含まれる x^i については定義により

(21) $x^i \leqq -\sum_{i' \neq i} x^{i'} - \sum_{k=1}^{K} v^k + \sum_{n=1}^{N} g^n + \omega \quad (x^{i'} \in X^{i'},\ v^k \in F^{N+k},\ g^n \in F^n)$

であり，再び定義により $g^n \in \hat{F}^n$，かつ仮定1よりある $\bar{x}^i$ に対して $x^i \geqq \bar{x}^i$ であるから，

(22) $\bar{x}^i \leqq x^i \leqq -\sum_{i' \neq i} x^{i'} - \sum_{k=1}^{K} v^k + \sum_{n=1}^{N} g^n + \omega \quad (g^n \in \hat{F}^n)$

となる。また $\hat{F}^{N+k}$ に含まれる v^k については

(23) $v^k \leqq -\sum_{i=1}^{I} x^i - \sum_{k' \neq k} v^{k'} + \sum_{n=1}^{N} g^n + \omega \quad (x^i \in X^i,\ v^{k'} \in F^{N+k},\ g^n \in F^n)$

であり，定義により $g^n \in \hat{F}^n$，かつ仮定13よりある $\bar{v}^k$ に対して $v^k \geqq \bar{v}^k$ であるから，

(24) $\bar{v}^k \leqq v_k \leqq -\sum_{i=1}^{I} x^i - \sum_{k' \neq k} v^{k'} + \sum_{n=1}^{N} g^n + \omega \quad (g^n \in \hat{F}^n)$

となる。ゆえに $\hat{F}^n$ が有界でありさえすれば，$\hat{X}^i$ および $\hat{F}^{N+k}$ の有界性は明らかである。

そこで$\hat{F}^n$の有界性の証明を行なう。いま結論を否定して，ある n' について $\hat{F}^{n'}$ が有界でなかったとしてみよう。すると X^i, F^{N+k}, F^n の点列 $\{x^{i\nu}\}$, $\{v^k\}$, $\{g^{n\nu}\}$ で，

(25) $\sum_{n=1}^{N} g^{n\nu} \geqq \sum_{i=1}^{I} x^{i\nu} + \sum_{k=1}^{K} v^k - \omega,\ x^{i\nu} \in X^i,\ v^{k\nu} \in F^{N+k},\ g^{n\nu} \in F^n$

(26) $\lim_{\nu \to \infty} \| g^{n'\nu} \| = \infty$

となるものが存在する。$x^{i\nu}$, $v^{k\nu}$ については前記のように，$x^{i\nu} \geqq \bar{x}^{ii}$, $v^{k\nu} \geqq \bar{v}^k$ となるような $\bar{x}^i$, $\bar{v}^k$ が選べるから，(25) 式はさらに

(27) $\sum_{n=1}^{N} g^{n\nu} \geqq \sum_{i=1}^{I} \bar{x}^i + \sum_{k=1}^{K} \bar{v}^n - \omega$

と書きなおすことができる。

ここで $\mu^\nu = \max \| g^{n\nu} \|$ と定義すれば，$\| g^{n'\nu} \| \to \infty$から十分大きな ν については当然 $\mu^\nu \geqq 1$，すなわち$\dfrac{1}{\mu^\nu} \leqq 1$となり，ゆえに仮定8から$\dfrac{1}{\mu^{n\nu}} g^{n\nu} + (1-\dfrac{1}{\mu^\nu})0 \in F^n$，すなわち$\dfrac{g^{n\nu}}{\mu^\nu} \in F^n$ となる。他方 μ^ν の定義から，すべての ν について $\left\| \dfrac{g^{n\nu}}{\mu^\nu} \right\| \leqq 1$ であるから，$\left\{ \dfrac{g^{n\nu}}{\mu^\nu} \right\}$ は集積点をもち，ゆえにそのひとつを g^{n0} とすれば，$\left\{ \dfrac{g^{n\nu}}{\mu^\nu} \right\}$ の適当な部分列を選んで

(28) $\lim_{q \to \infty} \dfrac{g^{n\nu_q}}{\mu^{\nu_q}} = g^{n0}$

とすることができる。F^n は閉であるから $g^{n0} \in F^n$ であり，また (27) 式から

(29) $\sum \dfrac{g^{n\nu}}{\mu^\nu} \geqq \dfrac{\bar{x} - \omega}{\mu^\nu}$

が得られるので，$\lim_{\nu \to \infty} \mu^\nu = \infty$ を考慮して

(30) $\sum_{n=1}^{N} g^{n0} \geqq 0$

注(11) この証明は福岡〔4〕pp. 148–150 と同様な方法でなされる。ただし〔4〕では，$\hat{F}^{N+k}$ は入っていない。

となる。ところが仮定10および11から，$\sum_{n=1}^{n} g^{n0} \in F$ なら

(31)　$\sum_{n=1}^{N} g^{n0}=0$

となるのでなくてはならない。そこで任意の n'' について

(32)　$\sum_{n \neq n''} g^{n0}=-g^{n''0}$

のように分けて記せば，すべての n について $0 \in F^n$ であるところから，

(33)　$\sum_{n \neq n''} g^{n0} \in F$

したがって

(34)　$g^{n''0} \in -F$

となると同時に

(35)　$g^{n''0} \in F$

となって

(36)　$g^{n''0} \in Y \cap (-Y)$

となる。ところが仮定10から，これは

(37)　$g^{n''0}=0$

の場合にのみ許されるから，結局どの n'' についても $\lim_{q \to \infty} \frac{g^{n''\nu_q}}{\mu^{\nu_q}}=g^{n''0}=0$ が成り立って，

(38)　$\lim_{q \to \infty} \left\| \frac{g^{n''\nu_q}}{\mu^{\nu_q}} \right\| = \| g^{n''0} \| =0$

ということになる。

他方 μ^{ν_q} の定義から，それぞれの q について

(39)　$\mu^{\nu_q}= \| g^{n''\nu_q} \|$

となるような n'' が必ずなくてはならず，しかも n の個数は有限個であるから，(38) 式を満たすような n'' で $q \to \infty$ の過程をつうじて無限回現われるものがなくてはならない。そしてそのような n'' については $\left\| \frac{g^{n''\nu_q}}{\mu^{\nu_q}} \right\| =1$ なのであるから $\left\{ \frac{g^{n''\nu_q}}{\mu^{\nu_q}} \right\}$ のなかからそのような q のみを選んで部分列をつくれば，それもまた $g^{n''0}$ に収束して $\| g^{n''0} \| =1$ となる。これは (38) 式に相反するから，$\hat{F}^{n'}$ が非有界という当初の仮定は不合理である。

同様に n' 以外のどの n についても $\hat{F}^n$ は有界となるのでなくてはならない。　(証明終了)

$\hat{X}^i$，$\hat{F}^n$，$\hat{F}^{N+k}$ の有界性が知られたとすれば，実数 $c>0$ を適当な大きさに選んで，すべての $\hat{X}^i$，$\hat{F}^n$，$\hat{F}^{N+k}$ を内部に含むような超立方体 $K=\{ k \mid |k_l| \leq c \text{ for all } l\}$ をつくることができる。そこで，X^i，F^n，F^{N+k} とそのような K との共通部分をそれぞれ

(40)　$\tilde{X}^i=X^i \cap K$，$\tilde{F}^n=F_n \cap K$，$\tilde{F}^{N+k}=F^{N+k} \cap K$

で記し，X^i，F^n，F^{N+k} を $\tilde{X}^i$，$\tilde{F}^n$，$\tilde{F}^{N+k}$ で置き換えた体系について均衡点の存在を証明する。

そしてその均衡点が，$\tilde{X}^i$，$\widetilde{F}^n$，$\widetilde{F}^{N+k}$ をもとの X^i，F^n，F^{N+k} に復元した場合もなお均衡点たりつづけることを示す。

$\tilde{X}^i$，$\widetilde{F}^n$，$\widetilde{F}^{N+k}$ は，そのつくり方からコンパクト凸である。また仮定7から X^i は $x^{i0}<\omega^i$ となるような x^{i0} を必ずもち，かつ仮定8からF^n は0を含むから，$\tilde{X}^i$は x^{i0} を含む。同様にして $\widetilde{F}^n$ は0を含む。

X^i，F^n，F^{N+k} を $\tilde{X}^i$，$\widetilde{F}^n$，$\widetilde{F}^{N+k}$ で置き換え，後者への需要関数，供給関数および政府の要素需要関数をそれぞれ

$$\widetilde{D}^i\ (p,\ p\omega^i+\sum_{n=1}^{n}\theta^{in}(pg^n-p_1\alpha^n\sum_{n=1}^{N}\varphi^n))\quad i=1,\ \cdots,\ I$$

$$\widetilde{S}^n(p,\ \sum_{n'\neq n}\varphi^{n'}),\ n=1,\ \cdots,\ N$$

$$\widetilde{D}'^k(p,\ \varphi_k),\quad k=1,\ \cdots,\ K$$

で記すと，$\Delta\times S$ から $\tilde{Z}\equiv\sum_{i=1}^{I}\tilde{X}^i+\sum_{k=1}^{K}\widetilde{F}^{N+k}-\sum_{n=1}^{N}\widetilde{F}^n-\omega$への，私的財に対する社会的な超過需要関数

(41) $\widetilde{E}(p,\ \varphi)$

$$\equiv\sum_{i=1}^{I}\widetilde{D}^i(p,\ \varphi)+\sum_{k=1}^{K}\widetilde{D}'^k(p,\ \varphi)-\sum_{n=1}^{N}\widetilde{S}^n(p,\ \varphi)-\omega$$

が定義される。定理3によって，任意のpとφに対して $\widetilde{S}^n(p,\ \varphi)$ が非空であり，(3) 式および$0\in\widetilde{F}^n$ から非負の利潤が定まり，したがって消費者の所得が決まる。$x^{i0}\in\tilde{X}^i$ から $\widetilde{D}^i(p,\ \varphi)$ が定義され，また φ^n が決定されているので $\widetilde{D}'^k(p,\ \varphi)$ が定義される。

したがって定理2，3および5より，$\widetilde{E}(p,\ \varphi)$ は非空，コンパクトかつ凸値であり，また優半連続である。

次に価格調整関数 $G(p,\ z)$ として

(42) $$G_l(p,\ z)=\frac{p_l+\max(hz_l,0)}{\sum_{m=1}^{L}[p_m+\max(kz_m,0)]}\quad k>0,\ l=1,\ \cdots,\ L$$

という形態のものを考える。このような形態であれば，p_1 の値が調整過程において 0 となる心配はない。

最後に社会全体でのφの決定関数を $\Phi=(\Phi^1,\ \cdots,\ \Phi^N)$ と定義し，その経済的意味を考える。

第n生産者は，pと$\sum_{n'\neq n}\varphi^{n'}$をパラメターとして φ^n を決定する。同時に他の生産者も同じような行動をとるのであるから，はじめの決定において $\sum_{n'\neq n}\varphi^{n'}$ は第n生産者の予想値である。そのようにして決定されたφ^n を政府に報告する。政府は各生産者が他人の行動を予想して決定した値の総額 $\sum_{n=1}^{N}\varphi^n$ を現実に表明された値として知ることができる。そしてこの$\sum_{n=1}^{M}\varphi^n$ の値を各生産者に知らせる。すると各生産者は自分が第1回目に表明した値と課税規則から，第1回目における$\sum_{n'\neq n}\varphi^{n'}$の値を知ることができる。その値は自分が最初に予想していたものと一致する保証はなく，各生産者は政府が表明した第1回目における現実の値をパラメターとして再び決定を行なう。このように

して決定された値を政府に報告する。政府は，この第2回目における総額をまた各生産者に知らせる。このような過程をくり返し，各生産者の表明した値が，前の期のものと完全に一致したところが均衡点である。

X^i，F^n，E^{N+k} を $\tilde{X}^i$，$\widetilde{F}^n$，$\widetilde{F}^{N+k}$ で置き換えた体系での φ の決定関数は

(43) $\tilde{\Phi}(p,\ \varphi)$

$$\equiv(\Phi^1(p,\ \varphi),\ \cdots,\ \Phi^N(p,\ \varphi))$$

と表わされる。定理3および $\widetilde{E}(p,\ \varphi)$ を定義した箇所での考察から，$\Phi(p,\ \varphi)$ は非空コンパクトかつ凸値であり，また優半連続である。

したがってこれまでの　論から，私的財に対する超過需要関数，価格調整関数および φ の決定関数を組合せた関数

(44) $G(p,\ \varphi)\times\widetilde{E}(p,\ \varphi)\times\tilde{\Phi}(p,\ \varphi)$

は，コンパクトな凸集合 $\Delta\times\tilde{Z}\times\widetilde{S}$ から，同じ $\Delta\times\tilde{Z}\times\zeta$ への非空，コンパクトかつ凸値の優半連続写像となる。ゆえに，次の「角谷の不動点定理」がこの写像に適用される。

角谷の不動点定理　S を n 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の非空，コンパクト，凸の集合とし，φ を S の点に同じく S の非空，閉，凸の部分集合を対応させる優半連続な写像とするとき，不動点 $x^*\in\varphi(x^*)$ が存在する。

よって写像 $G(p,\ z)\times\widetilde{E}(p,\ \varphi)\times\tilde{\Phi}(p,\ \varphi)$ には必ず不動点 $(p^*,\ z^*,\ \varphi^*)$ が存在し，したがって $p^*\in G(p^*,\ z^*)$，$z^*\in\widetilde{E}(p^*,\ \varphi^*)$，$\varphi^*\in\tilde{\Phi}(p^*,\ \varphi^*)$ が成立する。

(iii) 均衡解の存在

$\tilde{\Phi}(p,\ \varphi)$ は1価関数なので $\varphi^*\in\tilde{\Phi}(p^*,\ \varphi^*)$ から

(45)
$$\begin{aligned}&\tilde{\Phi}^1(p^*,\ \sum_{n'\neq 1}\varphi^{n'*})-\varphi^{1*}=0\\&\quad\vdots\\&\tilde{\Phi}^I(p^*,\ \sum_{n'\neq 1}\varphi^{n'*})-\varphi^{N*}=0\end{aligned}$$

が成立する。

次に，不動点における消費者の予算制約式

(46) $p^*x^{i*}=p^*\omega^i+\sum_{n=1}^{N}\theta^{in}\ (p^*g^{n*}-p_1^*\alpha^n\sum_{n=1}^{N}\varphi^{n*})$

をすべての消費者について合計すると，

(47) $p^*\sum_{i=1}^{I}x^{i*}=p^*\sum_{i=1}^{I}\omega^{i*}+p^*\sum_{n=1}^{N}g^{n*}-p_1^*\sum_{n=1}^{N}\varphi^{n*}$

が得られる。これに政府の収支制約

(48) $p^*\sum_{k=1}^{K}v^{k*}=p_1^*\ \sum_{n=1}^{N}\varphi^{n*}$

を代入すると，

(49) $p^*(x^*+v^*-g^*-\omega^*)$

$=p^*z^*$

$=0$

となる。

また $p^*\in G(p^*, z^*)$ から

(50) $p_l^*=\dfrac{p_l^*+\max(kz_l^*,0)}{1+\sum_{m=1}^{L}\max(kz_m^*,0)}$

が成立するので，$\sum_{m=1}^{L}\max(kz_m^*, 0)=\beta^*$ とおけば

(51) $\beta^*p_l^*=\max(kz_l^*, 0)$

ゆえに z_l^* を両辺にかけて足しあわせれば

(52) $\beta^*\sum_{l=1}^{L}p_l^*z_l^*=\sum_{l=1}^{L}z_l^*\ \max(kz_l^*, 0)$

となり，(49) 式から

(53) $0=\sum_{l=1}^{L}z_l^*\ \max(kz_l^*, 0)=\sum_{l=1}^{L}z_l^*\ \max(k_l^*, 0)$

となって

(54) $\sum_{l=1}^{L}[\max(z_l^*, 0)]^2=0$

が得られる。したがって

(55) $z^*\leqq 0$

となるのでなければならない。

よって (45)，(49)，(55) 式から，(p^*, z^*, φ^*) は市場均衡条件(18) および(19)式を満たす。

最後にこの (p^*, z^*, φ^*) が，$\hat{X}^i$，$\hat{F}^n$，$\hat{F}^{N+k}$ をもとの X^i，F^n，F^{N+k} に復元した場合でも均衡点たりつづけることを示す。そのためには，x^{i*}，g^{n*}，v^{k*} および φ^{n*} が，本来の $D^i(p^*, \varphi^*)$，$S^n(p^*, \varphi^*)$，$D'^k(p^*, \varphi^*)$ および $\Phi^n(p^*, \varphi^*)$ に含まれることをいえばよい。

いま x^{i*} が $D^i(p^*, \varphi^*)$ に含まれなかったとしよう。すると $x^{i\prime}\in X^i$，$p^*x^{i\prime}\leqq p^*\omega^i+\sum_{n=1}^{N}\theta^{in}(p^*g^{n*}-p_1^*\alpha^n\sum_{n=1}^{N}\varphi^{n*})$ のような $x^{i\prime}$ に対して $u^i(x^{i\prime})>u^i(x^{i*})$ が成立するから，$x^i(a)\equiv ax^{i\prime}+(1-a)x^{i*}$，$0<a<1$ と定義すれば，そのようなすべての a について $p^*x^i(a)\leqq p^*\omega^i+\sum_{n=1}^{N}\theta^{in}(p^*g^{n*}-p_1^*\alpha^n\sum_{n=1}^{N}\varphi^{n*})$ であり，仮定1より $x^i(a)\in X^i$，また仮定6より $u^i(x^i(a))>u^i(x^{i*})$。ところが a の値を限りなく0に近づければ，$x^i(a)$ は限りなく x^{i*} に近づき，しかも x^{i*} は $\hat{X}^i$ に属するところから $\tilde{X}^i$ の内点になっているから，結局 $x^i(a)$ を $\tilde{X}^i$ に含ましめることができる。しかしこれ

は $x^{i*}\in D^i(p^*, \varphi^*)$ に反するので不合理である。

同様にして，v^{k*} が $D'^k(p^*, \varphi^*)$ に含まれなかったとするならば，$v^{k\prime}\in F^{N+k}$，$p^*v^{k\prime}\leqq p_1^*\varphi_k^*$ のようなある $v^{k\prime}$ に対して $f^{N+k}(v^{k\prime})>f^{N+k}(v^{k*})$ が成立するから，$v^k(a)\equiv av^{k\prime}+(1-a)v^{k*}$，$0<a<1$ と定義することによって，$v^k(a)\in F^{N+k}$，$p^*v^*(a)\leqq p_1^*\varphi_k^*$ となり，また仮定14より $f^{N+k}(v^k(a))>f^{N+k}(v^{k*})$。ところが前と同様の議論によって $v^k(a)$ を $\widetilde{F}^{N+k}$ に含ましめることができるので不合理である。

同様にして，(g^{n*}, φ^{n*}) が $S(p^*, \varphi^*)\equiv(S^n(p^*, \varphi^*), \Phi^n(p^*, \varphi^*))$ に含まれなかったとするならば，$g^{n\prime}\in F^n$，$\varphi^{n\prime}\in S^n$ のような $(g^{n\prime}, \varphi^{n\prime})$ に対して，$p^*g^{n\prime}-p_1^*\alpha^n\sum_{j\neq n}\varphi^{j*}+\varphi^{n\prime})>p^*g^{n*}-p_1^*\alpha^n(\sum_{j\neq n}\varphi^{j*}+\varphi^{n*})$ が成立するから，$g^n(a)\equiv ag^{n\prime}+(1-a)g^{n*}$，$\varphi^n(a)\equiv a\varphi^{n\prime}+(1-a)\varphi^{n*}$，$0<a<1$ と定義することによって，$p^*q^n(a)-p_1^*\alpha^n(\sum_{j\neq n}\varphi^{j*}-\varphi^n(a))>p^*g^{n*}-p_1^*\alpha^n(\sum_{j\neq n}\varphi^{j*}+\varphi^n)$ であり，仮定8から $g^n(a)\in F^n$，また $\varphi^n(a)\in S^n$ である。ところが前と同様の議論によって，$g^n(a)$ を $\widetilde{F}^n$ に含ましめることができるので不合理である。

したがって (p^*, z^*, φ^*) は，本来の体系の均衡点であり，その存在が証明された。

5. パレート最適性

これまでの議論から，このモデルにおける均衡解の存在が明らかになったが，さらにそのパレート最適性を示す。ここで追加的な仮定として次のものをおく。

仮定15 $u^i(x^i)$，$f^n(g^n, -y)$，$f^{N+k}(v^k)$ は微分可能である。

このもとで次の定理が導かれる。

定理 7 このモデルにおいて，市場均衡点における資源配分はパレート最適である。

証明 均衡点であるので，資源配分が達成可能であることは明らかである。したがってパレート最適の条件を求めるためには，$I-1$ 人の消費者の効用水準をある一定の値におき，各私的財の需給均衡条件と，各私的財および各公共財の生産における技術的な制約のもとで，残りの1人の消費者の効用を最大化するための条件を求めればよい。

第 i 消費者以外の消費者の効用水準を $u^j=\bar{u}^j$，$j\neq i$ とおき，次のようなラグランジュ関数 L をつくる。

(56) $L=u^i(x_1^i, \cdots, x_L^i)$

$\quad -\sum_{j\neq i}\lambda^j\{\bar{u}^j-u^j(x_1^j, \cdots, x_L^j)\}$

$$-\sum_{n=1}^{N}\delta^{n}\{0-f^{n}(g_{1}^{n}, \cdots, g_{L}^{n}, -y_{1}, \cdots, -y^{K})\}$$
$$-\sum_{k=1}^{K}\mu^{k}\{y_{k}-f^{N+k}(v_{1}^{k}, \cdots, v_{L}^{k})\}$$
$$-\sum_{l=1}^{L}\sigma^{l}\{\sum_{i=1}^{I}(\omega_{l}^{i}-x_{l}^{i})+\sum_{n=1}^{N}g_{l}^{n}-\sum_{k=1}^{K}v_{l}^{k}\}$$

ここで λ^{j}, δ^{n}, μ^{k}, σ^{l} はラグランジュ乗数である。(56) 式を x_{l}^{i}, x_{l}^{j}, g_{l}^{n}, v_{l}^{k}, y_{k} で偏微分してゼロとおき，ラグランジュ乗数を消去すると次の条件が得られる。

(57)
$$\frac{\partial u^{1}/\partial x_{l}^{1}}{\partial u^{1}/\partial x_{m}^{1}}=\cdots=\frac{\partial u^{I}/\partial x_{l}^{I}}{\partial u^{I}/\partial x_{m}^{I}}$$
$$=\frac{\partial f^{1}/\partial g_{l}^{1}}{\partial f^{1}/\partial g_{m}^{1}}=\cdots=\frac{\partial f^{N}/\partial g_{l}^{N}}{\partial f^{N}/\partial g_{m}^{N}}$$
$$=\frac{\partial f^{N+1}/\partial v_{l}^{1}}{\partial f^{N+1}/\partial v_{m}^{1}}=\cdots=\frac{\partial f^{N+K}/\partial v_{l}^{K}}{\partial f^{N+K}/\partial v_{m}^{K}}$$
$$l,\ m=1, \cdots, L$$
$$l\neq m$$

(58)
$$\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial f^{n}/\partial y_{k}}{\partial f^{n}/\partial g_{l}^{n}}=\frac{1}{\partial f^{N+k}/\partial v_{l}^{k}}$$
$$l=1, \cdots, L$$
$$k=1, \cdots, K$$

これらの条件を，各主体の主体的均衡条件が満たすことを示せばよい。

消費者は予算制約の下で効用最大化行動をとるので，次のようなラグランジュ関数 L^{i} の最大化のための条件を求める。

(59)
$$L^{i}=u^{i}(x_{1}^{i}, \cdots, x_{L}^{i})$$
$$-\lambda(\sum_{l=1}^{L}p_{l}\omega_{l}^{i}+\sum_{n=1}^{N}\theta^{in}\pi^{n}-\sum_{l=1}^{L}p_{l}x_{l}^{i})$$

(59) 式を x_{l}^{i} で偏微分してゼロとおき，ラグランジュ乗数を消去すると次の条件が得られる。

(60)
$$\frac{\partial u^{i}/\partial x_{l}^{i}}{\partial u^{i}/\partial x_{m}^{i}}=\frac{p_{l}}{p_{m}}$$
$$l,\ m=1, \cdots, L$$
$$l\neq m$$

生産者については，公共財の生産規則と他人の φ の総額に関する情報は既知なので，次のようなラグランジュ関数L^{n}の最大化のための条件を求める。

(61)
$$L^{n}=\sum_{l=1}^{L}p_{l}g_{l}^{n}-p_{1}\sum_{k=1}^{K}\alpha_{k}^{n}\sum_{n'=1}^{N}\varphi_{k}^{n'})$$
$$-\lambda\{0-f^{n}(g_{1}^{n}, \cdots, g_{L}^{n}, -y_{1}, \cdots, -y_{K})\}$$
$$-\sum_{k=1}^{K}\delta_{k}^{n}\{y_{k}-f^{N+k}(v_{k1}^{n}, \cdots, v_{kL}^{n})\}$$

$$-\sum_{n=1}^{K}\mu_k^n\{\sum_{l=1}^{L}p_l v_{kl}^n - p_1\sum_{n'=1}^{N}\varphi^{n'}\}$$

ここで v_{kl}^n は，第 n 生産者が最適と考える v_l^k の量であり， v_{kl}^n および y は φ^n を通じて間接的に動かされる。(61) 式を g_l^n，y_k，v_{kl}^n，φ_k^n で偏微分してゼロとおき，ラグランジュ乗数を消去すると次の条件が得られる。

(62) $$\frac{\partial f^n/\partial g_l^n}{\partial f^n/\partial g_m^n}=\frac{p_l}{p_m}$$

$l,\ m=1,\ \cdots,\ L$

$l\neq m$

(63) $$\frac{\partial f^n/\partial y_k}{\partial f^n/\partial g_l^n}=\frac{\alpha_k^n}{\partial f^n/\partial v_{kl}^n}$$

$l=1,\ \cdots,\ L,$

$k=1,\ \cdots,\ K$

政府については，次のラグランジュ関数 L^k の最大化のための条件を求める。

(64) $$L^k=f^{N+k}(v_1^k,\ \cdots,\ v_L^k)$$
$$-\lambda(p_1\sum_{n=1}^{N}\varphi_k^n-\sum_{l=1}^{L}p_l v_l^k)$$

これを v_l^k で偏微分してゼロとおき，ラグランジュ乗数を消去すると次の条件が得られる。

(65) $$\frac{\partial f^{N+k}/\partial v_l^k}{\partial f^{N+k}/\partial v_m^k}=\frac{p_l}{p_m}$$

$l,\ m=1,\ \cdots,\ L$

$l\neq m$

ところが各主体にとって私的財の価格は共通なので，(60)，(62)，(65) 式から，パレート最適の条件 (57) 式が満たされる。また均衡においては v_{kl}^n の値はすべての生産者について一致し，$\sum_{n=1}^{N}\alpha_k^n=1$ なので，(63) 式を n について合計すると，パレート最適の条件 (58) 式が得られる。

(証明終了)

6. 結　び

これまでの分析から，いくつかの限定された仮定のもとでは，すべての生産者に影響を与えるような公共的生産要素を含む経済であっても，政府の適当な課税政策により，主体的なインセンティブに基づく，パレート最適な資源配分が達成可能であることが示された。ただし α^n が固定されているので分配問題は解決されていない。

公共的生産要素であると同時に，等量消費財としての性質をも備えているような公共財について

の総合的な分析は，別の機会に譲りたい。

参　考　文　献

〔1〕 Buchanan, J. M., *The Demand and Supply of Public Goods*, Rand McNally & Company, 1968

〔2〕 Debreu, G., *Theory of Value*, New York, Wiley and Sons, 1959

〔3〕 Dréze, J. and D. Vallee Poussin, "A Tâtonnement Process for Public Goods," *Review of Economic Studies*, 38 (1971) 133–150

〔4〕 福岡正夫『一般均衡理論』創文社，1979

〔5〕 Groves, T. and J. Ledyard, "Optimal Allocation of Public Goods: A Solution to the 'Free Rider' problem," *Econometrica*, 45 (1977) 783–810

〔6〕 Groves, T and M. Loeb. "Incentives and Public Inputs" *Journal of Public Ecnomics*, 4(1975) 211–226

〔7〕 Hildenbrand, W., *Core and Equilibria of a Large Economy*, Princeton University Press, 1974

〔8〕 Hurwicz, L., "On Informationary Decentralizes Systems," in *Studied in resouce allocation processes*, ed. by K. J. Arrow and L. Hurwicz, Cambridge University Press, 1977

〔9〕 __________ "Outcome Functions Yielding Walrasian and Lindahl Allocations at Nash Equilibrium Points," *Review of Economic Studies*, 46 (1979) 217–226

〔10〕 Kaizuka, K., "Public Goods and Decentralization of Production," *Review of Economics and Statistics*, 47 (1965) 118–120

〔11〕 Lau, L., E. Sheshinski and J. E. Stiglits, "Efficiency in the Optimal Supply of Public Goods," *Econometrica*, 46 (1978) 269–284

〔12〕 Malinvaud, E., "Price for Individual Consumption, Quantity Indicators for Collective Consumption," *Review of Economic Studies*, 39 (1972) 385–405

〔13〕 丸山徹「一時的均衡分析」『三田学会雑誌』69巻7号55–63. 8号33–51

〔14〕 Meade, J. E., "Extrnal Economies and Diseconomies in a Competitive Situation," *Economic Journal*, 62 (1952) 54–67

〔15〕 Milleron, J. C., "Theory of Value with Public Goods: A Survey Article," *Journal of Economic Theory*, 5 (1972) 417–477

〔16〕 Nikaido, H., *Convex Structurs and Economic Theory*, Academic Press, 1968

〔17〕 Roberts, J., "Incentives in Planning Procedures for the Provision of Public Goods." *Review of Economic Studies*, 46 (1979) 283–292

〔18〕 Samuelson, P. A., "Pure Theory fo Public Expenditures," *Review of Economics and Statistics*, 36 (1954) 387–389

〔19〕 __________ "Pure Theory of Public Expenditures and Taxation," in *Public Economics*, ed. by J. Margolis and H. Guitton, St. Martin's Press, 1969

〔20〕 塩沢修平「公共財の最適供給について」『三田学会雑誌』73巻4号106–128

（経済学部助手）