Title	非ワルラス的交換過程と最適配分 II
Sub Title	Non-Walrasian exchange process and optimal resource allocation II
Author	福岡, 正夫
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1981
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.74, No.2 (1981. 4) ,p.129(15)- 137(23)
JaLC DOI	10.14991/001.19810401-0015
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19810401-0015

非ワルラス的交換過程と最適配分 II

福岡　正夫

1　本稿では前稿[1]に引きつづき，エッジワース・プロセスが達成する資源配分の最適性について考察する。

前稿においては，m人の取引主体のなかから選ばれたそれぞれk人（$k<m$）から成るグループG^1，$G^2, \cdots, G^Q$，$Q=\binom{m}{k}$が順次に会合して，その都度グループごとに事態改善の余地がなくなるところまで取引しつづけると想定し，そのとき (1) 当該の再配分過程がかならずk人最適配分の状態に収束すること，さらに (2) kが財の数nを下回らないかぎり，k人最適配分はかならずパレート最適配分にもなることを，若干の仮定の下で証明した。

そのさい用いられた仮定は本稿でもそのまま持ち越して使用するから，あらかじめそれらを一括して再述しておくのが便利であろう。

仮定 1　各主体の選好関係 R_r ($r=1, 2, \cdots, m$) は連関性，反射性および推移性の三則を満たす。

仮定 2　どの x'_r についても集合 $R_r(x'_r)=\{x_r \mid x_r R_r x'_r\}$ および $R_r^{-1}(x'_r)=\{x_r \mid x'_r R_r x_r\}$ は財空間 E_+^n（n次元ユークリッド空間の非負象限）のなかで閉じている。

仮定 3　ある財のクラス $I \subset N=\{1, 2, \cdots, n\}$ について $x_{ir} \geqq x'_{ir}$, all $i \in I$, $x_{ir}>x'_{ir}$, some $i \in I$, $x_{ir}=x'_{ir}$, all $i \in N \setminus I$ であれば，$x_r P_r x'_r$ all r。

仮定 4　$x_r P_r x'_r$ であれば，すべての $\alpha \in (0, 1)$ について $\alpha x_r+(1-\alpha)x'_r P_r x'_r$。

仮定 4′　$x_r R_r x'_r$, $x_r \neq x'_r$ であれば，すべての $\alpha \in (0, 1)$ について $\alpha x_r+(1-\alpha)x'_r P_r x'_r$。

仮定 5　x_r が主体rの財空間の上で最小元でないときには，クラスIの財のなかにその数量を減らすことによって当該主体の選好を低めうるものがかならず存在する。

ところで前稿の末尾にも記したとおり，交換のもっとも原基的かつ普遍的な形態はいわゆる双方取引 (bilateral trade) の形態であり，それは上記の記号でいえば$k=2$の事例に該当している。そして前稿で証明したk人最適配分への収束（上記の命題（1））はもちろん$k=2$の場合にも成立

注（1）　福岡正夫「非ワルラス的交換過程と最適配分 I」，『三田学会雑誌』1980年10月号。

するが（その場合当該の再配分過程はいわゆる pairwise な最適配分に収束することになる），他方謂うところの Parity Theorem（すなわち上記の命題（2））は，$k=2$ ならば $n\leqq 2$ の場合にしか成り立たず，このように2財モデルにしか適用されない命題というのは興味に乏しいであろう。それゆえ，われわれに残された課題は，さらに Parity Theorem を越えて一般に多数財の世界でも pairwise な最適配分がパレート最適配分になるための十分条件を明らかにすることでなくてはならず，この課題を果して標記のテーマに関するわれわれの議論を閉じることが，あらためてこの続稿の目的となるのである。

2　本稿で採用する仮定としては，われわれは上記の諸仮定のほかに新たにつぎの

仮定6　少なくとも1人の主体 r' については，どの $x_{r'}\in E_+^n$ でも $P_{r'}(x_{r'})$ は一意的な支持超平面をもつ

をつけ加える。[(2)] この仮定の意味する選好のスムーズ性については，ほかにもさまざまな数学的表現を与えることができるが，[(3)] 以下の適用にあたっては，ともあれ上記の意味での一意的な支持超平面の存在が保証されれば足りるであろう。

また前稿でもナンバーをつけずに仮定したところであるが，本稿の推論では重要な役割を果たすので，つぎの

仮定7　初期保有量ベクトル x_r^0 $(r=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ について

$$\sum_{r=1}^{m} x_{ir}^0>0 \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

を明示的に掲げておくことにしよう。

以下 pairwise な最適配分がパレート最適配分になることを示すにあたっては，とりわけ仮定3，5，6および7が枢要であるというのが，われわれの主張しようとするところである。

3　さて前述の目的を達するためには，m人の取引主体から2人ずつの成員を含むグループの連鎖をつくり，しかもその連鎖がどの pair をも洩れなく網羅するようにそれをつくるのでなくてはな

注(2)　この仮定は T. Rader, "Pairwise Optimality and Non-Competitive Behavior", in J. P. Quirk and A. M. Zarley ed., *Papers in Quantitative Economics*, 1968, p. 111に負う。

(3)　たとえばレイダー（Rader, *op. cit.*, p. 111）は主体 r の選好が x_r において方向稠密（directionally dense）であるという性質によって，そのスムーズ性を定義している。ここで方向稠密であるとは，E^n のなかで稠密なある集合 S があり，すべての $y\in S$ に対して $x_r+tyP_rx_r$ となるような $t\neq 0$ があることをいう。

他方マドン（P. J. Madden, "Efficient Sequences of Non-Monetary Exchange", *Review of Economic Studies*, October 1975, p. 588）は，$P_r(x_r)$ を含む凸錐を張る半直線 L の集合 V_r について，L，$-L$ がいずれも V_r に含まれることを，L の定める方向での選好のスムーズ性の定義としている。

らない。そうした取引系列のもっとも簡単な構成法は，まず主体1が主体2，3，4，…，m と順次に取引し，つぎに主体2が主体3，4，…，m と，そして以下同様に進んで，最後に主体 $m-1$ が主体mと取引するように配列すること，すなわち

$$
\begin{array}{l}
(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ \cdots\cdots\cdots,\ (1,\ m)\\
\qquad\qquad (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ \cdots\cdots\cdots,\ (2,\ m)\\
\qquad\qquad\qquad\qquad (3,\ 4),\ \cdots\cdots\cdots,\ (3,\ m)\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (m-1,\ m)
\end{array}
$$

のようなパターンの配列を考えることである。これを前稿の記号を用いて示せば

$$G^1=(1,\ 2),\ G^2=(1,\ 3),\ \cdots\cdots\cdots,\ G^Q=(m-1,\ m)$$

そして

$$Q=\binom{m}{2}=\frac{1}{2}m(m-1)$$

ということになるが，この$\{G^1,\ \cdots,\ G^Q\}$ がわれわれの双方取引系列の1ラウンドであり，われわれは，それが pairwise な最適性が達成されるまで何ラウンドも繰り返されると考えるのである。前稿で確立した定理により，この系列はかならず pairwise な最適配分に収束するが，さらにその pairwise な最適配分が上記の増強された仮定群の下でかならずパレート最適配分になることを以下において示したいわけである。

まず重要な二三の補助定理を証明することから始めることにしよう。

補助定理1　仮定 1，2，4 および6 の下では，pairwise な最適配分 x^* において，$x_r \in R_r(x_r^*)$ であればつねに $p^*x_r \geqq p^*x_r^*$となるような，すべての r に共通な $p^*\geqq 0$ が存在する。

証　明

任意の主体 r と仮定6を満たす主体 r' について

$$\mathring{X}=P_r(x_r^*)+P_{r'}(x_{r'}^*)-\{x_r^*+x_{r'}^*\}$$

と定義することにする。すると配分 x^* が pairwise に最適である以上，このように定義された$\mathring{X}$は明らかに負のベクトルを含みえない。事実もし$\mathring{X}$が負のベクトルを含むとすれば，いうまでもなく

$$x_r P_r x_r^*\ ,\qquad x_{r'} P_{r'} x_{r'}^*$$

で，しかも

$$x_r+x_{r'}<x_r^*+x_{r'}^*$$

となる x_r，$x_{r'}$ が存在するから，$(r,\ r')$ のグループにとって $(x_r^*,\ x_{r'}^*)$ を凌駕する可能な再配

分（$x_r x_{r'}$）が見出されることになり，x^*がpairwise に最適という仮定と相反する。

また$\mathring{X}$は凸集合である。なぜなら仮定4から $P_r(x_r^*)$，$P_{r'}(x_{r'}^*)$ はいずれも凸集合であり，凸集合のベクトル和はやはり凸集合となるからである。

こうして$\mathring{X}$は負象限と共通部分をもちえず，しかもこれらの集合はそれぞれ凸集合であるから，よく知られたミンコフスキーの分離定理が適用されて，原点0を通り$\mathring{X}$と負象限とを分離する超平面が存在することになり，それは非ゼロの法線ベクトル$p^*\neq0$をもつ。したがってこのp^*と，$\mathring{X}$に含まれるすべてのベクトルaについては $p^*a\geqq0$ が成立し，また負象限に含まれるすべてのベクトルbについては $p^*b\leqq0$ が成立することになるのである。

ところで負象限からどんなベクトル $b<0$ を選ぶにしても，任意の $\lambda>0$ について λb はふたたび負象限に含まれるから，$p^*\lambda b\leqq0$。ところが，もし p^*に負の成分が含まれているとすれば，bを適当に選んで $\lambda\to\infty$とするとき $p^*\lambda b>0$ とすることができ，これは矛盾である。よってp^*は負の成分を含むことはできず，前記の結論 $p^*\neq0$ とあわせて，$p^*\geq0$ となるのでなくてはならない。

他方，前記の結論どおり，すべての $a\in\mathring{X}$ について $p^*a\geqq0$ となるのであれば，明らかに $x_r\in P_r(x_r^*)$，$x_{r'}\in P_{r'}(x_{r'}^*)$ のようなすべての x_r，$x_{r'}$ について

$$p^*(x_r+x_{r'})\geqq p^*(x_r^*+x_{r'}^*)$$

となり，ここで仮定2を考慮すれば $P_r(x_r^*)$，$P_{r'}(x_{r'}^*)$ の閉包と $R_r(x_r^*)$，$R_{r'}(x_{r'}^*)$ とは合致することが知られるから，結局 $x_r\in R_r(x_r^*)$，$x_{r'}\in R_{r'}(x_{r'}^*)$ のようなすべての x_r，$x_{r'}$ について上記の不等式が成り立つことになる。よって当該の不等式において交互に $x_{r'}=x_{r'}^*$，$x_r=x_r^*$ とおくことにより，すべての $x_r\in R_r(x_r^*)$，$x_{r'}\in R_{r'}(x_{r'}^*)$ について

$$p^*x_r\geqq p^*x_r^*$$

$$p^*x_{r'}\geqq p^*x_{r'}^*$$

という結論を得る。

最後に仮定6から主体 r'の選好がスムーズであること，したがって $x_{r'}^*$ においてp^*が一意的に確定することを考えれば，すべての主体に共通にこの p^*が適用されることは自明である。よってすべての $r\neq r'$ について $x_r\in R_r(x_r^*)$ ならば，それらすべての主体に対して

$$p^*x_r\geqq p^*x_r^*$$

とならねばならないのである。

補助定理2　仮対1，2，4および7の下では，少なくとも1人の主体 r'' について $x_{r''}\in P_{r''}(x_{r''}^*)$ なら，$p^*x_{r''}>p^*x_{r''}^*$ が成り立つ。(4)

注(4)　以下の推論についてはRader, *op. cit.*, p. 109に負う。

証　明

仮定7から$\sum_{r=1}^{m} x_r^0 > 0$であるから，

$$\sum_{r=1}^{m} \tilde{x}_r < \sum_{r=1}^{m} x_r^0$$

のような $\tilde{x}$ を財空間のなかに選ぶことができる。ゆえにこの式の両辺に $p^* \geq 0$ を乗ずることによって

$$p^* \sum_{r=1}^{m} \tilde{x}_r < p^* \sum_{r=1}^{m} x_r^0 = p^* \sum_{r=1}^{m} x_r^* \ ,$$

したがって少なくとも1人の主体 r'' について

$$p^* \tilde{x}_{r''} < p^* x_{r''}^*$$

となっているのでなくてはならない。

そこでこの主体について $x_{r''} \in P_{r''}(x_{r''}^*)$ のような $x_{r''}$ と上記の $\tilde{x}_{r''}$ との凸結合 $\alpha x_{r''} + (1-\alpha)\tilde{x}_{r''}$, $\alpha \in (0,\ 1)$ をつくれば，選好の連続性の仮定（仮定2）から十分1に近い α については

$$\alpha x_{r''} + (1-\alpha)\tilde{x}_{r''} \in P_{r''}(x_{r''}^*)$$

が成り立つ。よって補助定理1の帰結から

$$p^*[\alpha x_{r''} + (1-\alpha)\tilde{x}_{r''}] \geq p^* x_{r''}^*$$

となり，したがって

$$\alpha p^* x_{r''} + (1-\alpha) p^* \tilde{x}_{r''} \geq p^* x_{r''}^*$$

となるが，前に証明したところから $p^* \tilde{x}_{r''} < p^* x_{r''}^*$ であるから，これを上式に適用して

$$p^* x_{r''} > p^* x_{r''}^*$$

の帰結を得る。

補助定理3　仮定1，2，3，4，5，6および7の下では，すべての主体 r について，$x_r \in P_r(x_r^*)$ なら，$p^* x_r > p^* x_r^*$ となる。(5)

証　明

任意の主体 $r \neq r''$ について $x_r \in P_r(x_r^*)$ とする。仮定5からこの主体は x_r においてクラス I に含まれる財を少なくとも1種類はプラスの量でもっているから，それを若干減らすことによって選好をより低める余地をもち，しかし同時に仮定2から変化が微量であるかぎり変化後の選好をも x_r^* におけるより高く維持することができる。これは適当に $\delta \geq 0$ を選ぶならば，

$$x_r - \delta P_r x_r^*$$

となしうることを意味している。

他方この δ を主体 r'' に再配分するとすれば，仮定3により

注(5)　Rader, *op. cit.*, pp. 109–110 参照。

$$x_{r''}+\delta P_{r''}x_{r''},$$

ゆえに補助定理2の帰結によって

$$p^*(x_{r''}+\delta)>p^*x_{r''}$$

が成り立ち，したがって

$$p^*\delta>0$$

となるのでなくてはならない。

ここでもとの主体 r に戻って，上記の $x_r-\delta P_r x_r^*$ から，同じく

$$p^*(x_r-\delta)\geqq p^*x_r^*$$

ゆえに

$$p^*x_r\geqq p^*x_r^*+p\delta$$

となるから，これと前のパラグラフの帰結とを併せて

$$p^*x_r>p^*x_r^*$$

を得る。

以上の補助定理をつうじて得られた結論を総合することによって，つぎの基本定理が確立したことになる。

定理1　仮定1，2，3，4，5，6および7の下においては，ある配分 x^* が pairwise な最適配分であれば，それはかならずパレート最適配分になっている。

証　明

x^* が pairwise な最適配分であれば，仮定の下では上記の補助定理の結論をすべて成り立たしめる $p^*\geq 0$ がある。

そこでまず x^* がパレート最適でないとすれば，

$$x_r\in R_r(x_r^*)\ \text{all}\ r$$

$$x_{r'}\in P_{r'}(x_{r'}^*)\ \text{some}\ r'$$

となるような達成可能な配分 x があるから，その x に補助定理1，3の帰結を適用することによって

$$p^*x_r\geqq p^*x_r^*\ \text{all}\ r$$

$$p^*x_{r'}>p^*x_{r'}^*\ \text{some}\ r',$$

したがってそれらを総計して

$$p^*\sum_{r=1}^{m}x_r>p^*\sum_{r=1}^{m}x_r^*$$

が成立する。ところが他方 $\sum_{r=1}^{m} x_r = \sum_{r=1}^{m} x_r^* = \sum_{r=1}^{m} x_r^0$ であるところから，

$$p^*\sum_{r=1}^{m} x_r = p^*\sum_{r=1}^{m} x_r^*$$

とならねばならないから，帰謬法の仮定は真ではない。

4　前節で証明した基本定理は，ある種の条件の下において双方取引の連鎖が多角取引と同等の効率を達成しうることを示すものであり，これをいい換えれば，ある配分がパレート的改善の余地を含むかぎり，2人から成るグループにとってもかならず改善をもたらす交換の余地があることを保証するものである。これはかつてフランクリン・フィッシャーがエッジワース・プロセスに関して提起したことのあるある種の批判を無効にする帰結であるといってよいであろう。少々長くなるが引用すれば，彼が表明した見解というのはつぎのようなものであった。(6)

「諸個人が取引をつうじて相互により有利になるのでなければ取引しないという想定は，一見差しさわりないもののように見えるが，実は事態はそれほど単純ではなく，そうした状況が起これぱかならず実際に取引が行なわれると安易に仮定することは許されない。これはなぜかといえば，相互の取引をつうじてみずからを有利にする結託としては，きわめて多数の人々から成るものしか可能でないかもしれないからである。たとえば2人か3人か4人程度の人数から成る互恵的な取引は存在せず，何百万人という人々のあいだの非常に複雑な商品交換が唯一可能な有利な取引形態であるかもしれないのである。エッジワース・プロセスが仮定しているように，そうした取引が是が非でも行なわれなくてはならないと要請するのは，情報の普及の上にきわめて重い要件を賦課することになるし，また結託形成の費用をないがしろにすることになりかねないであろう。」

しかし，もし前節の定理が正しいとすれば，物事はさほどに悲観的ではなく，フィッシャーの杞憂は霧散してよいのである。(7)

5　本稿で定式化した定理の前身としては，レイダーによって提唱されたものとフェルドマンによるものとがそれぞれよく知られている。(8) pairwise な最適配分がパレート最適配分になるための十

注(6)　F. M. Fisher, "The Stability of General Equilibrium: Results and Problems", in M. Artis and A. Nobay ed., *Proceedings of the Association of University Teachers of Economic Annual Conference, Sheffield 1975*, 1976, p. 19 参照。

(7)　ここに述べたところとまったく同趣旨の評言が P. Madden, "Why the Edgeworth Process Assumption Isn't That Bad", *Review of Economic Studies*, June 1978, p. 279 にも見出される。

(8)　T. Rader, *op. cit.*, pp. 111-114, Theorem 5, A. M. Feldman, "Bilateral Trading Processes, Pairwise Optimality, and Pareto Optimality", *Review of Economic Studies*, October 1973, pp. 469-470, Theorem 2 参照。

分条件として，前者は“broker”ないしは“middleman”の存在を，後者は“money commodity”の存在を掲げているから，彼らの定理は一見してまったく別個の内容のもののように思われるかもしれない。しかし，実はさきに設定した仮定群の含意を省察すれば，それらが本質的には同じ定理の分身であることが会得されるであろう。

レイダーの broker = middleman とは仮定6において選好がスムーズであるとされた取引主体 r' の謂であり，この主体にそのような役割が擬せられるのは，彼の upper contour set $P_{r'}(x^*_{r'})$ を $x^*_{r'}$ において分離する価格システムが，すべての主体に共通な一意的な価格システムとなり，その意味で当該主体の存在が経済全体の効率を律する中枢的な手段となるからである。彼はこの価格システムを媒介として他のすべての主体と取引するが，そのさい彼の財空間で内点を通る無差別曲面が境界と交わらないことを考えれば，当該の最適配分の点で彼はすべての財を取引しうることになるであろう。

しかしレイダーの推論を仔細に跡づければ分かるように，彼の証明はたんに仮定6によって支えられているばかりでなく，また desired commodity の存在にかかわる仮定3および仮定5にも依存している。そして後者の二つの仮定は明らかにフェルドマンの貨幣財の仮定をある一定の方向に一般化したものにほかならないのである。すなわちそこに登場する desired commodity のクラス I をさらに限定して，それをただ1個の元から成る集合（いわゆる singleton）と仮定すれば，仮定 3，5 は結局フェルドマンの貨幣財の仮定すなわち誰もが所望し誰もが所有する財が1種類あるという仮定に帰着するのである。

他方フェルドマンの定理においては，すべての主体の効用関数の微分可能性が仮定されており，したがって全主体の選好がスムーズであると仮定されているわけであるから，それがレイダーの middleman の存在を含意すること，いわばそこではどの主体もが middleman と考えられること，はいうまでもないであろう。

こうしてレイダーの定理も結局は一般化された貨幣財の存在（クラス I の非空性）に依存しており，フェルドマンの定理も middleman の役割を要請しているというのが，本節で述べてきたことの趣旨である。これを要するに，貨幣財という見地からすれば，彼らの定理はいずれもそのような財の存在にかかわる仮定に立脚しているわけであって，この点についてはただクラス I の広さ狭さに相違が見出されるにすぎないのである。

6　尤もここでクラス I に含まれる財に貨幣財という呼称を冠するのは，たんにそれらが誰によっても所望され誰によっても所有されるという一事にのみ由来するものであり，これはたしかに一般受容性の要件ではあるにしても，貨幣財の機能を規定する条件として十分でないことはいうまでもない。その意味において本稿の所論はカンバスのほんの一小部分を彩色したにとどまるものである

が，それはそれとしてまったく無意義な成果ではないとわれわれは思っている。さしあたってのわれわれの目論見としては，少なくとも貨幣財が具有すべき上記の属性が基本定理の主張どおり経済効率に寄与することの一端を示せば足りるのである。

（経済学部教授）