Title	非ワルラス的交換過程と最適配分 I
Sub Title	Non-Walrasian exchange process and optimal resource allocation I
Author	福岡, 正夫
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1980
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.73, No.5 (1980. 10) ,p.706(52)- 719(65)
JaLC DOI	10.14991/001.19801001-0052
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19801001-0052

非ワルラス的交換過程と最適配分 I

福岡　正夫

1　元来レオン・ワルラスの思想を踏襲した典型的な一般均衡理論においては，いわゆる「中央取引所」(“central clearing house”) の仕組みが想定され，各取引主体は全員がそこに参集して，現行価格の下で決定した各財の所望需給量を市場でオファーすると考えられる。そのとき市場の化身たる「せり売り人」(“auctioneer”) は，社会的需給の大小にしたがって価格をそれぞれ適切なルールで調整し，新しい価格をふたたび各取引主体に伝達する。そのような試行錯誤の結果，どの財についても需給の均衡が成立したとき，そしてそのときにのみはじめて取引者間で取引が実行されるというのが，よく知られた「予備的模索」(“tâtonnement”) の考え方である。

このようなワルラス流の定式化は，本来無秩序が予想されてしかるべき分権的市場体制になぜある種の秩序が出現するのかという問いに，いわば一つの模範解答を与えたものであり，その意味において不滅の貢献と目されてよいものであるが，なおそれをもってしては適切にとり扱いえないいくつかの重要問題を残していることも当然の事実である。とりわけ近時の理論の発展コースのなかで頻繁に論ぜられてきた主題の見地からすれば，少なくともつぎの三つがそのような問題の好事例として浮び上ってくるのではないかと思われる。

まず第一に，こうして取引所・せり売り人・模索過程の三位一体が保証されているならば，各主体は一堂に会して，需給斉合の条件の下で財の実物を市場に提供し，そこから各自の欲する財を所望量だけ持ち去ればよいわけであるから，誰が自分の欲する財を所有し，また自分の供する財を受容するかについては，いっさい思い煩らう必要はない。いい換えればそのような場合，人々は「市場と取引する」のであって，人と人とが直接に取引するわけではないのである。

したがって上記の取引機構の下では「誰が誰と取引するか」(“who trades with whom”) という問題は発生せず，その関連で貨幣が交換の媒介手段として果たす情報節約的機能は無用化するから，この種の理論モデルを目して「物々交換」(“barter”) のモデルと呼ぶのは，その意味ではまことに適切といってよいであろう。ただこの場合注意を要するのは，そうした用語法は，他の文脈でしばしば使われるもう一つの用語法——「物々交換はきわめて不便であるから，貨幣が交換のメディアとして導入されることになる」といったような用語法——とは峻別されねばならないということである。前者は完全に組織化された市場での，したがって交換の媒介体としての貨幣の存在が不要で

ある場合の物々交換を指しているのに対して，後者は不完全な市場での，したがって貨幣がないとすればきわめて不効率にしか機能しえない物々交換を意味しているのである。交換という用語を人と人とのあいだの財のやりとりの意味に用いるなら，前者の物々交換のモデルは，逆説的ではあるがむしろ交換の要素を欠如した交換モデルであるというべきであろう。

従来の一般均衡モデルで交換手段としての貨幣の分析が首尾よく行なわれえなかったのは，この種の事情が十分に考慮されず，取引機構の完全性をそのまま持ち越したモデルのなかに貨幣を入れてくることが考えられたからである。この脈絡でのわれわれの課題は，むしろワルラス流の完全市場の条件を具備していない交換過程を考え，そこに貨幣を導入した場合に，完全市場での交換過程の帰結と同等の効率性が達成される事実を論証することでなくてはならないであろう。

つぎに第二に，相異なる将来期日の財を異種の財と考える場合には，ワルラス流の完全市場モデルは，どの財についてもすべての期日にわたって先物市場が完備していることを含意せざるをえない。ところがそうした想定は，あらゆる取引契約が期首の一時点で一度に行なわれることを意味するから，貨幣その他の資産による富の時間的移転の現象を考察の場から締め出してしまうことになる。それゆえ貨幣が価値の貯蔵手段として将来に富を持ち越す機能をも果たすのであるかぎり，われわれはこのような将来財に関する完全市場の仮定と訣別し，毎期取引が開かれていく一時的均衡ないしは Sequence Economy のモデルととり組むのでなくてはならないであろう。

さらに第三の問題は，ケインズ経済学とのかかわり合い，謂うところの「ケインズ経済学のミクロ的基礎」の問題である。先にも述べたようにワルラス流の予備的模索過程では，実際上の財の取引は需給の整合を俟ってはじめて行なわれるのであるから，その想定を労働市場に適用するとすれば，明らかにそれはケインズ流の非自発的失業の可能性と両立しえない。すなわち過少雇用均衡の成立を一般均衡理論の立場から考察するためには，何としても非模索過程の想定が不可避であり，需給の不均衡下で割り当てられる数量が各取引主体のつぎの意思決定に重要な影響を及ぼす事情を考慮に入れることがとりわけ必要となるのである。

以上に摘記した諸問題のうち本稿でとり扱うのは，もっぱら第一の問題，すなわち中央取引所と auctioneer の機能を欠如した交換経済において，どのような代替的メカニズムがそこで達成されるべき配分の最適性を保証するかという問題である。さきにも述べたように，われわれの究極の狙いは交換手段としての貨幣の機能をこの問題にかかわらしめる点に求められるが，まずそのような目論見を托しうる有力なモデルの土台として，ワルラス流の価格調整過程に代置されるのは，いわゆるエッジワースの交換過程＝エッジワース・プロセスである。[1] このワルラスとほぼ同時代の偉大

注(1)　F. Y. Edgeworth, *Mathematical Psychics*, 1881, pp. 18–19, ditto, *Papers Relating to Political Economy*, Vol. II, 1925, pp. 311–312.

エッジワース・プロセスという用語については宇沢弘文氏の論文 "On the Stability of Edgeworth's Barter Process", *International Economic Review*, May 1962 に負う。ただし宇沢氏の定式化においては，当該プロセ

な理論家エッジワースに名を負う交換過程にあっては，一物一価の市場価格現象は一般には存在せず，したがって各取引主体は市場と anonymous な形で取引するのではなく，むしろ直接に主体間で game-theoretic に行動すると想定される。すなわち特定の取引主体のあいだに相互にパレートの意味でより有利な再配分の可能性が存在する場合，そしてその場合に限って，当該の主体はグループを結成し，その利得を追求すると仮定されるのである。こうして逐次グループが形成されるごとに利得の余地を尽くしていく交換過程が果たしてどのような条件の下で最適の財配分に到達するか，その間の事情を立入って究明するのが，さしあたってのわれわれの理論的課題にほかならないのである。

より詳しく述べるならば，以下におけるわれわれのプログラムは，一応つぎの二つの内容のものから成ると考えられよう。まず第一に，われわれはその経済の取引主体が全員で同時に会合することは不可能であると想定し，全員より少ないある特定人数の取引主体のみがいくつかのグループを形づくって，一度に一グループずつ順次に会合していくと考える。そしてそれらの会合の都度，取引はかならず当該グループにとって改善の余地を残さない配分すなわちグループとして最適の配分が達成されるところまで行なわれると仮定する。このような取引グループの会合の系列が，ある種の条件の下で，もはやどのグループにとっても改善の余地のない究極の最適配分の状況をもたらすことを厳密に証明するのが，本稿で目ざす第一の主要な課題である。つぎに第二に，このようにして達成される最適配分の状態は，当該の人数で形成されるすべてのグループにとっては事態改善の余地を残さないという意味で最適であるが，もし全員の同時的会合が可能であったとすれば達せられたであろうはずの最適状態，すなわち言葉の真の意味でのパレート最適の状態を達成しているとはかぎらない。しかしこのことは一般に前者が後者になることの不可能性を意味するものではなく，さらにある種の特別な条件が付加される場合には，groupwise の最適状態がパレート最適状態に合致することが可能である。そこでこの合致が生ずるための十分条件を明らかにし，当該の主張を

スの状況変数として，各取引主体の財の配分のほかに，各主体に共通な競争市場価格が用いられ，後者の変化率を超過需要量の関数とするワルラス流の調整方程式が配分に関する調整方程式と並んで登場する。しかし元来のエッジワースの再契約の理論は，主体間の財の交換をつうじての効用調整のメカニズムに立脚するものであり，競争市場による価格調整メカニズムがその本旨に含まれるとは考えがたい。

以下本稿でとり扱うのは，交換プロセスの内容をもっぱらそのような効用調整のプロセスと限定した上で，あらかじめ会合するグループとその会合の順序とを設定し，それを順次に反復続行していく過程であるが，さらにそのほかにグループと会合順序を指定せず，交換過程を一連の確率過程として把えるジェリー・グリーン流のアプローチのあることを指摘しておきたい。われわれのアプローチでは逐一交換が実現していくから財の保有量はその都度変化していくわけであり，したがって過程が収束する先はパレート最適ではあっても，当初の経済のコアであるとは限らない。これにひきかえ，グリーン流の立場では真のコアへの収束が問題とされており，その代り収束はストカスティックな意味での収束すなわちコアのどの点かに収束する確率が1になるという形になっている。交換経路が不確定であることを強調するのがエッジワースの真意であるとすれば，オリジナルなエッジワースの立場にはグリーンの考え方の方がより一そう近いかもしれない。

なおグリーンの議論については J. R. Green, "The Stability of Edgeworth's Recontracting Process", *Econometrica*, January 1974 参照。

確立するのが，本稿の第二の重要課題である。

われわれは次節以下において，順次にこれらの問題の詳細な分析に携わるが，もしそこでこれら二つの主張が首尾よく確立されえたとするならば，それはエッジワースの過程がワルラス流の価格調整機構を欠くにもかかわらず，なお後者と同等の効率的帰結を達成しうることの証左とみなされよう。これは少なからぬ興味をいざなう帰結であるというべきであろう。(2)

2　m人の取引主体（$r=1,2,\cdots\cdots,m$）とn種の財（$i=1,2,\cdots\cdots,n$）から成る交換経済を考え，財の空間としてはn次元ユークリッド空間の非負象限E_+^nを考えるものとする。第r主体の初期保有量は当該の象限が含むn次元ベクトル$x_r^0=(x_{1r}^0,\ x_{2r}^0,\ \cdots\cdots,\ x_{nr}^0)$として定められ，これについては一般性を失うことなく

$$\sum_{r=1}^{m} x_{ir}^0>0 \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,n)$$

と仮定する。各主体への配分は，同様にE_+^nの点$x_r=(x_{1r},\ x_{2r},\ \cdots\cdots,\ x_{nr})$によって示され，したがってすべての取引主体への配分はE_+^{nm}の点$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_m)$として，また達成可能な配分はいうまでもなく集合

$$A=\{x \mid x\geqq 0,\ \sum_{r=1}^{m}x_r=\sum_{r=1}^{m}x_r^0\}$$

の元として示される。

各主体rは財空間の上で定義された選好の二項関係R_rをもち，ここでR_rについては定石どおり

仮定1　R_rは連関性，反射性および推移性の三則を満たす

と仮定する。$x_rR_rx_r'$であるが$x_r'R_rx_r$でないとき，$x_rP_rx_r'$とし，$x_rR_rx_r'$であってしかも$x_r'R_rx_r$でもあるとき，$x_rI_rx_r'$とすれば，P_rが「より選好される」関係をあらわし，I_rが「互いに無差別である」関係をあらわすことはいうまでもない。

さらにR_rについては，以下必要に応じてつぎの諸仮定を援用するから，それらをあらかじめ一括して掲げておくのが便利であろう。

注(2)　以下でとり扱う主題についての参考文献としては，T. Rader, "Pairwise Optimality and Non-Competitive Behavior", in J. P. Quirk and A. M. Zarley ed., *Papers in Quantitative Economics*, 1968, A. M. Feldman, "Bilateral Trading Processes, Pairwise Optimality, and Pareto Optimality", *Review of Economic Studies*, October 1973, P. J. Madden, "Efficient Sequences of Non-Monetary Exchange", *Review of Economic Studies*, October 1975, D. A. Graham, L. P. Jennergren, D. W. Peterson, and E. R. Weintraub, "Trade-Commodity Parity Theorems", *Journal of Economic Theory*, June 1976などを見よ。なお概説書としては E. R. Weintraub, *Micro-foundations: The Compatibility of Microeconomics and Macroeconomics*, 1979, Chapters 8 and 9 の参照が有益である。

仮定 2　どの $x'_r \geqq 0$ についても集合 $R_r(x'_r)=\{x_r | x_r R_r x'_r\}$ および $R_r^{-1}(x'_r)=\{x_r | x'_r R_r x_r\}$ は E^n_+ のなかで閉じている。

仮定 3　ある財のクラス $I \subset N=\{1, 2, \cdots\cdots, n\}$ について $x_{ir} \geqq x'_{ir}$ all $i \epsilon I$, $x_{ir} > x'_{ir}$ some $i \epsilon I$, $x_{ir}=x'_{ir}$ all $i \epsilon N \setminus I$, であれば，$x_r P_r x'_r$ all r。

仮定 4　$x_r P_r x'_r$ であれば，すべての $\alpha \epsilon (0, 1)$ について $\alpha x_r+(1-\alpha)x'_r P_r x'_r$ 。

仮定 4′　$x_r R_r x'_r$, $x_r \neq x'_r$ であれば，すべての $\alpha \epsilon (0, 1)$ について $\alpha x_r+(1-\alpha)x'_r P_r x_r$ 。

ここで仮定2が選好の連続性をあらわすこと，また仮定4および4′がそれぞれ弱い意味，強い意味での選好の凸性をあらわすことは，今日ではよく知られたところである。後者を強弱いずれの version で採択するかは，やがてそれらが実際に適用される段階にいたって推論上の要請から決定されるであろう。仮定3についてはいささか説明が必要であるかもしれない。これは一種の選好の単調性をあらわしており，クラス I のなかから任意にある i を選んだとき，その財の数量を増やせばかならずどの主体の選好もより上昇することを意味している。明らかに I の元は，財空間のどの点においてもつねに desire される財ばかりから成っているが，そのような財を全部 I に含めなくてはならない必然性はなく，またそうした性質をもたない財の存在ももちろん斟酌しているわけであるから，これは通常の選好の単調性の仮定よりははるかに弱い仮定であるというべきであろう。

さらにわれわれは仮定3と連結させて，つぎの仮定をも併設する。

仮定 5　x_rが主体 r の財空間の上で最小元でない場合には，クラス I の財のなかにその数量を減らすことによって当該主体の選好を低めうるものが少なくとも一つは存在している。

これはx_rが非最小元となるためには，主体 r は当該の財をプラスの量持っていなくてはならないことと等義であるが，そのような財はもちろん主体によって異なる財であってもよく，したがって各主体が I の含む財をすべてプラスの量ずつ持っていることはかならずしも要請されていない。

以下でわれわれが考察するのは，すでに前節でも述べたとおり，何人かの取引主体がグループを形成して財の再配分を行なっていく過程であるが，いまある配分 $x \epsilon A$ とあるグループ $G \subset M=\{1, 2, \cdots\cdots, m\}$ について，別の配分 $\hat{x}$ があって

$$\hat{x}_r R_r x_r \text{ all } r \epsilon G \text{ かつ } \hat{x}_r = x_r \text{ all } r \epsilon M \setminus G$$

$$\sum_{r \epsilon G} \hat{x}_r = \sum_{r \epsilon G} x_r$$

であり，しかも

$$\tilde{x}_r R_r \hat{x}_r \text{ all } r \epsilon G,\ \tilde{x}_r P_r \hat{x}_r \text{ some } r \epsilon G \text{ かつ } \tilde{x}_r = \hat{x}_r \text{ all } r \epsilon M \setminus G$$

となるような $\tilde{x} \epsilon A$ がもはやないとすれば，$\hat{x}$ はグループ G にとってグループ最適であると呼ぶ。(3)

注(3)　グループ最適の概念については，Madden, *op. cit.*, p. 582, Graham *et al*, *op. cit.*, p. 448 を参照せよ。前者の Groupwise Pareto Efficiency, 後者の Pareto Efficiency for Group G の概念がそれに当たる。

われわれはグループGについて，上記の$\hat{x}$のような配分への改善が可能であるかぎり，当該グループはかならずその取引を遂行して，Gにとってのグループ最適を達成すると仮定する。

これだけの前提の下で，いよいよ主題であるエッジワース・プロセスの分析にとりかかろう。以下では全部でQ個の相異なるグループ G^1, G^2, ……, G^Q があるとし，ただしこれらのグループについては，同一の取引主体が２個以上のグループに共通に含まれる可能性は排除しないとする。これらのグループのなかでは，まず G^1 に属する取引主体のみが会合して初期の配分を再配分し，前記の意味で G^1 にとってグループ最適となる配分を実現する。このさい，もしそのような改善の余地が始めからないとすれば，当初の財配分をそのままつぎのグループに持ち越すと考えればよい。こうして G^1 の成員の経済的状況はその会合によって決して悪化することはなく，事実再配分が行なわれるようであれば，少なくとも一部の成員の状況はかならず可能なところまで良化する。さてつぎはグループ G^2 の出番であり，これに属する成員は G^1 の会合の結果達成された配分から出発して，同じ要領で取引に従事し，G^2 にとってのグループ最適配分を実現する。以下同様に進行して，最後にグループ G^Q にいたり，それが会合を終了した段階において，この交換過程は一サイクルを閉したことになる。その段階でどの $G^q(q=1,2,\cdots\cdots,Q)$ にとっても，もはや再配分による改善の余地が尽きているようであれば，当該の交換過程は完全に終了したことになるが，いずれの G^q かにまだ改善の余地が残っているようであれば，ふたたび G^1 G^2 …… G^Q の順序でつぎのサイクルが開始され，すべてのグループにとってもはや改善の余地がまったくなくなるところまでサイクルの繰返しが続くと考えるのである。

グループ G^q 所属の主体の数を $\mu(G^q)$ で記すとすれば，われわれはさしあたって

$$\mu(G^1)=\mu(G^2)=\cdots\cdots=\mu(G^Q)=k,\quad k<m$$

そして$Q=\binom{m}{k}$というスペシャル・ケースをとり扱う。この場合，ある配分xがすべての$G^q(q=1,2,\cdots\cdots,Q)$にとってグループ最適となるときに，それはとりわけ$k$人最適 ($k$-way optimal) であると呼ばれる。(4) この場合には交換プロセスが完了するのは，いうまでもなくk人最適が達成されたとき，そしてそのときのみであり，以下の議論で最初の目標となるのは，そのようなk人最適配分の存在証明と，上記の交換プロセスがかならずその種の最適配分に収束することの証明である。

3　配分xから出発するとき，それにグループ G^q の最適再配分集合を対応させる写像を $\Phi^q(x)$ で示すことにしよう。するとわれわれはまずこの Φ^q の性質について，つぎの重要命題を確立することができる。

注(4) Madden, *op. cit.*, p. 582, Graham *et al*, *op. cit.*, p. 448 参照。なお$k=2$のスペシャル・ケースがレイダー＝フェルドマンの Pairwise Optimality の概念である。

補助定理1　仮定1および2の下では，Φ^q は非空な像をもち，さらにそれに加えて仮定3および5が満たされるとすれば，Φ^q は優半連続となる。

証　明

（1）Φ^q の像が非空となること。仮定1および2の下では，各主体の配分 x_r に対して実数値 u_r を対応させる連続な効用関数 $u_r(x_r)$ のあることがよく知られている。(5) そこでこの u_r を用いて

$$X'=\{x' \mid x' \in A,\ u_r(x'_r) \geqq u_r(x_r)\ \text{all}\ r\}$$

と定義すれば，X' の各点 x' に対しても m 個の実数値 $(u_1, u_2, \cdots\cdots, u_m)$ を対応させる連続なベクトル関数 u があることになる。ところで X' はコンパクト集合 A のなかでの閉集合であるから当然コンパクト集合であり，したがって上記の u による X' の像を $U_{X'}=u(X')$ とするとき，$U_{X'}$ もまたコンパクト集合となる。よって $U_{X'}$ に通常のベクトルの半順序を導入すれば，それについて $U_{X'}$ は帰納集合となるから，ツォルンのレンマが使えて，$U_{X'}$ はかならず極大元をもち，これは，X' が最適点をもつことと等義である。(6)

（2）Φ^q が優半連続となること。まず Φ^q のグラフが A の上で閉じていることを示すことにしよう。(7) そのためには，いうまでもなく x^* に収束する任意の点列 $\{x^\nu\}$ を A からとり，$y^\nu \in \Phi^q(x^\nu)$，$y^\nu \to y^*$ とするとき，$y^* \in \Phi^q(x^*)$ となることを示せばよい。すなわち前節の定義を考慮すれば，

（a）　$y^*_r R_r x^*_r$ all $r \in G^q$ かつ $y^*_r = x^*_r$ all $r \in M \setminus G^q$ となっていること，

および

（b）　$\tilde{y}_r R_r y^*_r$ all $r \in G^q$，$\tilde{y}_r P_r y^*_r$ some $r \in G^q$，$\tilde{y}_r = y^*_r$ all $r \in M \setminus G^q$ となるような $\tilde{y}$ が A のなかにないこと

を示せばよいわけである。

（a）　G^q に含まれるすべての r については，

$y^\nu \in \Phi^q(x^\nu)$ から $y^\nu_r R_r x^\nu_r$ すなわち

$$u_r(y^\nu_r) \geqq u_r(x^\nu_r)$$

で，しかも $x^\nu_r \to x^*_r$，$y^\nu_r \to y^*_r$ であるから，u_r の連続性から

$$u_r(y^*_r) \geqq u_r(x^*_r)$$

となる。G^q に含まれない r についても，$y^\nu_r = x^\nu_r$ から $y^*_r = x^*_r$ が成り立つことは自明であろう。

注(5)　G. Debreu, *Theory of Value*, 1959, pp. 56-59, 福岡正夫『一般均衡理論』1979, pp. 29-37 参照。

(6)　福岡，前掲書，pp. 218-219 参照。

(7)　以下の証明の基本構想は Graham *et al.*, *op. cit.*, p. 450に負う。ただし彼らの証明は選好の強単調性の仮定(彼らの (A. 3′)) に立脚しており，われわれの場合はそれを仮定3および5に代位している。また彼らは選好の凸性の仮定(彼らの (A. 2)) をも併設しているが，これは明らかに不要であろう。

なお仮定3，5の援用については，Rader, *op. cit.*, pp. 105-106 および ditto, *Theory of General Economic Equilibrium*, 1972, pp. 76-77 参照。

（b） 帰謬法によるとして，ある配分$\tilde{y} \in A$があり，それについて

$$u_r(\tilde{y}_r) \geqq u_r(y_r^*) \text{ all } r \in G^q$$

$$u_r(\tilde{y}_r) > u_r(y_r^*) \text{ some } r \in G^q$$

$$\tilde{y}_r = y_r^* \text{ all } r \in M \setminus G^q$$

になったとする。するとu_rの連続性と仮定3および5によって，$\tilde{y}$の近傍から適当にy^0を選べば，明らかに

$$u_r(y_r^0) > u_r(y_r^*) \text{ all} r \in G^q$$

$$y_r^0 = y_r^* \text{ all } r \in M \setminus G^q$$

とすることができるであろう。

そこでこのy^0を基点として，新たにそこに収束する点列$\{\tilde{\tilde{y}}^\nu\}$を$A$から選び，かつそれは$r \in M \setminus G^q$の各主体については$\tilde{\tilde{y}}_r^\nu = y_r^\nu = x_r^\nu$を満たすようにつくるものとする。すると，仮定$y_r^\nu \to y_r^*$と，前のパラグラフで導いた帰結から，十分大きな$\nu$については

$$u_r(\tilde{\tilde{y}}_r^\nu) > u_r(y_r^\nu) \text{ all } r \in G^q$$

$$\tilde{\tilde{y}}_r^\nu = x_r^\nu \text{ all } r \in M \setminus G^q$$

が成り立たねばならず，これは$y^\nu \in \Phi^q(x^\nu)$の仮定と矛盾する。よって$y^* \in \Phi^q(x^*)$とならねばならないことになり，Φ^qのグラフの閉じていることが判明した。

ところでこのことがいえたとしても，一般にはΦ^qが優半連続となる保証はない。しかしその値域であるAがコンパクト集合で，しかもΦ^qがコンパクト値である場合には，Φ^qのグラフの閉性とその優半連続性とは同値となることがよく知られている。[8] そしてAのコンパクト性からΦ^qの像が有界集合となることは自明であるから，結局定理が成り立つためには，あとΦ^qの像が閉集合となることがいえればよいのである。ところが前述のグラフの閉性の系論として，すべてのx^νを恒等的に同一点xにとれば，Φ^qの像が閉集合となることも明白である。

ここで初期配分xにG^1，G^2，……，G^Qから成る一連の会合をつうじての最適再配分集合を対応させる写像Φを

$$\Phi(x) = \Phi^Q \circ \cdots\cdots \circ \Phi^2 \circ \Phi^1(x)$$

として構成することにしよう。すると，このΦについてただちにつぎの系が得られることになる。

補助定理1の系 仮定1，2，3および5の下では，Φもまた優半連続となる。

証 明

注（8） この点については，たとえば W. Hildenbrand, *Core and Equilibria of a Large Economy*, 1974, p. 23, W. Hildenbrand and A. P. Kirman, *Introduction to Equilibrium Analysis*, 1976, p. 194 など参照。

補助定理からそれぞれの Φ^q が優半連続である以上，その合成であるΦについても同一の性質が成り立つことは自明である。

以下では初期の配分 x^0 から出発して，最初の一サイクルが終了したときの配分を $x^1 \in \Phi(x^0)$のように書き，したがって t 番目のサイクルが終了したときの配分を $x^t \in \Phi(x^{t-1})$ のように書くことにする。すると

補助定理2　仮定1および2の下では，再配分過程 $\{x^t\}_{t=0}^{\infty}$ はかならず極限点をもち，それらの極限点はすべての取引主体にとって無差別な配分となる。(9)

証　明

$x^t \in A$で，Aはコンパクト集合であるから，$\{x^t\}_{t=0}^{\infty}$ はかならず収束する部分列をもち，したがってそのそれぞれの極限点はAの非空の部分集合 X^* をなしている。

X^* がたんに1個の元 x^* しか含んでいないとすれば，仮定1の反射性から定理の帰結は自明である。それゆえ以下では X^* が2個以上の元を含むとし，その任意の2元を x^*, x^{**} として，$u_r(x_r^*)=u_r(x_r^{**})$となることを示すことにしよう。

いま x^*, x^{**} に収束する$\{x^t\}$の部分列をそれぞれ$\{x^{t'}\}$, $\{x^{t''}\}$で記すとする。すると各主体の効用が再配分過程をつうじて非減少であること，すなわち $u_r(x_r^{t+1}) \geqq u_r(x_r^t)$ であることから，すべての t'' について $u_r(x_r^*) \geqq u_r(x_r^{t''})$ が成り立ち，またすべての t' について $u_r(x_r^{**}) \geqq u_r(x_r^{t'})$ が成り立つ。したがって前者から

$$u_r(x_r^*) \geqq \lim_{t''\to\infty} u_r(x_r^{t''}) = u_r(x_r^{**})$$

となり，後者から

$$u_r(x_r^{**}) \geqq \lim_{t'\to\infty} u_r(x_r^{t'}) = u_r(x_r^*)$$

となって，結局

$$u_r(x_r^*) = u_r(x_r^{**})$$

となるほかはない。

補助定理3　仮定 1，2，3 および5の下では，$\{x^t\}_{t=0}^{\infty}$ の極限点はかならずk人最適配分となる。(10)

証　明

注(9) Graham *et al, op. cit.*, p. 449, Lemma 1 参照。

(10) Graham, *et al, op. cit.*, p. 451, Theorem 3. 証明の骨子は W. I. Zangwill, *Nonlinear Programming: A Unified Approach*, 1969, pp. 91-92 参照。

前にも述べたように$\{x^t\}_{t=0}^{\infty}$については収束部分列 $x^{t'}\to x^*$, $t'\in T'$ がかならず存在し，ここでT'はいうまでもなくこの部分列を定める添数集合である。

さてつぎに部分列 $\{x^{t'+1}\}_{T'}$ を考えれば，これもまたコンパクト集合に含まれる無限点列であるから，T' のなかから適当に T'' を選べば，$x^{t'+1}\to x^{**}$, $t'\in T''\subset T'$ とすることができる。そしてすでに補助定理2で証明したように，x^*, x^{**} についてはかならず

$$u_r(x_r^*)=u_r(x_r^{**})\quad \text{all } r$$

が成り立っているのでなくてはならない。

ところがいまもし x^* が k 人最適配分ではないとすれば，$\Phi(x^*)$に属する配分はかならずある取引主体の効用を x^* におけるより増大させるのでなくてはならない。そして $x^{t'}\to x^*$, $t'\in T'$ であれば，いうまでもなく $x^{t'}\to x^*$, $t'\in T''$ でもあり，また $x^{t'+1}\in\Phi(x^{t'})$, $t'\in T''$, $x^{t'+1}\to x^{**}$, $t'\in T''$ で，しかも補助定理1の系によりΦは優半連続なのであるから，$x^{**}\in\Phi(x^*)$ となるのでなくてはならない。よって上述のところから

$$u_r(x_r^*)<u_r(x_r^{**})\quad \text{some } r$$

とならねばならないが，これは前のパラグラフで導いた帰結に相反する。

補助定理4　仮定1，2，3，4′および5の下では，再配分過程の極限点はただ1個となる。(11)

証　明

いま極限点が2個以上あったとし，その任意の二つを x^*, x^{**} とすれば，補助定理2で示したように，すべての r について

$$u_r(x_r^*)=u_r(x_r^{**})$$

である。ところが x^*, x^{**} の凸結合 $\alpha x^*+(1-\alpha)x^{**}$, $\alpha\in(0,1)$をつくれば，少なくとも $x_r^*\neq x_r^{**}$のような r については，仮定 4′ から

$$u_r[\alpha x_r^*+(1-\alpha]\,x_r^{**}]>u_r(x_r^*)$$

が成り立ち，しかも x^*, $x^{**}\in A$ である以上，もちろん $\alpha x^*+(1-\alpha)x^{**}\in A$ でもある。したがって x^* は k 人最適たりえないことになり，これは補助定理3で証明したところと矛盾する。

以上の結果を総合することによって，われわれはつぎの基本定理を得る。

定理1　仮定1，2，3，4′および5の下では，再配分過程$\{x^t\}_{t=0}^{\infty}$ は k 人最適の配分に収束する。

注(11)　Graham, *et al*, *op. cit.*, p. 451, Corollary 3.

証　明

結論に反して，$\{x^t\}_{t=0}^{\infty}$ が極限点 x^* に収束しなかったと仮定する。いま x^* を中心として十分小さな超球 $B(x^*)$ をつくるとすれば，この仮定はどんな t_n についてもかならず $t'_n \geqq t_n$ のような t'_n が存在して，$x_n^{t'}$ が $B(x^*)$ に含まれないようになしうること，そしてそのとき一般性を失うことなく $t'_{n+1} > t'_n$ となしうることを意味している。これはもっぱら $B(x^*)$ の外部に $\{x^t\}$ の部分列 $\{x^{t'}\}$ が選べるということにほかならない。

ところが $\{x^{t'}\}$ はコンパクト集合 A に含まれるわけであるから，それは収束する部分列 $\{x^{t''}\}$ をもたねばならず，また補助定理4により極限点は1個しかないのであるから，結局 $\{x^{t''}\}$ は x^* に収束するのでなくてはならない。しかしこれは明らかに前のパラグラフで述べた帰結と相容れない。

よってもとの点列 $\{x^t\}$ そのものが x^* に収束するのでなくてはならないが，x^* は補助定理3で示したとおり k 人最適配分の点である。

4　以上の分析をつうじて，それぞれ k 人（$k<m$）から成る一連のグループの取引経路が，それらのグループのいずれにも改善の余地を残さないという意味での k 人最適配分の状態に導くことが知られた。これは $2 \leqq k < m$ のどの整数 k についても成り立つ帰結であるが，しかし一般にはそのような k 人最適の配分がかならずパレート最適配分となる保証はなく，この点について反例をあげることは容易であろう。[(12)]

本稿の後半部でわれわれが携わるのは，それではいかなる場合に k 人最適の配分がパレート最適配分となりうるかの考察であり，そのための十分条件すなわち前者が後者を事実上保証するための条件の究明である。そのような課題の手始めとして，まずわれわれは近時 Parity Theorem ないしは Size Theorem として知られるつぎの一連の定理を考察する。

補助定理5　仮定1，2，3，4および5の下で，もしあるグループ内で改善をもたらす再配分があるならば，かならず財の数を越えない人数のグループ内でも改善をもらたす再配分がある。[(13)]

証　明

いま一般にあるグループ $G \subseteq M$ についてその成員の状況を改善する再配分があったとしよう。そのとき $G^* \subseteq M$ で $\mu(G^*) \leqq n$ を満たすグループについても，それに属する成員の状況を改善する再配分があることを示すのが，定理の眼目である。ここで $m=\mu(M) \leqq n$ であるか $\mu(G) \leqq n$ であるとすれば，定理の成立は自明であるから，以下ではもっぱら $n < \mu(G) \leqq m$ の場合のみについて考

注(12)　たとえば Feldman, *op. cit.*, pp. 465-466 参照。

(13)　Graham *et al*, *op. cit.*, pp. 445-448, Theorem 1，2 参照。

察すれば足りるであろう。

さて仮定によって，現行の配分 x に対し

$$u_r(x'_r) \geqq u_r(x_r) \text{ all } r \in G$$

$$u_r(x'_r) > u_r(x_r) \text{ some } r \in G$$

$$\sum_{r \in G} x'_r = \sum_{r \in G} x_r$$

となるような再配分 x' が存在するから，この x' の近傍から適当に x'' を選ぶならば，仮定 2，3 および 5 によって

$$u_r(x''_r) > u_r(x_r) \text{ all } r \in G$$

$$\sum_{r \in G} x''_r = \sum_{r \in G} x_r$$

とすることができる。

ここで

$$z_r = x''_r - x_r, \quad r \in G$$

と定義し，n 次元ユークリッド空間におけるそれらの z_r の凸包を Γ とすれば，Γ は当該の空間における凸多角集合となり，その端点の個数はたかだか $\mu(G)$ を越えることはない。そして x も x'' もそのグル一プにとって実現可能であるところから，

$$\sum_{r \in G} z_r = \sum_{r \in G} (1/\mu(G)) z_r = 0$$

と書け，したがって Γ は明らかに原点 0 を含んでいる。

ところでさらに分類すれば，二つの可能な場合があり，その一つは Γ が内点として原点を含む場合，またもう一つはその面か稜の上に原点を含む場合である。

まず後者の場合からさきにとり上げることにすれば，この場合には原点は $n-1$ を越えない次元をもつ線型部分空間に含まれ，したがってこれを z_r の全部あるいは一部の凸結合としてあらわすことができる。そこで凸解析の分野で著名なカラテオドリーの定理[14]が適用されて，原点をたかだか n を越えない個数の適当な z_r の凸結合としてもあらわしうることになる。ゆえにわれわれは $G^* \subset M$，$\mu(G^*) \leqq n$ のような主体の添数 r の集合とある正数 α_r の組について

$$\sum_{r \in G^*} \alpha_r z_r = 0, \quad \sum_{r \in G^*} \alpha_r = 1$$

と書きあらわすことができるわけである。

この結果を踏まえた上で，

$$x^*_r = \alpha_r z_r + x_r \quad \text{all } r \in G^*$$

と定義すれば，$z_r = x''_r - x_r$ の定義から

注(14) カラテオドリーの定理については，たとえば H. Nikaido, *Convex Structure and Economic Theory*, 1968, p. 19, R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, 1969, p. 155, J. Warga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, 1972, pp. 139-140, 丸山徹「コンパクト集合族の位相に関する覚え書」,『三田学会雑誌』1977年6月号, p. 93 などを参照。

$$x_r^* = \alpha_r x_r'' + (1-\alpha_r) x_r \quad \text{all } r \in G^*$$

と書け，したがって $u_r(x_r'') > u_r(x_r)$ である以上，仮定4から

$$u_r(x_r^*) > u_r(x_r) \quad \text{all } r \in G^*$$

となる。そして

$$\sum_{r \in G^*} x_r^* = \sum_{r \in G^*} \alpha_r z_r + \sum_{r \in G^*} x_r = \sum_{r \in G^*} x_r$$

であるから，これは $\mu(G^*) \leqq n$ を満たすグループ G^* について，その成員のすべてを有利にする再配分があることを意味している。

つぎに原点が Γ の内点となっている場合に移るが，この場合も仮定3を考慮に容れつつ適当に n 次元ベクトル $\delta \geq 0$ を選んで点 $-\delta$ が Γ の面か稜の上にくるようにすれば，前の場合に準じたとり扱いが可能となる。すなわち前と同様，$\mu(G^{*\prime}) \leqq n$ のようにある $G^{*\prime} \subset M$ を選べば，ある正数 α_r' の組があって

$$\sum_{r \in G^{*\prime}} \alpha_r' z_r = -\delta, \quad \sum_{r \in G^{*\prime}} \alpha_r' = 1$$

とすることができる。

そこでその α_r' について

$$x_r^{*\prime} = \alpha_r'(z_r + \delta) + x_r \quad \text{all } r \in G^{*\prime}$$

と定義すれば，

$$x_r^{*\prime} = \alpha_r' (x_r'' + \delta) + (1-\alpha_r') x_r \quad \text{all } r \in G^{*\prime}$$

となり，仮定3および5によって

$$u_r(x_r'' + \delta) > u_r(x_r'') \quad \text{all } r \in G^{*\prime}$$

かつ仮定1によって

$$u^r(x_r'' + \delta) > u_r(x_r) \quad \text{all } r \in G^{*\prime}$$

となるから，仮定4から

$$u^r(x_r^{*\prime}) > u_r(x_r) \quad \text{all } r \in G^{*\prime}$$

となる。よって

$$\sum_{r \in G^{*\prime}} x_r^{*\prime} = \sum_{r \in G^{*\prime}} \alpha_r'(z_r + \delta) + \sum_{r \in G^{*\prime}} x_r = -\delta + \delta + \sum_{r \in G^{*\prime}} x_r = \sum_{r \in G^{*\prime}} x_r$$

と併せて，$\mu(G^{*\prime}) \leqq n$ のようなグループ $G^{*\prime}$ について，やはりその成員のすべてを有利とする再配分があったことになる。

定理2　仮定1，2，3，4および5の下では，k が財の数 n を下回らなければ，k 人最適の配分はパレート最適配分となる。(15)

注(15) Madden, *op. cit.*, p. 587, Theorem 2, Graham *et al*, *op. cit.*, p. 448, Corollary 2参照。

証　明

$G=M$ と考えれば，補助定理5から自明である。

5　上に証明した Parity Theorem は，当該の経済がパレート的改善の余地を含むかぎり，それがたかだか財の数 n を越えない取引者数で成就されうることを示すものであり，つぎに述べるようなさまざまな点でわれわれの興味を惹くものである。

まず，所与の多数アクティヴィティの下で n 種の財を生産する経済では，有効な生産はたかだか n 個を越えないアクティヴィティの稼動によって達成されることがよく知られている。また n 種の資源の制約に服する線型計画問題においても，やはりその最適解は通常 n 個を越えない変数の正値を含むことになる。ここで考察した Parity Theorem がこれらと類同的な結果を与えているのは，まず理論の形式構造の点からみて，はなはだ興趣に富む新知見であるということができるであろう。

しかし内容的により一そう重要なのは，パレート最適配分がある種の条件下ではかならずしも全員の同時的参加を俟たないでも達成されうるという啓示である。情報や取引に費用を要する経済においては，パレート的改善の達成は要参加主体数と逆相関をもつと考えられるから，その点からすれば，定理の帰結はパレート最適配分が予期されるところよりもいくばくか容易であることを示すものと解されよう。

また上掲の定理は，相互に有利な取引が少なくとも k 人の主体の参加を必要とする場合には，当該の経済は少なくとも k 種の財を含まなくてはならないことをも意味している。というのは，k 種の財より少ない財で改善を含む交換が可能であれば，定理の帰結からただちに，k 人より少ない主体を含むグループによっても改善が可能となるからである。

他方上記の帰結は，$k \geqq 2$ のすべての k について k 人最適配分がパレート最適配分になることをかならずしも意味していないことに注意すべきである。すなわち k が財の数 n を下回る場合の k 人最適について，それがパレート最適配分となるための条件は，上記の推論によっては何らカバーされていないのである。なかんづく交換のもっとも原基的な形態であるいわゆる双方取引（bilateral trade）の事例すなわち $k=2$ の事例の考察にあたっては，上記の定理はたかだか2財の事例すなわち $n=2$ の事例しかとり扱うことができず，それでは興味に乏しいであろう。日常経験の示すところによれば，双方取引は多角取引（multilateral trade）に比してはるかに普遍的な現象であり，したがってわれわれに残された課題は，さらに Parity Theorem を越えて，一般に多数財の世界で2人最適の配分がパレート最適配分となるための十分条件を明らかにすることでなくてはならない。一般的受容性をもつ財としての貨幣の役割は，このようなアプローチを辿ったときに始めて明らかとなるであろう。

（経済学部教授）