Title	可測多価写像の理論 : 基礎と応用をめぐる総合報告
Sub Title	Theory of measurable correspondences : mathematical foundations and its applications
Author	丸山, 徹
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1980
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.73, No.1 (1980. 2) ,p.113- 159
JaLC DOI	10.14991/001.19800201-0113
Abstract	
Notes	小特集 経済学と函数解析 論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19800201-0113

可測多価写像の理論

——基礎と応用をめぐる総合報告——

丸山　徹

序

本稿は多価写像の可測性とその積分に関する最近の理論を，筆者自身が得た若干の結果も含めて，総合的に展望しようとするものである。

古くは von Neumann〔49〕による，可測選択子の存在に関する研究があるけれども，この分野の本格的な理論はごく最近20年ほどの間に展開されたと言ってよい。そしてそのような研究を急速調に推し進めた動因が，数理経済学・制御理論等，応用分野からの大きな要請であったことにも注目しておきたい。その結果，たとえば Rådström の埋め込み定理（Rådström〔43〕，丸山〔36〕）などをつうじてコンパクト・凸集合を“ベクトル化”し，多価写像を一価写像に還元してしまうのではなしに，あくまでも“多価”の写像としてそれを取り扱うことの本質的な意義が明確となった。またいろいろな最適化問題の解の存在証明などにも，かなり統一的な方法論が見出されつつあるというのが現状である。

可測多価写像の理論については，既に Castaing-Valadier〔11〕による優れた総合的研究がなされており，本稿の叙述もきわめて多くをこの書物に負うている。また Ioffe-Tihomirov の最近の名著〔26〕や Warga〔52〕もこの問題に多くのページを割いており，さらに詳細な展望論文として Wagner〔52〕，およびそれを補う Ioffe〔25〕がある。

§1. 多価写像の可測性

まず議論の出発点として，かなり一般的な枠組の中で，多価写像の可測性を定義することから始めたい。

$(X,\mathscr{E})$ を可測空間（$\mathscr{E}$ は X 上の σ-集合体），(Y,ρ) を距離空間とする。Γ が X の各点に，Y のある非空部分集合を対応させる多価写像であることを

$$\Gamma : X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y \tag{1}$$

と書くことにしよう。とくに，すべての$x \in X$について$\Gamma(x)$ がYのコンパクト集合（resp. 閉集合，凸集合，etc.）である場合には，Γはコンパクト値（resp. 閉値，凸値，etc.）であるなどという。

便宜上，次のような記号の約束をする。

$\mathfrak{Comp}\ Y$： Yにおける非空コンパクト集合の全体

h： $\mathfrak{Comp}\,Y$上の Hausdorff の距離

$\mathscr{B}$： hによって生成される $\mathfrak{Comp}\ Y$上の Borel σ- 集合体

$\Gamma^{-s}(A)=\{x \in X \mid \Gamma(x) \subset A\}$, $A \subset Y$

$\Gamma^{-w}(A)=\{x \in X \mid \Gamma(x) \cap A \neq \phi\}$, $A \subset Y$

$G(\Gamma)=\{(x,\ y) \in X \times Y \mid y \in \Gamma(x)\}$

コンパクト値多価写像$\Gamma : X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$は“多価写像”と考えるかわりに，$\mathfrak{Comp}\ Y$の中に値をとる一価写像とみなした方が便利な場合も多い。そのときには (1) のかわりに

$$\Gamma : X \longrightarrow \mathfrak{Comp}\ Y \tag{2}$$

と書いておけば明解であろう。写像（2）の可測性を定義するとすれば，次のような方法が最も常識的でまた自然である。

定義　コンパクト値多価写像$\Gamma : X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$（あるいは$\Gamma : X \rightarrow \mathfrak{Comp}\ Y$）について

$$\Gamma^{-1}(\mathscr{B}) \subset \mathscr{E}$$

が成り立つとき，Γは可測であるという。

$\Gamma(x)$ が必ずしもコンパクトでない場合には，この定義はうまくゆかないので，そうした一般の場合には定義も修正する必要が生ずる。いかにしてそれが行なわれうるかについては，後に詳しく述べることにしよう。

さて，コンパクト値多価写像に関する，上記のような可測性の概念はいくとおりかの仕方で特徴づけることができる。そのためにひとつだけ準備的な命題を述べておこう。

補題 1　(Y, ρ) を可分な距離空間とし，次のような二種類の集合族を考える。

(a)　$\{K \in \mathfrak{Comp}\ Y \mid K \subset U\}$: Uは開集合

(b)　$\{K \in \mathfrak{Comp}\ Y \mid K \cap V \neq \phi\}$: Vは開集合

$\mathfrak{Comp}\ Y$において (a) のような形の集合族が生成するσ-集合体を $\mathscr{B}_1$，(b) のような形の集合族が生成する σ- 集合体を $\mathscr{B}_2$ とすれば，$\mathscr{B}=\mathscr{B}_1=\mathscr{B}_2$。

証明） 1° $\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{B}_2$ なることの証明。

$$V_n = \{ y \in Y \mid \rho\ (y, Y \setminus U) < \frac{1}{n} \}$$

とおけば

$$Y \setminus U = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \quad 。$$

次にこれらの V_n について

$$K \cap (Y \setminus U) \neq \phi \Longleftrightarrow K \cap V_n \neq \phi \text{ for all } n \qquad (3)$$

の成り立つことが容易に知られる。$\Longrightarrow$は明らかであるから，$\Longleftarrow$だけを確認しておこう。そこで $K \cap V_n \neq \phi$ (for all n) とし，$x_n \in K \cap V_n$ ($n = 1, 2, \cdots$) とすれば，$\{x_n\}$ はコンパクト集合Kの点列であるから，収束部分列を有する。その極限を x_0 とすれば，$x_0 \in K \cap (Y \setminus U)$ が成り立つ。これで（3）が示されたのである。

(3) により，

$$\mathfrak{Comp}\ Y \setminus \{ K \in \mathfrak{Comp}\ Y \mid K \subset U \}$$
$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{ K \in \mathfrak{Comp}\, Y \mid K \cap V_n \neq \phi \} \quad .$$

したがって $\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{B}_2$。

2° $\mathscr{B}_2 \subset \mathscr{B}_1$ なることの証明。

$$F_n = \{ y \in Y \mid \rho\ (y, Y \setminus V) \geqq \frac{1}{n} \}$$

とおけば，

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \quad 。$$

そうすると

$$\{ K \in \mathfrak{Comp}\ Y \mid K \cap V \neq \phi \}$$
$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ K \in \mathfrak{Comp}\ Y \mid K \cap F_n \neq \phi \}$$
$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} [\ \mathfrak{Comp}\ Y \setminus \{ K \in \mathfrak{Comp}\ Y \mid K \subset Y \setminus F_n \}] \quad .$$

ゆえに $\mathscr{B}_2 \subset \mathscr{B}_1$。

3° $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 = \mathscr{B}_2$ の証明。

Aを $\mathfrak{Comp}\ Y$の開集合とすれば，丸山〔38〕定理１ より，Aは (a) または (b) の形式をもつ有限個の集合の共通部分の合併として表わすことができる。しかるにYは可分であるから，丸山〔38〕定理４の(iii)によれば，$\mathfrak{Comp}\ Y$ は可分となり，上記の合併は可算個の集合の合併とすることができる。ゆえに $\mathscr{B} \subset \mathscr{B}_1 = \mathscr{B}_2$。

他方 $\mathscr{B}_1 = \mathscr{B}_2 \subset \mathscr{B}$は明らかゆえ，所望の帰結を得る。 （証了）

定理1　$(X,\mathscr{E})$ を可測空間，(Y,ρ) を可分な距離空間，$\Gamma : X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$をコンパクト値多価写像とするとき，次の三命題は互いに同値である。

(i)　$\Gamma^{-1}(\mathscr{B})\subset\mathscr{E}$。

(ii)　Yにおける すべての開集合Uについて，

$$\Gamma^{-w}(U)\in\mathscr{E}。$$

(iii)　Yにおける すべての閉集合Fについて

$$\Gamma^{-w}(F)\in\mathscr{E}。$$

証明）(i)⇒(ii)：Γが可測であるとする。Yの開集合Uに対して

$$\Gamma^{-w}(U)=\Gamma^{-1}(\{K\in\mathfrak{Comp}\ Y\,|\,K\cap U\neq\phi\})$$

補題1によれば $\{K\in\mathfrak{Comp}\ Y\,|\,K\cap U\neq\phi\}\in\mathscr{B}$であるから，$\Gamma$の可測性により，$\Gamma^{-w}(U)\in\mathscr{E}$。

(i)⇒(iii)：　Γが可測であるとする。Yの閉集合Fに対して

$$\Gamma^{-w}(F)=X\setminus\Gamma^{-1}(\{K\in\mathfrak{Comp}\ Y\,|\,K\subset Y\setminus F\})$$

補題1によれば$\{K\in\mathfrak{Comp}\ Y\,|\,K\subset Y\setminus F\}\in\mathscr{B}$であるから，$\Gamma^{-w}(F)\in\mathscr{E}$。

(ii) or (iii)⇒(i)：補題1により，(a) または (b) のような形式の集合族は$\mathscr{B}$を生成するから，(ii)あるいは(iii)から(i)を得る。　　　　（証了）

系1　Xを位相空間とし，$\mathscr{E}$はX上の Borel σ-集合体とする。また (Y,ρ) は可分な距離空間とするとき，優半連続あるいは劣半連続なコンパクト値多価写像$\Gamma : X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$は可測である。

この系は定理1と丸山〔39〕定理1，定理4からただちに得られる。

さて先にもふれたとおり，多価写像$\Gamma : X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$がコンパクト値でない場合には可測性の定義を修正する必要がある。そのために定理1の(ii)あるいは(iii)の条件を可測性の定義として採用するのが順当であろう。ここでは(ii)の方を採って，次のように定義する。

定義　$(X,\mathscr{E})$ を可測空間，(Y,ρ) を距離空間（あるいはより一般の位相空間）とする。多価写像$\Gamma : X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$が，$Y$におけるすべての開集合$U$について

$$\Gamma^{-w}(U)\in\mathscr{E}$$

を満たすとき，Γは可測であるという。

とくにΓがコンパクト値の場合には，定理1により，この定義は先の定義と合致する。

ところで可測性の定義として，定理1の(ii)の条件を採って，(iii)を採らなかったことにはそれなり

の理由がある。つまりごく“normal”な状況において(iii)は(ii)を含意するが，逆は必ずしも成り立たない場合がある。そこでここでは規定のゆるい(ii)の方を採ることにしたのである。この点についての理論的背景については後述の定理3を見ていただきたい。

ノート

本節の叙述はとりわけ Castaing-Valadier〔11〕Chapter Ⅲ，§1およびDebreu〔15〕に負う。また距離空間のコンパクト集合族の位相に関する総合的な研究としては丸山〔38〕,〔39〕を参照していただきたい。

§2 可測選択子と Castaing 表現

定義 $(X,\mathscr{E})$，$(Y,\mathscr{E}')$ を可測空間とし，多価写像 $\Gamma: X \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Y$ を考える。この Γ に対して

$$f(x)\in\Gamma(x) \text{ for all } x\in X$$

を満足する一価可測写像 $f: X\to Y$ が存在するとき，f は Γ の**可測選択子** (measurable selection) であるという。

とくに Y を位相空間とし，$\mathscr{E}'$ は Y の Borel σ- 集合体 $\mathscr{B}(Y)$ とするとき，多価写像 $\Gamma: X \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Y$ に対し，可算個の可測選択子 $\{f_n: X\to Y\}$ が存在して

$$\mathrm{Cl.}\ \{f_n(x)\ ;\ n=1,2,\cdots\}=\Gamma(x) \text{ for all } x\in X$$

が成り立つならば，$\{f_n\}$ を Γ の **Castaing 表現** (Castaing representation) という。

可測な多価写像は（ある種の限定条件の下に），可測選択子をもつ多価写像，あるいは Castaing 表現をもつ多価写像として特徴づけられるのであって，実はこの点が応用上最も重要である。ここで可測な多価写像というのは，もちろん前節の終わりに定義した意味である。

定理2 $(X,\mathscr{E})$ を可測空間，(Y,ρ) を完備・可分な距離空間とする。このとき閉値多価写像 $\Gamma: X \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Y$ について次の四命題は同値である。

(i) Γ は可測。

(ii) Γ は可測選択子を有する。

(iii) Γ は Castaing 表現を有する。

(iv) 各 $y\in Y$ について

$$D_y: x\longmapsto \inf\{\rho(y,z)\mid z\in\Gamma(x)\}$$

で定義される函数 $D_y: X\to\mathbb{R}$ は可測。

証明）(i)⇒(ii)[1]：一般性を失うことなくYの直径は≦1として証明すればよい。まずYの可算稠密部分集合を$\{a_m\}$としよう。そして

$$\left\{\begin{array}{ll}\rho[f_n(x),\ f_{n+1}(x)]\leqq\dfrac{1}{2^{n-1}} & \text{for all } x\in X\\ B_{2^{-n}}[f_n(x)]\cap\Gamma(x)\neq\phi & \text{for all } x\in X\end{array}\right. \tag{1}$$

を満たす可測な一価写像の列$f_n: X\to Y$ $(n=0,1,2,\cdots)$を逐次，次の如くして構成する。

1° $f_0(x)=a_0$ for all $x\in X$とおく。このf_0は明らかに(1)を満たしている。(Yの直径≦1を用いる。)

2° $f_0, f_1, \cdots, f_n$が次の条件を満たすように選ばれたとする。すなわち

$$\left\{\begin{array}{ll}\rho[f_k(x),\ f_{k+1}(x)]\leqq\dfrac{1}{2^{k-1}} & \text{for all } x\in X\\ & k=1,\cdots,n-1\\ B_{2^{-k}}[f_k(x)]\cap\Gamma(x)\neq\phi & \text{for all } x\in X\\ & k=0,1,\cdots,n\end{array}\right.$$

$p\in\{0,1,2,\cdots\}$に対して

$$E_p=\{x\in X\,|\,B_{2^{-(n+1)}}(a_p)\cap\Gamma(x)\neq\phi\}$$
$$F_p=\{x\in X\,|\,f_n(x)\in B_{2^{-(n-1)}}(a_p)\}$$
$$G_p=E_p\cap F_p$$

とおけばΓとf_nの可測性により，$G_p\in\mathscr{E}$である。f_nの構成により，いま任意に$x\in X$を固定して考えると，

$$\rho(f_n(x),u)<\frac{1}{2^n}$$

を満たす$u\in\Gamma(x)$が存在する。

さらに$\{a_m\}$はYで稠密ゆえ，このuに対して

$$\rho(u,a_m)<\frac{1}{2^{n+1}}$$

を満たすa_mが存在しなければならない。したがって

$$B_{2^{-(n+1)}}(a_m)\cap\Gamma(x)\neq\phi$$
$$f_n(x)\in B_{2^{-(n-1)}}(a_m)\ [2]$$

となり，したがって$x\in G_m$である。xは任意であったから

$$X=\bigcup_m G_m.$$

ここで，f_{n+1}を次のように定義しよう。

注(1) Kuratowski-Nardzewski〔31〕pp. 389-400による。

(2) $\rho[f_n(x),\ a_m]\leqq\rho[f_n(x),\ u]+\rho(u,\ a_m)\leqq 1/2^n+1/2^{n+1}<1/2^{n-1}$

$$f_{n+1}(x)=a_m \text{ if } x\in G_m\setminus\bigcup_{k<m} G_k$$

このようにして定義された f_{n+1} が可測であることは簡単に確認することができる。しかも

$$\begin{cases} \rho[f_n(x),\ f_{n+1}(x)]\leqq\dfrac{1}{2^{n-1}} & \text{for all } x\in X \\ B_{2^{-(n+1)}}[f_{n+1}(x)]\cap\Gamma(x)\neq\phi & \text{for all } x\in X。\end{cases}$$

こうして（1）を満たす可測函数列 $\{f_n\}$ が構成されたわけであるが，各 $x\in X$ について $\{f_n(x)\}$ は Y の Cauchy 列であることは明らかである。したがって Y の完備性により，$f_n(x)$ は極限 $f(x)$ を有する。しかも

$$\rho[f_n(x),\ \Gamma(x)]\to 0 \text{ as } n\to\infty$$

である。$\Gamma(x)$ は閉集合であるから，$f(x)\in\Gamma(x)$。このようにして定義される

$$f: X\to Y$$

は可測写像列 $\{f_n\}$ の収束極限であるからやはり可測である。したがって，この f は Γ の可測選択子となる。

(ii)⇒(iii)：　$\{a_n\}$ を Y における可算稠密部分集合とする。各 $(n,\ m)\in\mathbb{N}^2$ に対して

$$\Gamma_{nm}(x)=\begin{cases}\Gamma(x)\cap B_{2^{-m}}(a_n) & \text{if } x\in\Gamma^{-w}[B_{2^{-m}}(a_n)] \\ \Gamma(x) & \text{otherwise}\end{cases}$$

とおけば，$\overline{\Gamma_{nm}(x)}\neq\phi$。さらに U を Y の開集合とすれば

$$\begin{aligned}&\{x\in X\mid\overline{\Gamma_{nm}(x)}\cap U\neq\phi\}\\ =&\{x\in X\mid\Gamma_{nm}(x)\cap U\neq\phi\}\\ =&\Gamma^{-w}[B_{2^{-m}}(a_n)\cap U]\cup\{\Gamma^{-w}[B_{2^{-m}}(a_n)]^c\cap\Gamma^{-w}(U)\}\in\mathscr{E}。\end{aligned}$$

したがって多価写像

$$\overline{\Gamma_{nm}}: x\longmapsto\!\!\!\rightarrow\overline{\Gamma_{nm}(x)}$$

は可測で，もちろん閉値である。かくして(ii)により $\overline{\Gamma_{nm}}$ は可測選択子 f_{nm} を有することが判明する。

最後にこの $\{f_{nm}\}$ が Γ の Castaing 表現であること，すなわち，$\Gamma(x)=\overline{\{f_{nm}(x)\}}$ を示そう。$y\in\Gamma(x)$，$\varepsilon>0$　とし，$1/2^m\leqq\varepsilon/2$，$\rho(a_n,\ y)<1/2^m$ となるように m，n を選ぶ。すると

$$x\in\Gamma^{-w}[B_{2^{-m}}(a_n)],\ f_{nm}(x)\in\overline{B_{2^{-m}}(a_n)}$$

ゆえに

$$\rho(f_{nm}(x),\ y)\leqq\rho(f_{nm}(x),a_n)+\rho(a_n,\ y)\leqq\varepsilon。$$

したがって $\{f_{nm}\}$ は Γ の Castaing 表現である。

(iii)⇒(iv)：$\{f_n\}$をΓの Castaing 表現とすれば

$$D_y(x)=\inf_n \rho(y, f_n(x))$$

であるから D_y の可測性は明らか。

(iv)⇒(i)：　$\alpha>0$に対して

$$\{x\in X \mid D_y(x)<\alpha\}=\Gamma^{-w}[B_\alpha(y)]$$

に注意する。Yの可分性により，任意の開集合$U\subset Y$は開球列 $\{B_{\alpha_n}(y_n)\}$ を適当に選んで

$$U=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\alpha_n}(y_n)$$

とすることができるから，(iv)により

$$\Gamma^{-w}(U)=\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma^{-w}[B_{\alpha_n}(y_n)]\in\mathscr{E}。$$

（証了）

定理 3　$(X, \mathscr{E})$ を可測空間，(Y, ρ) を距離空間とし，多価写像$\Gamma: X \twoheadrightarrow Y$を考える。

(i)　Yの任意の閉集合Fについて$\Gamma^{-w}(F)\in\mathscr{E}$ならば，$\Gamma$は可測である。

(ii)　Yが局所コンパクトな Polish 空間で，しかも$\Gamma: X \twoheadrightarrow Y$ は閉値とする。このときΓが可測ならば，Yの任意の閉集合Fについて$\Gamma^{-w}(F)\in\mathscr{E}$。

証明）(i)　UをYの開集合とすれば，Uは可算個の閉集合 $\{F_n\}$ の合併として表わすことができる。すると

$$\Gamma^{-w}(U)=\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma^{-w}(F_n)\in\mathscr{E}。$$

(ii)　FをYの閉集合とすれば，Fは可算個のコンパクト集合 $\{K_n\}$ の合併として表わすことができる。このとき

$$\Gamma^{-w}(F)=\bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma^{-w}(K_n)$$

したがって，Yのコンパクト集合Kについて，$\Gamma^{-w}(K)\in\mathscr{E}$ を示せば十分であろう。

Yの Alexandrov のコンパクト化を$\tilde{Y}$とすれば，$\tilde{Y}$も距離づけ可能（したがってPolish）であるから，$\tilde{Y}$の位相を定める距離を$\tilde{\rho}$としよう。十分に大きな$n\geqq n_0$に対しては

$$K_n\equiv\{y\in\tilde{Y} \mid \tilde{\rho}(y, K)\leqq\frac{1}{n}\}\subset Y$$

で，しかもK_nはコンパクトである。

Γの Castaing 表現を $\{f_n\}$ とすれば，

$$\Gamma^{-w}(K)=\bigcap_{n\geqq n_0} \bigcup_{m} f_m^{-1}(K_n) \tag{1}$$

が成り立つことが次のようにして知られる。

まず$x\in\Gamma^{-w}(K)$とすれば，$\Gamma(x)\cap K\neq\phi$であるから

$$\Gamma(x)\cap\mathring{K}_n\neq\phi \text{ for all } n\geqq n_0 \quad 。$$

したがって$n\geqq n_0$に対して

$$f_m(x)\in K_n \text{ for some } m \quad 。$$

$$\therefore\ \Gamma^{-w}(K)\subset\bigcap_{n\geqq n_0}\bigcup_m f_m^{-1}(K_n) \quad .$$

逆に　$x\in\bigcap_{n\geqq n_0}\bigcup_m f_m^{-1}(K_n)$とすれば，

$$\Gamma(x)\cap K_n\neq\phi \text{ for all } n\geqq n_0 \quad 。$$

そこで$y_n\in\Gamma(x)\cap K_n$とすれば，$\{y_n\}_{n\geqq n_0}$はコンパクト集合K_{n_0}に含まれる。したがって$\{y_n\}_{n\geqq n_0}$は集積点$\bar{y}$を有し

$$\bar{y}\in\bigcap_{n\geqq n_0}K_n=K。$$

また$\Gamma(x)$は閉集合であるから，$\bar{y}\in\Gamma(x)$。ゆえに

$$\bigcap_{n\geqq n_0}\bigcup_m f_m^{-1}(K_n)\subset\Gamma^{-w}(K)。$$

以上で(1)が示された。

各f_mの可測性と$K_n\in\mathscr{B}$により，$\Gamma^{-w}(K)\in\mathscr{E}$。　(証了)

さて，多価写像$\Gamma:X\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$は，$X\times Y$におけるそのグラフ$G(\Gamma)$と一対一に対応する。そこでグラフが可測であること，つまり

$$G(\Gamma)\in\mathscr{E}\otimes\mathscr{B}(Y) \qquad (2)$$

なる条件を以て，Γの可測性を特徴づけることができないものであろうか。これは存外に難しい。以下順を追って，この問題に検討を加えてみよう。まず(2)がΓの可測性の必要条件であることから始めるが，ひとつだけ補題を準備しておく。

補題2　$(X,\mathscr{E})$を可測空間，(Y,ρ)を可分な距離空間，さらに(Z,ρ')を距離空間とする。写像$\varphi:X\times Y\to Z$に対して

(a)　$\varphi(x,\ y)$はxについて可測

(b)　$\varphi(x,\ y)$はyについて連続

と仮定する[(3)]。このときφは$(\mathscr{E}\otimes\mathscr{B}(Y),\ \mathscr{B}(Z))$-可測である。

証明）Yの可分性により，Yには可算稠密な部分集合$\{y_n\}$が存在する。そこで$p\in\mathrm{N}$と任意の$(x,\ y)\in X\times Y$に対して

注(3)　(a)，(b)を満たすような写像はCarathéodoryの写像といって§5でさらに詳しく研究する。

$$y \in B_{1/p}(y_n)$$

となる最小の$n \in \mathbb{N}$を選んで

$$\varphi_p(x, y) = \varphi(x, y_n)$$

とおく。φはyについて連続であるから，

$$\varphi_p(x, y) \to \varphi(x, y) \text{ as } p \to \infty。$$

またφ_pは可測な写像である。実際，φ_pは集合

$$X \times \{B_{1/p}(y_n) \setminus \bigcup_{m<n} B_{1/p}(y_m)\}$$

の上においては

$$(x, y) \longmapsto \varphi(x, y_n) \equiv \phi_n(x)$$

に等しい。ゆえにZの任意の Borel 集合Eに対して

$$\varphi_p^{-1}(E) = \bigcup_n \phi_n^{-1}(E) \times \{B_{1/p}(y_n) \setminus \bigcup_{m<n} B_{1/p}(y_m)\}。$$

ゆえにφ_pは可測である。したがってφ_pの極限函数φも可測である。（証了）

定理3　$(X, \mathscr{E})$を可測空間，(Y, ρ)を完備・可分な距離空間とする。閉値・可測多価写像$\Gamma: X \twoheadrightarrow Y$のグラフ$G(\Gamma)$は$X \times Y$の$\mathscr{E} \otimes \mathscr{B}(Y)$-可測集合である。

証明）　まず，各$x \in X$について$\Gamma(x)$が閉集合であることから，

$$G(\Gamma) = \{(x, y) \in X \times Y \mid \rho(y, \Gamma(x)) = 0\}$$

であるが，定理2により，函数

$$D_y: x \longmapsto \rho(y, \Gamma(x))$$

は可測である。ゆえに函数

$$(x, y) \longmapsto \rho(y, \Gamma(x))$$

は補題2の条件を満たし，可測である。ゆえに$G(\Gamma)$は可測集合となる。（証了）

定理3の逆もある形で成り立つのであるが，それを示すためには“射影定理”と呼ばれる。相当難しい定理を準備しなければならない。

μを可測空間$(X, \mathscr{E})$上の正値・有限測度とし，$\mathscr{E}$をμ-完備化して得られるσ-集合体を$\mathscr{E}_\mu$と書くことにしよう。さらに

$$\hat{\mathscr{E}} = \bigcap_\mu \{\mathscr{E}_\mu \mid \mu \text{は} (X, \mathscr{E}) \text{上の正値・有限測度}\}$$

と書くことにすれば，もちろん$\hat{\mathscr{E}}$もσ-集合体である。$\hat{\mathscr{E}}$に属する集合はしばしば汎可測 (universally measurable) な集合と呼ばれる。

注意　$(X,\mathscr{E},\mu)$ が正値・有限測度空間とすれば，$\left(\hat{\mathscr{E}}\right)_\mu=\mathscr{E}_\mu$。

そうすると射影定理は次のような形で述べることができる。

射影定理　$(X,\ \mathscr{E})$ は可測集合，Yは完備・可分な距離空間とする。このとき

$$G\in\mathscr{E}\otimes\mathscr{B}(Y)\Longrightarrow \mathrm{proj}_X G\in\hat{\mathscr{E}}。$$

この定理の証明は長々しいので，次節まで延期し，この結果を用いて，次の定理を示す。

定理 4　$(X,\mathscr{E},\mu)$ は，有限でかつ完備な測度空間とし，Y は完備・可分な距離空間とする。いま閉値多価写像$\Gamma:X\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Y$ のグラフ$G(\Gamma)$ が$\mathscr{E}\otimes\mathscr{B}(Y)$-可測集合であるとすれば，$\Gamma$は可測である。

証明）　Yの任意の開集合Uに対して

$$\Gamma^{-w}(U)=\mathrm{proj}_X(G(\Gamma)\cap(X\times U))。$$

$G(\Gamma)\cap(X\times U)\in\mathscr{E}\otimes\mathscr{B}(Y)$である。また$Y$は完備・可分な距離空間であるから，射影定理により

$$\Gamma^{-w}(U)\in\hat{\mathscr{E}}\subset\mathscr{E}_\mu=\mathscr{E}。$$

（証了）

以上，主として閉値の可測多価写像を扱ってきたが，可測選択子の存在定理はこれよりも大分一般化されて，Sainte-Beuve〔45〕(Theorem 3) に負う次のような定理にまとめられている。ここでは証明は省略する。

定理 5　$(X,\mathscr{E})$ を汎完備な可測空間，Yを Souslin 空間とする。多価写像$\Gamma:X\longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Y$のグラフ$G(\Gamma)$ が

$$G(\Gamma)\in\mathscr{E}\otimes\mathscr{B}(Y)$$

を満たすとき，Γは可測選択子を有する。

可測多価写像の簡単な性質

$(X,\mathscr{E})$ を可測空間，Yを完備・可分な距離空間とするとき，それらの間で定義される可測多価写像の演算に関する簡単な性質を列挙しておこう。

〔1〕Γが可測ならば

$$\overline{\Gamma}: x \mapsto\!\!\!\twoheadrightarrow \overline{\Gamma(x)}$$

も可測である。

〔2〕 可測多価写像の列 $\{\Gamma_n: X \longrightarrow\!\!\!\twoheadrightarrow Y\}$に対して，その合併をとる多価写像

$$\Gamma: x \mapsto\!\!\!\twoheadrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n(x)$$

も可測である。

〔3〕 Y を Banach 空間 $\mathfrak{X}$ とし，$\Gamma_1 \Gamma_2: X \longrightarrow\!\!\!\twoheadrightarrow \mathfrak{X}$ が可測ならば，

$$\Gamma_1 + \Gamma_2: x \mapsto\!\!\!\twoheadrightarrow \Gamma_1(x) + \Gamma_2(x)$$

も可測である。

〔4〕 Yを Banach 空間$\mathfrak{X}$とし，$\Gamma: X \longrightarrow\!\!\!\twoheadrightarrow \mathfrak{X}$が可測ならば，任意の$\alpha \in \mathbb{R}$に対して

$$\alpha\Gamma: x \mapsto\!\!\!\twoheadrightarrow \alpha\Gamma(x)$$

も可測である。

〔5〕 Γ_1, $\Gamma_2: X \longrightarrow\!\!\!\twoheadrightarrow Y$のうち$\Gamma_1$が可測で，すべての$x \in X$について

$$\Gamma_1(x) \subset \Gamma_2(x) \subset \overline{\Gamma}_1(x)$$

が成り立つならば，Γ_2 も可測である。

証明） Yの開集合Uについて

$$\Gamma_1(x) \cap U \neq \phi \Longrightarrow \Gamma_2(x) \cap U \neq \phi$$

は仮定により明らか。また逆に

$$\Gamma_2(x) \cap U \neq \phi \Longrightarrow \overline{\Gamma_1(x)} \cap U \neq \phi \Longrightarrow \Gamma_1(x) \cap U \neq \phi$$

したがって

$$\Gamma_1^{-w}(U) = \Gamma_2^{-w}(U) \in \mathscr{E}$$ （証了）

〔6〕 $Y = \mathbb{R}^n$ とする。$\Gamma: X \longrightarrow\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{R}^n$が可測のとき，

$$\mathrm{co}\ \Gamma: x \mapsto\!\!\!\twoheadrightarrow \mathrm{co}\ \Gamma(x)$$

も可測である。

証明） $\Lambda^{n+1} \equiv \{\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_{n+1}) \in \mathbb{Q}_+^{n+1} | \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{i=1}\}$

とおき，二種類のあたらしい多価写像

$$\Sigma_\lambda: x \mapsto\!\!\!\twoheadrightarrow \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \Gamma(x) ; \lambda \in \Lambda^{n+1}$$

$$\Delta : x \longmapsto\!\!\!\rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda^{n+1}} \textstyle\sum_\lambda(x)$$

を考える。〔3〕,〔4〕により，$\sum_\lambda$は可測であり，またΔは〔2〕によって可測である。しかるに，すべての$x \in X$に対して

$$\Delta(x) \subset \mathrm{co}\ \Gamma(x) \subset \overline{\Delta(x)}$$

が成り立つので，〔5〕により，co Γは可測である。 (証了)

ノート

可測選択子の理論については，とりわけ Castaing-Valadier〔11〕Chapter Ⅲ および Kuratowski-Nardzewski〔31〕を参照した。証明を省いた定理6については Sainte-Beuve〔45〕を見られたい。その他この問題については，Hildenbrand〔21〕pp. 53-79, Ioffe-Tihomirov〔26〕Chapter 8, Jacobs〔28〕, Hildenbrand〔21〕, Plis〔42〕, Sion〔47〕, Valadier〔48〕, Wagner〔50〕, Warga〔52〕, Chapter 1-7 などを見よ。また Souslin (analytic) 集合については Bourbaki〔7〕Part 2, Chapter Ⅸ, §6; Naimark〔41〕Appendix Ⅲ; Schwartz〔46〕Part 1, Chapter Ⅱ を見よ。

§3. 射影定理

この節では前節で既に利用した射影定理 (projection theorem) に厳密な証明を与える。

補題3 Xを位相空間，$M \subset X$とする。このとき

$$\mathscr{B}(M) = \{B \cap M \mid B \in \mathscr{B}(X)\}$$

証明) MからXの中への恒等埋め込み写像$i : M \to X$は連続であるから，

$$B \in \mathscr{B}(X) \Longrightarrow i^{-1}(B) = B \cap M \in \mathscr{B}(M)$$

ゆえに

$$\{B \cap M \mid B \in \mathscr{B}(X)\} \subset \mathscr{B}(M)。$$

逆に，$\mathscr{B}(M)$はMのすべての開集合を含む最小のσ-集合体である。一方，$\{B \cap M \mid B \in \mathscr{B}(X)\}$は$M$のすべての開集合を含む$\sigma$-集合体である。ゆえに$\mathscr{B}(M) \subset \{B \cap M \mid B \in \mathscr{B}(X)\}$とならねばならない。 (証了)

定義 $(X, \mathscr{E})$を可測空間とし，次の二条件を満たす可測集合の列$\{E_n\}$が存在するとき，$(X, \mathscr{E})$は**可分** (separable) であるという。

(1) $\mathscr{E}$は$\{E_n\}$によって生成される。

(2) $\{\chi_{E_n}\}$はXの任意の二点を分離する。

補題4　$(X,\ \mathscr{E})$ を可測空間とし，$\mathscr{E}$が $\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ によって生成されるとき，すべての $x\in X$について

$$\begin{aligned}&\bigcap_{\lambda}\{x'\in X\,|\,\chi_{E_\lambda}(x')=\chi_{E_\lambda}(x)\}\\=&\bigcap_{E\in\mathscr{E}}\{x'\in X\,|\,\chi_E(x')=\chi_E(x)\}\\=&\bigcap\{E\in\mathscr{E}\,|\,x\in E\}\end{aligned}$$

したがって$\mathscr{E}$がTの二点を分離すれば，$\{E_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ もTの二点を分離する。

証明）第二の等号は自明であるから，最初の等号のみを示せばよい。また，包含関係 “$\supset$” は明らかであるから，逆の包含関係 “$\subset$” だけを示せばよいであろう。すべての λ について

$$\chi_{E_\lambda}(x')=\chi_{E_\lambda}(x)$$

が成り立つとする。いま

$$\chi_B(x')=\chi_B(x)$$

の成り立つようなXの集合Bの族を$\mathscr{B}$とすれば

$$\mathscr{B}=\{B\subset X\,|\,\{x,x'\}\subset B \text{ or } \{x,x'\}\subset X\setminus B\}$$

は明らかにσ-集合体で，しかもすべてのE_λを含む，ゆえに$\mathscr{E}\subset\mathscr{B}$。　（証了）

補題5　$(X,\ \mathscr{E})$ を可分な可測空間とする。$\mathscr{E}$を生成し，かつ二点を分離する可測集合列 $\{E_n\}$ に対して，$h:X\to\{0,\ 1\}^{\mathbb{N}}$を

$$h:x\longmapsto\{\chi_{E_n}(x)\}$$

と定義すれば，hはXとその像$h(X)$の間に可測空間としての同型を与える。

証明）まずhがXから$h(X)$ の上への全単射であることは自明。また写像 $x\longmapsto\chi_{E_n}(x)$ は可測であるから，hももちろん可測である。最後に

$$E\in\mathscr{E}\Longrightarrow h(E)\in\mathscr{B}(h(T))\tag{1}$$

を示せばよい。そこで

$$\{E\subset X\,|\,h(E)\in\mathscr{B}(h(X))\}\tag{2}$$

とおけば，これはσ-集合体であり，補題3に注意すれば，

$$h(E_n)=\{(\xi_p)\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}\,|\,\xi_n=1\}\cap h(X)\ \in\mathscr{B}(h(X))$$

である。これからσ-集合体(2)はE_nを含むことが知られ，ゆえに所望の帰結(1)を得る。（証了）

補題6　$(X,\mathscr{E})$，$(X',\mathscr{E}')$ をふたつの可測空間とする。μを $(X,\mathscr{E})$ 上の有限・正値測度と

し，$\varphi: X \to X'$ は可測とする。

(i) $(X', \mathscr{E}')$ 上の測度 μ' を

$$\mu'(E) = \mu(\varphi^{-1}(E))\,;\ E \in \mathscr{E}' \tag{1}$$

と定めれば，φ は $(\hat{\mathscr{E}}, \hat{\mathscr{E}'})$-可測である。

(ii) X' が完備・可分な距離空間，X' の Souslin 集合族の生成する σ-集合体を $\mathscr{S}$ とすれば，$(\mathscr{E}, \mathscr{B}(X'))$-可測な写像 φ は $(\hat{\mathscr{E}}, \mathscr{S})$-可測である。

証明）(i) $E \in \mathscr{E}'_{\mu'}$ とすれば，ある $\mu'(M)=0$ なる $M \in \mathscr{E}'$ に含まれる集合 N と，適当な $E' \in \mathscr{E}'$ に対して $E = E' \cup N$ とすることができる。すると

$$\varphi^{-1}(E) = \varphi^{-1}(E') \cup \varphi^{-1}(N)。$$

しかるに $\mu'(N) = \mu(\varphi^{-1}(N)) = 0$ であるから，$\varphi^{-1}(N) \in \mathscr{E}_\mu$。$\varphi^{-1}(E') \in \mathscr{E} \subset \mathscr{E}_\mu$ はもちろんであるから，結局 $\varphi^{-1}(E) \in \mathscr{E}_\mu$。つまり φ は $(\mathscr{E}_\mu, \mathscr{E}_{\mu'})$-可測である。

μ を $(X, \mathscr{E})$ 上の任意の有限・正値測度とすると，(1) で定義された μ' について

$$\varphi^{-1}(\hat{\mathscr{E}'}) \subset \varphi^{-1}(\mathscr{E}'_{\mu'}) \subset \mathscr{E}_\mu。$$

ゆえに

$$\varphi^{-1}(\hat{\mathscr{E}'}) \subset \bigcap_\mu \mathscr{E}_\mu = \hat{\mathscr{E}}。$$

(ii) 完備・可分な距離空間 X'（あるいはより一般に Souslin 空間）上の任意の有限・正値 Borel 測度は内正則であり（Meyer の定理，Schwartz [46] pp. 122-124），また X' のすべての Souslin 集合は $(X', \mathscr{B}(X'))$ において汎可測である（Schwartz [46] p. 124, Corollary 1）。すなわち $\mathscr{S} \subset \widehat{\mathscr{B}(X')}$。したがって(i)により，$\varphi$ は $(\hat{\mathscr{E}}, \mathscr{S})$-可測である。（証了）

定理 6（射影定理）$(X, \mathscr{E})$ は可測集合，Y は完備・可分な距離空間とする。このとき

$$G \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{B}(Y) \Longrightarrow \mathrm{proj}_X\ G \in \hat{\mathscr{E}}。$$

証明）まず可算個の集合によって生成される，$\mathscr{E}$ の部分 σ-集合体 $\mathscr{E}_0$ を適当に選んで

$$G \in \mathscr{E}_0 \otimes \mathscr{B}(Y) \tag{1}$$

となしうることに注意しよう。実際，

$$\cup\{\mathscr{E}' \otimes \mathscr{B}(Y) \mid \mathscr{E}' \text{は可算個の集合によって生成される，}\mathscr{E}\text{の部分 }\sigma\text{-集合体}\}$$

とすれば，これは σ-集合体であり，したがって $\mathscr{E} \otimes \mathscr{B}(Y)$ と一致する。こうしてただちに (1) が得られるのである。

そこで，X 上の同値関係 $\sim$ を

$$x \sim x' \Longleftrightarrow \chi_{E_0}(x) = \chi_{E_0}(x') \text{ for all } E_0 \in \mathscr{E}_0$$

と定義し，この同値関係によってXを同値類に分割して得られる商空間を$X/\sim$と書くことにする。また

$$\pi : X \to X/\sim$$

は，各$x \in X$を，それを含む同値類に対応せしめる，所謂，標準的写像（cannonical mapping）とする。$\sim$の定義により，すべての$E_0 \in \mathscr{E}_0$は$X/\sim$の元の合併として表わすことができるから，E_0, $E_0' \in \mathscr{E}_0$に対して

$$E_0 \neq E_0' \implies \pi(E_0) \neq \pi(E_0') \qquad (2)$$

$$E_0 \cap E_0' = \phi \implies \pi(E_0) \cap \pi(E_0') = \phi。$$

そこで$\mathscr{E}_1 = \pi(\mathscr{E}_0)$とおく。すると——

1° $\mathscr{E}_1$は$X/\sim$上のσ-集合体となる。(容易であるから読者自ら確かめられよ。)

2° ふたつのσ-集合体，$\mathscr{E}_0$と$\mathscr{E}_1$はπをつうじて一対一に対応する。(c.f. (3))

よって，$\mathscr{E}_1$も$\mathscr{E}_0$と同様，可算個の集合によって生成されねばならないことになる。

3° $\mathscr{E}_1$は二点を分離する。

実際$X/\sim$の相異なる二元　$\varphi(x) \neq \varphi(x')$を考えると，

$$x \in E_0,\ x' \notin E_0$$

となるような$E_0 \in \mathscr{E}_0$が存在する。このE_0に対して

$$\varphi(x) \in \varphi(E_0),\ \varphi(x') \in \varphi(X \setminus E_0) = (X/\sim) \setminus \varphi(E_0)$$

こうして，1°，2°，3°によって$(X/\sim, \mathscr{E}_1)$が可分な可測空間となることが知られた。

さて補題5によれば，$H = \{0,\ 1\}^{\mathbb{N}}$の適当な部分空間$J$に Borel σ-集合体を定めて得られる可測空間$(J, \mathscr{B}(J))$をして，$(X/\sim,\ \mathscr{E}_1)$と同型たらしめることができる。$X/\sim$をHの中に同型に埋め込む写像を$h : X/\sim \to H$としよう。また

$$p = h \circ \pi$$

とおけば，pは$\mathscr{E}_0$と$\mathscr{B}(J)$との間に一対一の対応を与える。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & H \\ X/\sim \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

〈図1〉

さらに$p \times 1_Y$は$\mathscr{E}_0 \otimes \mathscr{B}(Y)$と$\mathscr{B}(J) \otimes \mathscr{B}(Y)$の間に一対一の対応を与える。(ここで$1_Y$は$Y$上の恒等写像である。)

ゆえに$G \in \mathscr{E}_0 \otimes \mathscr{B}(Y)$であるから，

$$G' \equiv (p \times 1_Y)(G) \in \mathscr{B}(J) \otimes \mathscr{B}(Y)$$

補題3によれば

$$\begin{aligned}&\mathscr{B}(J)\otimes\mathscr{B}(Y)\\&=(\mathscr{B}(H)\cap J)\otimes\mathscr{B}(Y)\\&=(\mathscr{B}(H)\otimes\mathscr{B}(Y))\cap(J\times Y)\end{aligned}$$

であるから，

$$G'=B\cap(J\times Y)$$

を満たす$H\times Y$の Borel 集合Bが存在する。BのHへの射影 $\mathrm{proj}_H B$ は Souslin 集合である (c.f. Bourbaki〔7〕Part 2, p. 200) から，$(H,\mathscr{B}(H))$ について汎可測である (再び Meyer の定理！)。よって

$$\mathrm{proj}_H B\in\widehat{\mathscr{B}(H)}。\tag{4}$$

$\mathrm{proj}_X G$を書きかえてみると

$$\begin{aligned}\mathrm{proj}_X G&=\{x\in X\mid\exists\, y\in Y \text{ such that } (x,y)\in G\}\\&=\{x\in X\mid\exists\, y\in Y \text{ such that } (p(x),y)\in G'\}\qquad(5)\\&=p^{-1}\{z\in H\mid\exists\, y\in Y \text{ such that } (z,y)\in B\}\\&=p^{-1}[\mathrm{proj}_H B]\end{aligned}$$

しかるにpは$(\mathscr{E}_0,\mathscr{B}(H))$-可測であるから，もちろん$(\mathscr{E},\mathscr{B}(H))$-可測。ゆえに補題6によって，$p$は$(\hat{\mathscr{E}},\widehat{\mathscr{B}(H)})$-可測である。これと (4), (5) により

$$\mathrm{proj}_X G\in\hat{\mathscr{E}}。$$

(証了)

ノート

本節は主として Sainte-Beuve〔45〕による。別証については Debreu〔15〕pp. 357-358 を見よ。

§4. Filippovの可測陰函数定理

方程式$f(x,\ y)=0$によって陰伏的に定められるxとyとの関係を陽表的に解いて，$y=g(x)$と表現する問題は，微積分学の範囲では陰函数定理として，よく知られている。ここでは“可測函数の範囲で陰函数を解く”という問題を考えてみることにしよう。その応用範囲はきわめて広く，たとえば本節の最後に述べる，可測選択子の Carathéodory 表現定理や，§7でとりあげる，若干の変分問題における解の存在証明などにも，実に大きな威力を発揮する。

この定理はより一般的な仮定の下でも証明することができるが，ここでは応用上，われわれの必要に応ずる程度にとどめておく。

定理 7 （可測陰函数定理） $(X,\mathscr{E})$ を可測空間，Y および Z を完備・可分な距離空間とする。多価写像 $\Gamma: X \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Y$ はコンパクト値で $(\mathscr{E},\mathscr{B}(Y))$-可測，また $\sum: X \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Z$ は閉値で $(\mathscr{E},\mathscr{B}(Z))$-可測とし，写像 $g: X\times Y\to Z$ は Carathéodory の写像(c.f. p. 121 or pp. 141-142)とする。加えて

$$g(x,\ \Gamma(x))\cap\sum(x)\neq\phi \quad \text{for all } x\in X$$

と仮定するならば，

$$g(x,\ \gamma(x))\in\sum(x) \quad \text{for all } x\in X$$

を満たす，Γ の $(\hat{\mathscr{E}},\mathscr{B}(Y))$-可測選択子 γ が存在する。

証明） 多価写像 $\Delta: X \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Y$ を

$$\Delta(x)=\{y\in\Gamma(x)\mid g(x,\ y)\in\sum(x)\}$$

と定義すれば，g が y の連続写像であることと，Γ，$\sum$ の閉値性とにより，Δ もまた閉値である。この Δ の可測性を示すのが以下の眼目である。そこで $\tilde{g}: X\times Y\to X\times Z$ を

$$\tilde{g}(x,\ y)=(x,\ g(x,\ y))$$

と定義すると，

$$G(\Delta)=G(\Gamma)\cap\tilde{g}^{-1}(G(\textstyle\sum))。$$

g は Carathéodory の写像であるから，補題2によれば，$(\mathscr{E}\otimes\mathscr{B}(Y),\ \mathscr{B}(Z))$-可測である。したがって，$\tilde{g}$ は $(\widehat{\mathscr{E}\otimes\mathscr{B}}(Y),\ \mathscr{E}\otimes\mathscr{B}(Z))$-可測となる。

$\sum$ の可測性と定理3によって，$G(\sum)\in\mathscr{E}\otimes\mathscr{B}(Z)$ であるから，$\tilde{g}^{-1}(G(\sum))\in\widehat{\mathscr{E}\otimes\mathscr{B}}(Y)$。また Γ の可測性と定理3によって，$G(\Gamma)\in\mathscr{E}\otimes\mathscr{B}(Y)$。これらの結果を併合して $G(\Delta)\in\widehat{\mathscr{E}\otimes\mathscr{B}}(Y)$ となることがわかった。かくして定理4により，$\Delta: X \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Y$ は $(\hat{\mathscr{E}},\ \mathscr{B}(Y))$-可測となり，$\Delta$ の可測選択子 $\gamma: X\to Y$ が存在する。この γ が所望の性質を有することは見易いところであろう。

（証了）

実は証明ぬきで述べた定理5を用いると，定理7は大分一般化されて——

定理7' $(X,\mathscr{E}_X)$，$(Z,\mathscr{E}_Z)$ を可測空間，Y を Souslin 空間とする。多価写像 $\Gamma: X \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Y$，$\sum: X \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow Z$ はそれぞれ

$$G(\Gamma)\in\mathscr{E}\otimes\mathscr{B}(Y),\ G(\textstyle\sum)\in\mathscr{E}_X\otimes\mathscr{E}_Z$$

を満たすものとし，写像 $g: X\times Y\to Z$ は $(\mathscr{E}_X\otimes\mathscr{B}(Y),\ \mathscr{E}_Z)$-可測とする。加えて

$$g(x,\Gamma(x))\cap\sum(x)\neq\phi \quad \text{for all } x\in X$$

と仮定するならば

$$g(x,\gamma(x))\in\sum(x) \quad \text{for all } x\in X$$

を満たすΓの $(\widehat{\mathscr{E}}_X, \mathscr{B}(Y))$-可測選択子 γ が存在する。

証明は定理7と同様の精神で行なえばよい。

数理経済学において，所謂 Berge の最大値定理（c.f. 丸山〔39〕）の果す重要な役割についてはよく知られている。可測多価写像の理論において，ちょうどそれに対応する結果が定理7′を援用して得られるので，それを述べよう。

定理8　$(X, \mathscr{E})$ は可測空間，Yは完備・可分な距離空間とする。$u: X\times Y\to\mathbb{R}$ は$\mathscr{E}\otimes\mathscr{B}(Y)$-可測で，しかも$y$について上半連続な函数とする。また多価写像 $\Gamma: X \twoheadrightarrow Y$ はコンパクト値で $(\mathscr{E}, \mathscr{B}(Y))$-可測とする。このとき函数

$$v(x)=\mathrm{Max}\{u(x,y)\mid y\in\Gamma(x)\}$$

は$\widehat{\mathscr{E}}$-可測であり，多価写像

$$\Delta(x)=\{y\in\Gamma(x)\mid u(x,y)=v(x)\}$$

は $(\widehat{\mathscr{E}}, \mathscr{B}(Y))$-可測である。

証明）任意の$\alpha\in\mathbb{R}$について

$$v(x)>\alpha \Longleftrightarrow \exists\, y\in\Gamma(x) \text{ such that } u(x,y)>\alpha$$

であるから，

$$\{x\in X\mid v(x)>\alpha\}=\mathrm{proj}_X(G(\Gamma)\cap\{(x,y)\mid u(x,y)>\alpha\})\,。$$

仮定により$G(\Gamma)\in\mathscr{E}\otimes\mathscr{B}(Y)$ であり，またuの可測性から

$$\{(x,y)\mid u(x,y)>\alpha\}\in\mathscr{E}\otimes\mathscr{B}(Y)。$$

したがって射影定理5により

$$\{x\in X\mid v(x)>\alpha\}\in\widehat{\mathscr{E}}。$$

次にuとvの可測性と定理7′により，Δ は $\widehat{\mathscr{E}}\otimes\mathscr{B}(Y)$-可測である。　　　（証了）

次に再び定理7を応用して，可測選択子のCarathéodory 表現定理を述べよう。

定理9　$(X, \mathscr{E}, \mu)$ は完備な有限・正値測度空間，$\Gamma: X\twoheadrightarrow\mathbb{R}^n$をコンパクト値・可測多価写像とする。このときco Γの任意の可測選択子fに対して，Xの各点xをn次元単体$\Lambda_{n+1}\equiv\{\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n+1})\in\mathbb{R}_+^{n+1}\mid \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i=1\}$の中に写す可測写像

$$\lambda: x\longmapsto(\lambda_1(x), \lambda_2(x), \cdots, \lambda_{n+1}(x))$$

と，Γの（$n+1$）個の可測選択子f_1, f_2, …, f_{n+1}が存在して

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i(x)f_i(x) \quad \text{a.e.}$$

とすることができる。

証明） 連続写像g：$\Lambda_{n+1}\times\mathbb{R}^{n(n+1)}\to\mathbb{R}^n$を

$$g(\lambda_1,\cdots,\lambda_{n+1};y_1,\cdots,y_{n+1})=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i y_i$$

と定義する。また多価写像Δ：$X\twoheadrightarrow\mathbb{R}^{n(n+1)}$を

$$\Delta(x)=\underbrace{\Gamma(x)\times\Gamma(x)\times\cdots\cdots\times\Gamma(x)}_{(n+1)\text{回}}$$

とすれば，Δもコンパクト値の可測多価写像である。

さてco Γの任意の可測選択子fに対して

$$\Phi(x)=\{(\lambda;y_1,\cdots,y_{n+1})\in\Lambda_{n+1}\times\Delta(x)\mid g(\lambda;y_1,\cdots,y_{n+1})=f(x)\}$$

とおけば，Carathéodoryの定理（c.f. 丸山〔38〕定理8）により，すべての$x\in X$について，$\Phi(x)\neq\phi$。定理7によって

$$g(\sigma(x))=f(x)$$

を満たす$\Lambda_{n+1}\times\Delta(x)$の可測選択子

$$\sigma(x)=(\lambda_1(x),\ \cdots,\ \lambda_{n+1}(x);y_1(x),\ \cdots,\ y_{n+1}(x))$$

が存在する。これが所望の性質を満たすことは明白であろう。（証了）

ノート

可測陰函数定理については Sainte-Beuve〔45〕, Castaing-Valadier〔11〕ChapterⅢ §6, Debreu〔15〕などに依った。重要な文献としては Filippov〔18〕, Himmelberg-Jacobs-Vleck〔22〕, Himmelberg-Vleck〔23〕, Jacobs〔27〕など。

§5. 多価写像の積分

経済学の問題から始めよう。経済主体の空間をたとえば$[0,1]$とし，価格ベクトルが$p\in\mathbb{R}^l_+$のとき，主体$t\in[0,1]$の最適な需給計画を対応せしめる多価写像を

$$\xi:[0,1]\times\mathbb{R}^l_+\twoheadrightarrow\mathbb{R}^l$$

とする。このとき経済全体の需給函数は

$$\Phi(p)=\int_0^1\xi(t,p)dt \tag{1}$$

となるであろう。ここで $\xi(t, p)$ が通常の一価写像であれば積分 (1) の意味は全く明解であるが，経済学の"基礎論"にあらわれる $\xi(t, p)$ は一般に多価である。

個別需要函数の和として経済全体の需要函数を求めることが，均衡分析にとって不可欠のステップであるとすれば，多価写像の積分概念をここで正確に定義しておく必要が生じてくるのである。多価写像の積分を考える，さらに積極的な motivation については§7を見ていただくことにしたい。

まず $(X, \mathscr{E}, \mu)$ を測度空間とし，$\mathfrak{X}$を（実）Banach 空間としよう。Rådström の埋め込み定理 (c.f. 丸山〔36〕pp. 97-111) によれば，$\mathfrak{X}$ の非空・凸・コンパクト集合の全体は，ある Banach 空間の中に等長同型に埋め込まれることに注意すると，コンパクト・凸値の多価写像 $\Gamma: X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathfrak{X}$は，ある Banach 空間に値をとる一価写像とみなすことができよう。すると，このような多価写像の積分は，結局通常の Bochner 積分に還元して考えることができるのである。

このような積分は G. Debreu によって考案されたもので，それにちなんで **Debreu 積分** (c.f. Debreu〔15〕) という。

しかし，凸・コンパクト値でない多価写像に対しては，この方法で積分を定義することができないであろう。

そこで R. J. Aumann による定義をここでは採用する。(c.f. Aumann〔4〕)

定義 $(X, \mathscr{E}, \mu)$ を測度空間，$\mathfrak{X}$を（実）Banach 空間：$\Gamma: X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathfrak{X}$ を可測写像とするとき，Γの積分を

$$\int_X \Gamma\, d\mu = \{\int_X f\, d\mu \mid f \text{ は } \Gamma \text{ の可測選択子}\}$$

と定義する。この積分をΓの **Aumann 積分**という。

この定義中，可測選択子の積分はもちろん Bochner 積分である。また**とくにΓが凸・コンパクト値の場合には，Aumann 積分は Debreu 積分と一致する**ことが知られている (c.f. Debreu〔15〕)。

積分の凸性

Liapunov の凸性定理 (c.f. Lindenstreauss〔32〕, 丸山〔36〕) の簡単な応用として，多価写像の積分に関する次の定理が得られる。

定理10 $(X, \mathscr{E}, \mu)$ を σ-有限，non-atomic な測度空間，

$$\Gamma : (X, \mathscr{E}, \mu) \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}^l$$

を可測多価写像とすれば，その積分

$$\int_X \Gamma d\mu$$

は $\mathbb{R}^l$ の凸集合である。

証明[4]）z_1，z_2，を $\int_X \Gamma d\mu$ の二点とし，任意の $0<\alpha<1$ について，

$$(1-\alpha)z_1+\alpha z_2 \in \int_X \Gamma d\mu$$

を示そう。まず，多価写像の積分の定義から，Γ の可測選択子 f_1, f_2 が存在して，

$$z_1=\int_X f_1 d\mu\,;\quad z_2=\int_X f_2 d\mu_{\circ}$$

そこで各 $E\in\mathscr{E}$ について

$$\nu(E)=\left(\int_E f_1 d\mu,\ \int_E f_2 d\mu\right)\in\mathbb{R}^{2l}\,;$$

と定義すれば，ν は $(X,\ \mathscr{E})$ 上のベクトル値測度である。

すると ν は non-atomic であることが次の如くして示される。仮に E を ν の atom としてみよう。atom の定義から $\nu(E)\neq 0\in\mathbb{R}^{2l}$ であり，したがって $\mu(E)>0$。ここで μ は仮定によって non-atomic であるから，E の分割 E_1，E_1' が存在して

$$\mu(E_1)=\mu(E_1')=\frac{1}{2}\mu(E) \qquad \text{(Ljapunov の定理による)}$$

$$\nu(E_1)=\nu(E),\ \nu(E')=0 \qquad \text{(Eは ν に関して atom ゆえ)}$$

このプロセスをくり返して，可測集合の列 $\{E_k\}$ をつくり，それが次のような性質をもつようにすることができる。

(イ) $E_k\supset E_{k+1}$

(ロ) $\mu(E_k)=\dfrac{1}{2^k}\mu(E)$

(ハ) $\nu(E_k)=\nu(E)$ for all k。

そこで，

$$F=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k$$

とおけば，(ロ)によって

$$\mu(F)=0$$

また(ハ)によって

$$\nu(F)=\nu(E)\neq 0$$

注(4) Debreu〔15〕による。

矛盾。かくしてνがnon-atomicであることが示された。

$|\nu|$がσ-有限であることも容易に知られる。さらに

$$\nu(\phi)=(0,0)\in\mathbb{R}^{2l}$$

$$\nu(X)=(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^{2l}$$

であることに注意してLjapunovの凸性定理を用いると，任意の$\alpha\in(0,1)$について，適当に$E\in\mathscr{E}$を選び，

$$\nu(E)=(\alpha z_1,\alpha z_2)$$

$$\nu(X\setminus E)=((1-\alpha)z_1,\ (1-\alpha)z_2)$$

とすることができる。最後に

$$f=f_1\chi_E+f_2\chi_{E^c}$$

と定義すれば，fは明らかにΓの可測選択子で，

$$\int_X f\,d\mu=\alpha z_1+(1-\alpha)z_2$$

$$\therefore\quad \alpha z_1+(1-\alpha)z_2\in\int_X\Gamma\,d\mu。$$

（証了）

注意　Γが無限次元のBanach空間に値をとる多価写像に対しては，この定理は成り立たない。無限次元ベクトル値測度については一般にLjapunovの定理が崩れるからである。(c.f. Diestel-Uhl〔16〕)

積分のコンパクト性

Xを局所コンパクト・Hausdorff空間，$\mathfrak{X}$，$\mathfrak{Y}$をBanach空間，$\mathscr{K}(X,\mathfrak{X})$は台がコンパクトな連続写像$f:X\to\mathfrak{X}$の全体であり，通常のとおり，その位相は帰納的極限によって定まるものとすれば，$\mathscr{K}(X,\mathfrak{X})$は局所凸線形位相空間となる。

任意の連続にして，dominatedな線形作用素

$$\mu:\mathscr{K}(X,\mathfrak{X})\to\mathfrak{Y}$$

を考えると，μは

$$L^1_{\mathfrak{X}}(|\mu|)\equiv\{f:X\to\mathfrak{X}\mid\int_X\|f\|\,d|\mu|<\infty\}$$

上の強連続な線形作用素として拡張することができる。ここで$|\mu|$はμの変動(variation)である。この拡張の方法は通常のscalar-値のRadon測度の場合と全く同様にすればよい。

次の定理は，Castaing〔10〕がΓをコンパクト・凸値の恒等写像とした場合について得た結果の一般化である。(Maruyama〔34〕, Theorem 1.)

定理11 $\mathscr{X}$を Hilbert 空間$\Gamma: X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathscr{X}$をコンパクト・凸値の可測多価写像，$\mathscr{F}_\Gamma$ をΓの可測選択子の全体とする。μが有界変動で，しかも

$$\sup_{f\in\mathscr{F}} \|f(x)\| \leqq \phi(x) \qquad \text{a.e. } (|\mu|) \tag{1}$$

を満足する$\phi \in L^1(|\mu|)$ が存在するとき（このときΓは**積分有界** integrably bounded であるという），$\mathscr{F}$ は $L^1_{\mathscr{X}}(|\mu|)$ における，弱コンパクトな凸集合である。

証明） $\mathscr{F}_\Gamma$ の凸性は自明であるから，弱コンパクト性だけを証明すればよいであろう。

(i) **$\mathscr{F}_\Gamma$ は有界である**。積分有界性の仮定により，

$$\sup_{f\in\mathscr{F}_\Gamma}\int_X \|f\|d|\mu| \leqq \int_X \phi d|\mu| < \infty \quad \text{for all } f\in\mathscr{F}_\Gamma \quad 。$$

(ii) **$\mathscr{F}_\Gamma$ は一様可積分である**。ふたたび積分有界性により，すべての可測集合Eについて，

$$\sup_{f\in\mathscr{F}_\Gamma}\int_E \|f\|d|u| \leqq \int_E \phi d|\mu| \quad 。$$

$\mu(E)\to 0$ のとき

$$\int_E \phi d|\mu| \to 0$$

であるから，（2）は$\mathscr{F}_\Gamma$の一様可積分性を含意する。

(iii) **すべての可測集合 E について**

$$\{\int_E f d|\mu| \mid f\in\mathscr{F}_\Gamma\} \tag{3}$$

は$\mathscr{X}$の相対コンパクト集合である。この命題は集合（3）の有界性と Alaoglu の定理からただちに得られる。

(i), (ii), (iii)に加えて $\mathscr{X}\cong\mathscr{X}'$ が Radon-Nikodým の性質を有することから，Dunford の定理 (Diestel-Uhl [16] pp. 101-102) により，$\mathscr{F}_\Gamma$ は $L^1_{\mathscr{X}}(|\mu|)$ において弱相対コンパクトである。

次に $\mathscr{F}_\Gamma = \overline{\mathscr{F}}^w_\Gamma$（弱位相についての閉包）を証明しよう。まず $\mathscr{F}_\Gamma$ が 凸であることにより

$$\overline{\mathscr{F}}^w_\Gamma = \overline{\mathscr{F}}^s_\Gamma \ \text{（強位相についての閉包）}$$

である。$\mathscr{F}_\Gamma$ の点列$\{f_n\}$が $f\in L^1_{\mathscr{X}}(|\mu|)$に強収束するとすれば，$\{f_n\}$ はfに概収束する部分列$\{f_{nm}\}$を有する。Γはコンパクト値であるから，

$$f(x)\in\Gamma(x) \quad \text{a.e.}$$

したがって$f\in\mathscr{F}_\Gamma$。かくして $\mathscr{F}_\Gamma=\overline{\mathscr{F}}^w_\Gamma$ が示されたことになり，$\mathscr{F}_\Gamma$は弱コンパクトである。

（証了）

次の定理 12 は定理 11 の簡単な帰結である。

定理12 定理11の仮定の下に，$\mu(\mathscr{F}_\Gamma)$ は弱コンパクトかつ凸である。

証明） 作用素 $\mu : L^1_{\mathfrak{X}}(|\mu|)\to\mathfrak{Y}$ は強連続であるから，それは弱連続でもある。定理11により，$\mathscr{F}_\Gamma\subset L^1_{\mathfrak{X}}(|\mu|)$ は弱コンパクトである。したがって μ による $\mathscr{F}_\Gamma$ の像 $\mu(\mathscr{F}_\Gamma)$ は $\mathfrak{Y}$ において弱コンパクトである。$\mu(\mathscr{F}_\Gamma)$ の凸性は明らか。（証了）

$\mathscr{F}_\Gamma$ の端点：Karlin-Castaing の理論

$\mathfrak{X}$ は実 Banach 空間，$\mathscr{A}$ は $\mathfrak{X}$ 上で定義される連続な実数値 affin 函数の集合とする。また $\mathfrak{X}$ のコンパクト・凸集合 K の端点の全体（すなわち K の profile）を $\ddot{K}$ と書く。

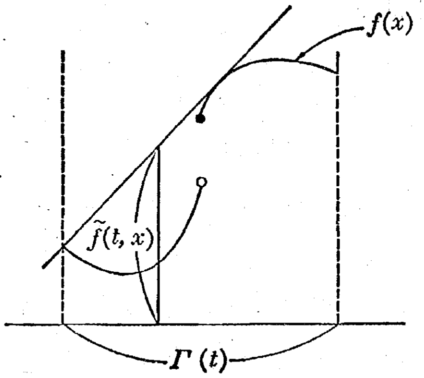
補題7 T を位相空間とし，多価写像 $\Gamma : T \twoheadrightarrow \mathfrak{X}$ はコンパクト値で，かつ優半連続とする。$f : \mathfrak{X}\to\mathbb{R}$ を上半連続函数とすれば

$$\tilde{f}(t, x)=\inf\{\varphi(x)\,|\,\varphi\in\mathscr{A},\ \varphi(z)\geqq f(z)\quad \text{for all } z\in\Gamma(t)\}$$

を以て定義される函数

$$\tilde{f} : T\times\mathfrak{X}\to\mathbb{R}$$

は，上半連続である。



〈図 2〉

証明） まず $\mathfrak{X}$ 上の連続線形汎函数 $y'\in\mathfrak{X}'$ に対して

$$g_{y'}(t)=\sup_{z\in\Gamma(t)}\{f(z)-y'(z)\}$$

とおけば，$\tilde{f}$ は

$$\tilde{f}(t,\ x)=\inf_{y'\in\mathfrak{X}'}\{y'(x)+g_{y'}(t)\}\tag{1}$$

と表わすことができる。Berge の最大値定理（丸山〔39〕，補題3）によれば，$g_{y'}(t)$ は T 上で上半連続である。したがって，(1) により，$\tilde{f}$ は $T\times\mathfrak{X}$ 上で上半連続である。（証了）

補題8　Kを$\mathfrak{X}$のコンパクト・凸集合とし，$f: K \to \mathbb{R}$を連続函数，$\Gamma = T \longrightarrow\!\!\!\!\to K$をコンパクト値，可測多価写像とする。このとき，

$$\Gamma_f(t) = \{x \in \Gamma(t) \mid \tilde{f}(t, x) = f(x)\}$$

を以って定義される多価写像$\Gamma_f = T \longrightarrow\!\!\!\!\to K$のグラフは$G(\Gamma)$の$G_\delta$-集合であり，したがってBorel-可測である。

証明）　$\{(t, x) \in \Gamma(t) \mid \tilde{f}(t, x) = f(x)\}$

$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{(t, x) \in \Gamma(t) \mid \tilde{f}(t, x) - f(x) < \frac{1}{n}\right\}$$

であるから，$\tilde{f}$の上半連続性とfの連続性とから，これは$G(\Gamma)$のG_δ集合である。　　（証了）

多価写像$\Gamma: T \longrightarrow\!\!\!\!\to \mathfrak{X}$はコンパクト・凸値でしかも可測であるとする。また多価写像$\ddot{\Gamma}: T \longrightarrow\!\!\!\!\to \mathfrak{X}$を

$$\ddot{\Gamma}: t \longmapsto\!\!\!\!\to \ddot{\Gamma}(t)$$

と定義する。

定理13　補題8の仮定の下に，$\ddot{\Gamma}$のグラフはBorel-可測である。

証明）　K上には（強い意味で）凸の連続函数fが存在して（Alfsen〔1〕p. 32），

$$\ddot{\Gamma}(t) = \{x \in \Gamma(t) \mid \tilde{f}(t, x) = f(x)\} \quad \text{for all } t \in T$$

とすることができるから，補題8，定理5によりただちに所望の帰結を得る。　　（証了）

定理14　$(X, \mathscr{E}, \mu)$を完備な有限・正値測度空間とし，$\Gamma: X \longrightarrow\!\!\!\!\to \mathbb{R}^l$はコンパクト・凸値の可測多価写像とする。このとき，ある正の測度をもつ可測集合E上で

$$f(x) \notin \ddot{\Gamma}(x) \text{ on } E$$

となるΓの可測選択子に対して

$$f(x) \pm g(x) \in \Gamma(x) \quad \text{for all } x \in X$$

を満たす可測選択子gが存在する。

証明）　まずΓをEに制限すれば，ΓはE上で可測である。そこで多価写像$\Phi: E \longrightarrow\!\!\!\!\to \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$を

$$\Phi(x) = \{(y, z) \in \Gamma(x) \times \Gamma(x) \setminus \Delta \mid \frac{y+z}{2} = f(x)\}$$

と定義する。ここでΔは$\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l$の対角線集合である。$\Phi$のグラフは$\mathscr{E}|_E \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^l)$に属す

るから，定理 7′ によって，Φ は可測選択子を有する。すなわち Γ の可測選択子 γ_1, γ_2 が存在して，

$$\begin{cases} \gamma_1(x) \neq \gamma_2(x) \quad \text{on } E \\ \dfrac{\gamma_1(x)+\gamma_2(x)}{2} = f(x) \end{cases} \tag{1}$$

である。そこで

$$g_i(x) = \begin{cases} \gamma_i(x) \text{ on } E \\ f(x) \text{ on } E^c \ ; \ i=1,2 \end{cases} \tag{2}$$

と定義し，また

$$g(x) = \frac{g_1(x)-g_2(x)}{2}$$

とおけば，この g が所望の性質を満たす。 （証了）

定理 14 の仮定に加えて，Γ が積分有界であることを仮定すると，Γ の可測選択子の集合 $\mathscr{F}_\Gamma$ は $L^1_{\mathbb{R}^l}(\mu)$ における弱コンパクト・凸集合であることは Eberlein-Šmulian の定理 (Dunford-Schwartz [17] pp. 430-433)から容易に知られる。したがって $\mathscr{F}_\Gamma$ には端点が存在する。次の定理は $\mathscr{F}_\Gamma$ の端点とは $\mathscr{F}_\Gamma$ に属する写像のうち，殆どいたるところ $\ddot{\Gamma}(x)$ の中に値をとる場合，かつその場合に限ることを示している。

定理15　定理14の仮定に加えて，Γ が積分有界であるとすれば，$\ddot{\mathscr{F}}_\Gamma$ が存在して

$$\ddot{\mathscr{F}}_\Gamma = \mathscr{F}_{\ddot{\Gamma}}$$

証明）$\mathscr{F}_{\ddot{\Gamma}} \neq \phi$ であるならば $\ddot{\mathscr{F}}_{\ddot{\Gamma}} \subset \mathscr{F}_\Gamma$ の成り立つことは自明である。ゆえに $\ddot{\mathscr{F}}_\Gamma \subset \mathscr{F}_{\ddot{\Gamma}}$ を示せばよい。そこでいま仮に $f \in \ddot{\mathscr{F}}_\Gamma \setminus \mathscr{F}_{\ddot{\Gamma}}$ が存在するとしよう。するとある正の測度をもつ可測集合 E の上で

$$f(x) \notin \ddot{\Gamma}(x) \text{ on } E$$

である。定理 14 におけるのと同様の手法で，(1) を満足する $\Gamma|_E$ の可測選択子 γ_1, γ_2 の存在が知られるから，あらたに g_1, g_2 を(2)の如く定義すれば，$g_1(x) \neq g_2(x)$ on E で

$$f(x) = \frac{g_1(x)+g_2(x)}{2} \quad \text{for all } x \in X。$$

これは $f \in \ddot{\mathscr{F}}_\Gamma$ に矛盾。 （証了）

定理16　可測空間 $(X, \mathscr{E})$ 上で定義された non-atomic な有限・正値測度 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p$ を考え

$$\mu(E) = (\mu_1(E),\ \mu_2(E),\ \cdots,\ \mu_p(E))\ ;\ E \in \mathscr{E}$$

とおく。$\Gamma : X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}^l$ はコンパクト・凸値の可測多価写像で，積分有界であるとする。このとき，

$\int_X \Gamma d\mu$ は凸・コンパクトで，しかも

$$\int_X \Gamma\, d\mu = \int_X \ddot{\Gamma} d\mu$$

証明）まずΓがコンパクト・凸値であることと，積分有界であることから，Eberlein-Šmulian の定理によれば，$\mathscr{F}_\Gamma$ が弱コンパクトかつ凸であることは容易に知られる。

線形作用素T：$L^1_{\mathbb{R}^l}(|\mu|) \to \mathbb{R}^{lp}$を

$$Tf = \int_X f d\mu$$

と定義すれば，Tは強連続であるから弱連続でもある。したがって

$$T(\mathscr{F}_\Gamma) = \int_X \Gamma d\mu$$

はコンパクト・凸集合である。

さて任意に$f_0 \in \mathscr{F}_\Gamma$を与えたとき，

$$H \equiv \{ f \in \mathscr{F}_\Gamma | \int_X f d\mu = \int_X f_0 d\mu \}$$

とおけば，Hは弱コンパクト・凸である。したがって，Hは端点を有するが，この端点が $\mathscr{F}_{\ddot{\Gamma}}$ に属することを示せば，定理が証明されたことになるであろう。

いまfをHの端点とし，しかも$f \notin \mathscr{F}_{\ddot{\Gamma}}$と仮定してみると，定理14により，$|\mu|(E) > 0$なる可測集合$E$と

$$\begin{cases} f(x) \pm g(x) \in \Gamma(x) & \text{on } E \\ g(x) \neq 0 & \text{on } E \end{cases}$$

なる$g \in \mathscr{F}_\Gamma$が存在する。

各μ_iは non-atomic であるから，Ljapunov の凸性定理（c.f. Lindenstrauss〔32〕，丸山〔36〕）から

$$\int_{E_0} g d\mu = \frac{1}{2} \int_E g d\mu$$

を満たす$E_0 \subset E$が存在する。そこで

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & x \in E_0 \\ -g(x) & x \in E \setminus E_0 \\ 0 & x \notin E \end{cases}$$

と定義すれば

$$f(x) = \frac{f(x) + h(x)}{2} + \frac{f(x) - h(x)}{2}$$

$$f(x)\pm h(x)\in \Gamma(x)$$

$$\int_X h d\mu = 0 \quad 。$$

したがって，$f\pm h\in H$であることが判明した。これはfがHの端点であることに矛盾。（証了）

系2 $(X,\ \mathscr{E},\ \mu)$ は non-atomic な有限・正値測度空間とする。$1\leqq i\leqq m$ に対して，$f_i\in L^1_{\mathbb{R}^l}(\mu)$とし，また$\lambda : X\longrightarrow \Lambda_m=\left\{\lambda\in\mathbb{R}^m_+ \middle| \sum_{i=1}^m \lambda_i=1\right\}$ を可測写像とするとき，次のような条件を満たすXの分割$E_1,E_2,\cdots,E_m$ が存在する。

$$\int_X \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) f_i(x) d\mu = \sum_{i=1}^m \int_{E_i} f_i(x) d\mu$$

証明）$\mu_i=f_i\circ\mu(1\leqq i\leqq p)$とおく。すると$\mu_i$は$l$次元の non-atomic なベクトル値測度となる。ゆえに定理16により，

$$\dot{\lambda}_i(x)\in\{0,1\},\ \sum_{i=1}^m \dot{\lambda}_i(x)=1$$

$$\int_X \lambda_i d\mu_i = \int_X \dot{\lambda}_i d\mu_i$$

を満たすような可測写像$x\longmapsto(\dot{\lambda}_1(x),\ \dot{\lambda}_2(x),\ \cdots,\ \dot{\lambda}_m(x))$が存在する。ゆえに

$$\int_X \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i d\mu = \int_X \sum_{i=1}^m \dot{\lambda}_i f_i d\mu \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

これから所望の帰結を得る。（証了）

ノート

多価写像の積分に関する原典とも言うべき論文は Aumann〔4〕。数理経済学者の立場から書かれた文献としては Debreu〔15〕, Hildenbrand〔21〕。所謂 Hukuhara 積分については Hukuhara〔24〕, De Blasi and Lasota〔13〕,〔14〕。なお〔13〕,〔14〕の入手については故榎本雅己博士にお力添えをいただいた。

Karlin の理論については，Karlin〔30〕, Castaing〔10〕, Castaing-Valadier〔11〕Chaper Ⅳ, Johnson〔29〕などを参照。

§6. Carathéodory の写像と Normal Integrand

ここでは変分学その他の領域で重要な役割を果す，ふたつの種類の写像を考察する。

定義 $(X,\mathscr{E},\mu)$ を測度空間とし，またYとZは位相空間とする。写像$f : X\times Y\to Z$が次の二つの性質を有するとき，f は **Carathéodory の写像**（$Z=\mathbb{R}$ のときは **Carathéodory の函数**）

であるという。

(i) すべての$y\in Y$について，$x\longmapsto f(x, y)$はxの可測写像。

(ii) 殆どすべての$x\in X$について$y\longmapsto f(x, y)$はyの連続写像。

この種類の写像については，実函数論でよく知られたLusinの定理のanalogueとして，次の結果が成り立つ。

定理17 (Scorza-Dragoni) Xは位相空間，$\mathscr{E}$はXのすべての Borel 集合を含むσ-集合体，μは$(X, \mathscr{E})$上の有限・正値・外正則測度とする。またYは第二可算公理を満たす位相空間とし，

$$f : X\times Y\to\mathbb{R}$$

はCarathéodoryの函数としよう。このとき，任意の$\varepsilon>0$に対して，Xの閉部分集合Fを適当に選び，

$$\mu(X\setminus F)<\varepsilon \quad \text{かつ} \quad f|_{F\times Y}\text{は連続}$$

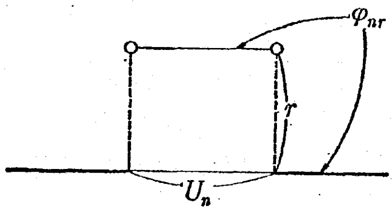
とすることができる。

証明[5] $\mathbb{R}$は$(0, 1)$と位相同型であるから，$f(X\times Y)\subset(0, 1)$と考えてよい。

仮定によりYは第二可算公理を満たすのであるから，可算基$\{U_1, U_2, \cdots\}$と可算稠密部分集合$\{y_1, y_2, \cdots\}$とを有する。

さて任意の有理数$r\in[0, 1]$と任意の自然数に対して$\varphi_{nr} : Y\to\mathbb{R}$を

$$\varphi_{nr}(y)=r\chi_{U_n}(y)$$



〈図3〉

と定義すれば，φ_{nr}はY上で下半連続である。

こうして可算個の函数族$\{\varphi_{nr}\}_{n,r}$が構成されたのであるが，これを用いると，Y上のすべての下半連続函数$g : Y\to\mathbb{R}$は

$$g(y)=\sup_{\varphi_{n,r}\leqq g}\varphi_{nr}(y)\ ;\quad y\in Y \tag{1}$$

と表現することができる。そこで

$$E_{nrk}\equiv\{x\in X\mid f(x, y_k)\geqq\varphi_{nr}(y_k)\}$$

とおけば，明らかに$E_{nrk}\in\mathscr{E}$である。

注(5) Berliocchi-Lasry〔6〕pp. 132-133.

$$E_{nr}=\bigcap_{k=1}^{\infty} E_{nrk}$$

とおくと，$\overline{\{y_k\}}$ が Y の中で稠密であること，$f(x, y)$ の y に関する連続性，そして φ の下半連続性から

$$E_{nr}\equiv\{x\in X \mid f(x, y)\geqq\varphi_{nr}(y) \text{ for all } y\in Y\}$$

を得る。

$$\phi_{nr}(x, y)=\chi_{E_{nr}}(x)\varphi_{nr}(y)$$

とおくと，ϕ_{nr} の定義から

$$\phi_{nr}\leqq f$$

となり，また（1）によって

$$f(x, y)\leqq\sup \phi_{nr}(x, y) \quad \text{for all } (x, y)\in X\times Y。 \qquad (2)$$

$\{\chi_{E_{nr}}\}, \{\varphi_{nr}\}$ は，それぞれ可算個の函数族であるから添数をつけかえて，$\{\chi_{Em}\}, \{\varphi_m\}$ としよう。すると（2）は次のように書ける。

$$f=\sup_{m\in\mathrm{N}} \chi_{Em}\varphi_m \qquad (3)$$

μ が外正則であることから，すべての $m\in\mathrm{N}$ について

$$F_m\subset E_m\subset V_m \ ; \ \mu(V_m\setminus F_m)<\frac{\varepsilon}{2^{m+1}} \qquad (4)$$

を満たす閉集合 F_m と開集合 V_m が存在する。

$$H_m=(X\setminus V_m)\cup F_m$$

とすれば，$\chi_{Em}|_{Hm}$ は連続であるから，$\chi_{Em}\times\varphi_m$ は $H_m\times Y$ 上で下半連続である。

$$H=\bigcap_{m=1}^{\infty} H_m$$

とおくと，（4）により，

$$\mu(X\setminus H)<\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{m+1}}=\frac{\varepsilon}{2} \qquad (5)$$

で，しかも $f|_{H\times Y}$ は下半連続である。

上と同様の推論を $1-f$ に対しても行なえば，

$$\mu(X\setminus K)<\frac{\varepsilon}{2} \text{ かつ } f|_{K\times Y} \text{ は上半連続}$$

となる，閉集合 K の存在が確認される。

そこで

$$F=H\cap K$$

とおけば，このFが所望の性質を満たすことは見易いところであろう。（証了）

定義　$(X, \mathscr{E}, \mu)$ を測度空間とし，Y を位相空間とする。函数 $g: X\times Y \to \overline{\mathbb{R}}_+$ に対して，Carathéodory の函数列

$$f_n: X\times Y \longrightarrow \mathbb{R}_+;\ n=1, 2, \cdots\cdots$$

を適当に選んで

$$g(x, y)=\sup_n f_n(x, y)\ \text{a.e.}(x) \tag{6}$$

とすることができるとき，g は**正の正規被積分函数** (positive normal integrand; PNI) であるという。

系3　$(X, \mathscr{E}, \mu)$，Y に対しては，定理17と同様の仮定をおく。

$$g: X\times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

を PNI とすれば，任意の $\varepsilon>0$ に対して，X の閉部分集合 F を適当に選び

$$\mu(X\setminus F)<\varepsilon \quad \text{かつ} \quad g|_{F\times Y}\ \text{は下半連続}$$

とすることができる。

証明）函数 g に対して（6）を満足する Carathéodory の函数列 $\{f_n: X\times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+\}$ を考える。定理17により，任意の $\varepsilon>0$ に対して，X の閉集合の列 $\{F_n\}$ を適当に選んで

$$\mu(X\setminus F_n)<\frac{\varepsilon}{2^n}, \qquad f_n|_{F_n\times Y}\ \text{は連続}$$

とすることができる。そこで

$$F=\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

とすれば，

$$\mu(X\setminus F)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon \qquad \text{かつ} \quad g|_{F\times Y}\ \text{は下半連続}$$

となる。　（証了）

定理18　X，Y を局所コンパクトな Polish 空間，μ を X 上の有限・正値 Radon 測度とする。このとき多価写像 $\Gamma: X \twoheadrightarrow Y$ についての次の二命題は同値である。

(i)　Γ は閉値・可測である。

(ii)　任意のコンパクト集合 $K\subset X$，任意の $\varepsilon>0$ に対して適当にコンパクト集合 $H\subset K$ を選び

$$\begin{cases} \mu(K\setminus H)<\varepsilon \\ \Gamma|_H\ \text{のグラフは}\ H\times Y\ \text{の閉集合} \end{cases}$$

とすることができる。

証明） (i)⇒(ii)：函数 $f : X\times Y\to\mathbb{R}$ を

$$f : (x,\ y)\longmapsto\rho(\Gamma(x),\ y)$$

と定義すると，f は Carathéodory の函数である。実際，まず $x\in X$ を任意に固定したとき，f が y の連続函数であることは自明であるから，$y\in Y$ を任意に固定したとき，f が x の可測函数であることを示せばよい。しかるに，$y\in Y$ を固定したとき，

$$E=\{x\in X\mid\rho(\Gamma(x),\ y)<r\}=\{x\in X\mid\Gamma(x)\cap B_r(y)\neq\phi\}$$

は(i)により可測集合である。ゆえに $x\longmapsto f(x,\ y)$ は可測函数である。

そこで，定理17をこの f に適用すると，任意の $\varepsilon>0$ に対して，適当に閉集合 $F\subset X$ を選び

$$\mu(X\setminus F)<\varepsilon \quad \text{かつ} \quad f|_{F\times Y}\ \text{は連続}$$

とすることができる。Γ は閉値であるから，Γ のグラフは，$F\times Y$ 上で閉じている。

以上の議論を X のかわりに K を用いて行なえば(ii)を得ることができる。

(ii)⇒(i)： (ii)を仮定すれば Γ が閉値であることは明らかであるから，その可測性のみを示せばよい。

まず X は σ- コンパクトであるから，コンパクト集合の列 $\{K_m\}$ を適当に選んで

$$X=\bigcup_{m=1}^{\infty}K_m$$

とすることができる。(ii)によれば，各 K_m に対してコンパクト集合の列 $\{H_n^{(m)}\subset K_m\ ;\ n=1,\ 2,\ \cdots\}$ を適当に選び

$$\begin{cases}\mu(K_m\setminus H_n^{(m)})<\dfrac{1}{n}\\ \Gamma\text{ のグラフは } H_{mn}\times Y \text{ の閉集合}\end{cases}$$

とすることができる。

ゆえに Γ を $H^{(m)}=\bigcup_{n=1}^{\infty}H_n^{(m)}$ に制限した場合のグラフ

$$\{(x,\ y)\in H^{(m)}\times Y\mid y\in\Gamma(x)\}$$

は可測であり，

$$\mu(K_m\setminus H^{(m)})=0。$$

さて U を Y の任意の開集合とし，$\Gamma|_{H^{(m)}}$ のグラフを G_m と書けば，

$$\Gamma^{-w}(U)=\mathrm{proj}_X\{\bigcup_{m=1}^{\infty}(G_m\cap(X\times U)\}\cup N$$

ここで $\mu N=0$ である。したがって $\Gamma^{-w}(U)$ は可測となり，Γ が可測多価写像であることが示された。 （証了）

補題 9　Xを Polish 空間とするとき，連続函数の列 $\varphi_n : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $(n=1, 2, \cdots)$ を適当に選び，すべての下半連続な函数，$f = X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ に対して

$$f(x) = \sup_{\varphi_n \leqq f} \varphi_n(x) \quad \text{for all } x \in X$$

とすることができる。

証明）　Xは Polish 空間であるから，第二可算公理を満たし，その可算基を $U_1, U_2, \cdots$ としよう。各 U_m に対して

$$G_n^{(m)} = \{ x \in X \mid \rho(x, \overline{U}_m) < \frac{1}{n} \}$$

とおけば

$$\varphi_{nr}^{(m)}(x) = \begin{cases} r & \text{on } \overline{U}_m \\ 0 & \text{on } (G_n^{(m)})^c \end{cases}$$

となるような連続函数　$\varphi_{nr}^{(m)}(x) : X \to [0, r]$ が存在する。(6)

このようにして，構成された函数族 $\{\varphi_{nr}^{(m)}\}_{mnr}$ の添数をつけかえて $\{\varphi_n\}$ とすれば，これが所望の性質を満たす。　　（証了）

定理19　Xを局所コンパクト Polish 空間，μをX上の有限・正値 Radon 測度とし，また，Yは Polish 空間とする。このとき，函数 $f : X \times Y \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ について次の四命題は互いに同値である。

(i)　fは PNI。

(ii)　任意のコンパクト集合$K \subset X$と任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\mu(K \setminus H) < \varepsilon \quad \text{かつ} \quad f|_{H \times Y} \text{ は下半連続}$$

となるようなコンパクト集合$H \subset K$が存在する。

(iii)　多価写像

$$x \longmapsto\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{E_{pi}} f(x) \equiv \{(y, \alpha) \in Y \times \overline{\mathbb{R}}_+ \mid f(x, y) \leqq \alpha\}$$

は可測・閉値である。

注(6)　たとえば，まず実数値連続函数 $\xi : \mathbb{R} \to [0, 1]$ を

$$\xi(t) = \begin{cases} 1 & \text{for } t \leqq 0 \\ 1-t & \text{for } 0 \leqq t \leqq 1 \\ 0 & \text{for } 1 \leqq t \end{cases}$$

とし，次に，

$$\varphi_{nr}^{(m)}(x) = r\xi(n\rho(x, \overline{U}_m))$$

とすればよい。

(iv) 次のような函数 $g: X\times Y\to\overline{\mathbb{R}}_+$ が存在する。

a. g は Borel- 可測。

b. 殆どすべての $x\in X$ に対して $y\longmapsto g(x, y)$ は y の下半連続函数。

c. $f(x, y)=g(x, y)$ a.e. (x)

証明) (i)⇒(ii)：系3によって明らか。

(ii)⇒(iv)： X は σ- コンパクトであるから X のコンパクト集合の列 $\{K_m\}$ を適当に選び,

$$X=\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m \tag{1}$$

とすることができる。(ii)によって，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$\begin{cases} \mu(K_m\setminus H_n^{(m)})<\dfrac{1}{n} \\ f|_{H_n^{(m)}\times Y} \text{ は下半連続} \end{cases}$$

となるようなコンパクト集合，$H_n^{(m)}\subset K_m$ が存在する。

$$H^{(m)}=\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n^{(m)}$$

とおけば，

$$\mu(K_m\setminus H^{(m)})=0 \tag{2}$$

である。そこで

$$g_m(x, y)=\begin{cases} f(x, y) & \text{if } (x, y)\in H^{(m)}\times Y \\ 0 & \text{if } (x, y)\notin H^{(m)}\times Y \end{cases}$$

とおけば，g_m は Borel- 可測で下半連続である。また

$$g(x, y)=\sup_m g_m(x, y)$$

とおけば，g もまた Borel- 可測かつ下半連続となることはもちろんである。g_m のつくり方から,

$$f(x, y)=g(x, y) \quad \text{on } \bigcup_{m=1}^{\infty} H^{(m)}\times Y$$

(1)，(2) により,

$$\mu(X\setminus\bigcup_{m=1}^{\infty} H^{(m)})=0。$$

(iv)⇒(i)：Y 上のすべての下半連続函数 $h: Y\to\overline{\mathbb{R}}_+$ に対して

$$h(y)=\sup_{\varphi_n\leq h}\varphi_n(y)$$

を満たすような連続函数列 $\{\varphi_n: Y\to\overline{\mathbb{R}}_+\}$ を考える（補題9）。そこで,

$$E_n\equiv\{x\in X\mid g(x, y)\geqq\varphi_n(y) \quad \text{for all } y\in Y\}$$

とおくと，E_n^c は

$$G_n \equiv \{(x, y) \in X \times Y \mid g(x, y) < \varphi_n(y)\}$$

の，Xへの射影となっている。gは（x，y）についての下半連続函数，φ_nはyの連続函数であるから，G_nは$X \times Y$の Borel 集合である。したがって，射影定理（定理6）により，$E_n{}^c$は可測であり，ゆえにE_nもまた可測である。そこで

$$(x, y) \longmapsto \chi_{E_n}(x)\varphi_n(y)$$

なる函数を考えると，これは，Carathéodory の函数である。(iv)のbにより，

$$y \longmapsto g(x, y)$$

は殆どすべてのxについて下半連続ゆえ，$\{\varphi_n\}$，$\{E_n\}$の作り方から

$$g(x, y) = \sup_n \chi_{E_n}(x)\varphi_n(y) \quad \text{a.e.}$$

と表わすことができる。よってgはPNIである。

(iii)⇒(ii)：　$K \subset X$を任意のコンパクト集合とする。任意の$\varepsilon > 0$に対して，適当なコンパクト集合$H \subset K$を選び

$$\begin{cases} \mu(K \setminus H) < \varepsilon \\ \mathrm{E_{pi}} f|_H \text{ のグラフは} F \times Y \times \mathbb{R}_+ \text{ の閉集合} \end{cases}$$

とすることができる。すなわち，

$$\{(x, y, \alpha) \in H \times Y \times \mathbb{R}_+ \mid f(x, y) \leqq \alpha\}$$

が$H \times Y \times \mathbb{R}_+$がの閉集合である。したがって$f|_{H \times Y}$は下半連続である。

(ii)⇒(iii)：　まずXがσ-コンパクトであることから

$$X = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m$$

なるコンパクト集合の列$\{K_m\}$が存在する。(ii)によれば，任意の$n \in \mathbb{N}$に対して

$$\begin{cases} \mu(K_m \setminus H_n^{(m)}) < \dfrac{1}{n} \\ f|H_n^{(m)} \times Y \quad \text{は下半連続} \end{cases}$$

となるようなコンパクト集合$H_n^{(m)}$が存在する。したがって，$\mathrm{E_{pi}} f$を$H_n^{(m)}$に制限した多価写像のグラフ

$$\{(x, y, \alpha) \in H_n^{(m)} \times Y \times \mathbb{R}_+ \mid f(x, y) \leqq \alpha\}$$

は閉集合である。ゆえに

$$H^{(m)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n^{(m)}$$

に制限した場合のグラフ

$$\{(x, y, \alpha) \in H^{(m)} \times Y \times \mathbb{R}_+ \mid f(x, y) \leqq \alpha\}$$

も可測となり，

$$\mu(K_m \setminus H^{(m)}) = 0 。$$

さてUを$Y\times\mathbb{R}_+$の開集合とし，$\mathrm{E}_{\mathrm{pi}}f|_{H^{(m)}}$のグラフを$G_m$と書けば

$$\mathrm{E}_{\mathrm{pi}}f^{-w}(U) = \mathrm{proj}_X\{\bigcup_{m=1}^{\infty}(G_m \cap (X\times U))\} \cup N$$

ここでNは測度0の集合である。したがって$\mathrm{E}_{\mathrm{pi}}f^{-w}(U)$は可測となり，$\mathrm{E}_{\mathrm{pi}}f$ の可測性が示された。$\mathrm{E}_{\mathrm{pi}}f(x)$ が殆どすべてのxに対して閉集合であることも明らか。（証了）

ノート

Berliocchi-Lasry〔6〕に最も多くを負うている。ほかに Ioffe-Tihomirov〔26〕, Rockafellar〔44〕。

§7. 変分問題への応用

これまでの基礎的研究の応用として，二，三の変分問題における最適解の存在証明について述べよう。議論の大半はより一般的な仮定の下で行なうことができるけれども，考え方の筋道を明澄にするため，本質が失なわれない限り，やや限定的な設定の下に叙述を進めることにする。

〔1〕 Aumann-Perles の変分問題

所謂 Aumann-Perles 型の変分問題は経済分析の中に広い応用をもち，筆者は既に，従来の研究方向を検討し，かつ新しい結果を報告するいくつかの機会を得た。(c.f. Aumann-Perles〔5〕, Berliocchi-Lasry〔6〕, Maruyama〔33〕。)

簡単にそれらの考え方を復習しておくことが，ここでの議論の意味を理解するのに役立つであろう。まず記号を次のように約束しておく。

$T=[0,1]$

μ：T上の Lebesgue 測度

u：$T\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}$ ：可測函数（所与）

g：$T\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^l_+$ ：可測写像（所与）

$\omega\in\mathbb{R}^l_+$ （所与）

そうすると Aumann-Perles の変分問題は次のように書くことができる。

$$(\mathrm{AP})\begin{cases} \underset{x}{Maximize} \int_T u(t, x(t))d\mu & (1)\\ \quad subject\ to & \\ \qquad \int_T g(t, x(t))d\mu \leqq \omega & (2)\end{cases}$$

つまり，（2）の制約を満たす範囲で可測（ないしは可積分）写像 $x: T\to\mathbb{R}^l$ を動かして，積分汎函

$$\int_T u(t, x(t))d\mu$$

数を最大化する問題である。

この問題に解が存在するための条件を究明する最もorthodoxな方法は，制約(2)を満たす写像 x が作る集合の位相的性質（とくに何らかの位相についてのコンパクト性）を考察し，さらにそのような集合の上で極大化問題（1）が解けるための条件（たとえば写像

$$x\longmapsto\int_T u(t, x(t))d\mu$$

の上半連続性）を求めようとするものであろう。たとえば Aumann-Perles の論文は，こうした素直で直線的な思考法にしたがって書かれたものである。

これに対して，Berliocchi-Lasry〔6〕, Maruyama〔33〕らの考え方は全く別の角度から問題をとらえ直そうとする試みである。まず $T\times\mathbb{R}^l$ 上の Radon 測度

$$\gamma=\int_T\delta_t\otimes\delta_{x(t)}d\mu \tag{3}$$

を考えることから始めよう。ここで δ_t, $\delta_{x(t)}$ は点 $t\in T$, $x(t)\in\mathbb{R}^l$ に質量1をおく Dirac 測度であり，$x: T\to\mathbb{R}^l$ は可測な写像である。可測写像 x と，（3）の形式をもつ Radon 測度が一対一に対応することに注意すれば，問題（AP）は次のような同値形に翻訳することができる。

$$(\text{AP-1})\begin{cases}\underset{\gamma}{Maximize}\int_{T\times\mathbb{R}^l}u(t, x)d\gamma & (4)\\ \quad subject\ to & \\ \qquad\int_{T\times\mathbb{R}^l}g(t, x)d\gamma\leqq\omega & (5)\\ \qquad\gamma=\int_T\delta_t\otimes\delta_{x(t)}d\mu & \\ \qquad x: T\longrightarrow\mathbb{R}^l\ \text{は可測} & \end{cases}$$

しかし当然予想されるように，（3）のような形の測度だけを眺めているのでは，ちょうど離散的な端点ばかりを考察しているようなもので，極限演算を円滑に運ぶことができないから，解析学的な手法を使いにくい。そこで γ のメニューを暫定的に拡大して

$$\gamma=\int_T\delta_t\otimes\nu[t]d\mu \tag{6}$$

なる形式の Radon 測度 γ を考える。ここで ν は T から $\mathbb{R}^l$ 上の Radon 確率測度の作る空間への＊弱可測写像である。すると問題は

$$
(\text{AP-2})\begin{cases} \textit{Maximize} \displaystyle\int_T u(t, x)d\gamma \\ \quad \textit{subject to} \\ \qquad \displaystyle\int_T g(t, x)d\gamma \leqq \omega \\ \qquad \gamma = \displaystyle\int_T \delta_t \otimes \nu[t]d\mu \end{cases}
$$

となる。そこでまず (AP-2) に最適解 γ^* の存在することを示す。だがこの γ^* は（3）の如き形式を有するとは限らないので，(AP-2) に解が存在したとしても，(AP-1) の解の存在が保証されたわけではない。ところが，(AP-2) の最適解の中には必ず（3）の形式をもつものが存在することが証明される（決して容易ではない！）ので，一挙に問題が解決に向うのである。

このアプローチでは，写像 x の選択問題を考えるかわりに，u や g に働きかける作用素としての Radon 測度 γ を選択する問題が考えられているわけである。そしてこの場合には，（6）の形式をもつ Radon 測度族の函数解析的考察が理論の核心を形成することとなる。

T 上の測度 μ をも可変的とみなす場合についても，工夫次第でこの方法を適用することができるが，その場合には（6）の形式をもつ Radon 測度族の研究を相当深化させる必要に迫られる。(Maruyama〔33〕,〔35〕。)

またさらに smooth な解を求める場合には，当然 Schwartz の超函数論との接続が，このアプローチから示唆されるのである。

さて上記の方法に対して，やや条件は厳しくなるものの，比較的簡略な証明法が Arkin-Levin〔2〕によって考案された。ここではそれを紹介しよう。次に考える問題は本質的に (AP) と同一であるが，x の動く範囲がより限定的となっていることに注意したい。

$$
(\text{A L})\begin{cases} \underset{x}{\textit{Maximize}} \displaystyle\int_T u(t, x(t))d\mu \\ \quad \textit{subject to} \\ \quad \text{a. } \displaystyle\int_T g(t, x(t))d\mu \leqq \omega \\ \quad \text{b. } x \text{ はコンパクト値・可測多価写像} \\ \qquad\qquad \Gamma : T \twoheadrightarrow \mathbb{R}^l \\ \quad \text{の可測選択子} \end{cases}
$$

仮定1　u，g は Carathéodory の写像とする。

仮定2　$\tilde{u}(t) = \sup_{x \in \Gamma(t)} |u(t, x)| < +\infty$

$\tilde{g}(t) = \sup_{x \in \Gamma(t)} \|g(t, x)\| < +\infty$

は可積分である。

いま $f: T\times\mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^{l+1}$ を

$$f(t,x)=[u(t,x),\ g(t,x)]$$

と定義すれば，f も Carathéodory の写像である。さらに多価写像 $\Lambda: T \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}^{l+1}$ を

$$\Lambda(t)=f(t,\Gamma(t))$$

としよう。Γ がコンパクト値かつ可測であることと，f が Carathéodory の写像であることから，Λ もまたコンパクト値・可測である。Λ の可測選択子の全体を $\mathscr{F}_\Lambda$ と書くと，仮定2により，$\mathscr{F}_\Lambda$ は積分有界である。ゆえに定理16により

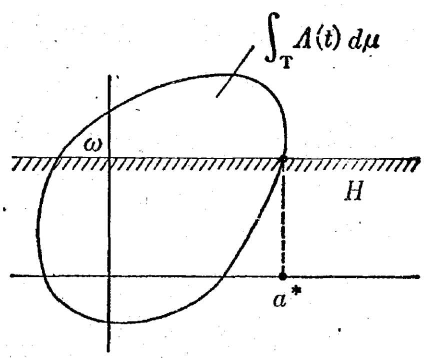
$$\int_T \Lambda(t)d\mu$$

は $\mathbb{R}^{l+1}$ のコンパクト・凸集合である。そこで

$$H\equiv\{(h_0,\ h_1,\ \cdots,\ h_l)\in\mathbb{R}^{l+1}\,|\,h_i\leqq\omega_i \text{ for all } 1\leqq i\leqq l\}$$

とおけば

$$H\cap\int_T \Lambda(t)d\mu \tag{7}$$



〈図4〉

もコンパクト・凸集合である。したがってこの集合（7）の第0座標軸への射影もコンパクトであって，それは最大値 a^* を有する。

$$(a^*,b^*)\in\int_T \Lambda(t)d\mu$$

となるように $b^*\in\mathbb{R}^l$ を選ぶと，多価写像の積分の定義により，

$$\int_T \lambda(t)d\mu=(a^*,b^*)$$

となるような，Λ の可測選択子 λ が存在する。Fillipov の定理7によれば

$$f(t,\ x^*(t))=\lambda(t)$$

を満たす可測写像 $x^*: T\to\mathbb{R}^l$ が存在する。この x^* が問題（AL）の最適解にほかならないのである。かくして——

定理20　仮定1，2の下に問題（AL）には解が存在する。

〔2〕 Parametric な制約をもつ変分問題

〔1〕で考察した問題より難しい，次の型の変分問題を考えよう。まず記号の約束から。

$S,\ T=[0,1]$

μ : S 上の Lebesgue 測度

ν : T 上の Lebesgue 測度

$u : S\times T\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}$

$g : S\times T\times\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}^l$

$\omega : T\to\mathbb{R}^l_+$

そうすると問題は，

$$
(\mathrm{P})\left\{
\begin{array}{l}
\underset{x}{\mathit{Maximize}} \displaystyle\int_{S\times T} u(s,t,x(s,t))\,d(\mu\otimes\nu) \\
\quad \textit{subject to} \\
\quad\quad \text{a. } \displaystyle\int_S g(s,t,x(s,t))\,d\mu \leqq \omega(t) \text{ a.e.} \\
\quad\quad \text{b. } x(s,t) \text{ はコンパクト値・可測多価写像} \\
\quad\quad\quad\quad\quad \Gamma : S\times T \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathbb{R}^l \\
\quad\quad\quad \text{の可測選択子}
\end{array}
\right.
$$

これと類似の問題は Arkin-Levin〔2〕においても取り扱われたが，証明中に用いられる基本的な役割を演ずる定理11は，Maruyama〔34〕において独立に得られたものである。

まず問題 (P) の経済学的な意味を考えてみよう。Sを主体の空間，Tは時間のインターヴァルとし，主体sが時点tにおいて，消費xを行なったときの効用を$u(s,t,x)$ とする。しかし各時点tにおいて利用可能な消費財の総量には上限があって，それを$\omega(t)\in\mathbb{R}^l_+$とするのである。そこで資源の制約

$$\int_S x(s,\ t)\,d\mu\leqq\omega(t) \text{ a.e.}$$

を満たすような配分xをいろいろに動かして，各主体の inter-temporal な効用の和を最大化する問題を形式的に書けば (P) の如くなるであろう。その際，各主体の消費の大きさにも上界・下界があるとすれば，すなわち

$$-M\leqq x_i(s,t)\leqq M \qquad (i=1,2,\cdots,l)$$

を満たすような$M\in\mathbb{R}$が存在するとすれば，Γは

$$\Gamma : (s,t)\longmapsto\!\!\!\!\!\rightarrow[-M,\ M]^l$$

とすればよい。

そのほかにも Aumann-Perles の問題の場合と同様，いろいろな経済学的解釈がありうるので

ある。

さてこの問題（P）の解決にあたって測度の積分々解による方法を適当するとどのようになるであろうか。この場合はまず

$$\gamma = \int_S \delta_s \otimes \delta_t \otimes \delta_{x(s,t)} d\mu \tag{1}$$

なる形式の$S \times T \times \mathbb{R}^l$上の$L^1_{\mathbb{R}^l}(\nu)$-値のRadon測度を考えるべきであろう。（1）の形式を有する測度のうち

$$\int_{S \times T \times \mathbb{R}^l} g(s, t, x) d\gamma \leqq \omega(t) \qquad \text{a.e.}$$

を満たすものの全体を$\mathfrak{M}(g)$とし，さらに

$$\widetilde{\mathfrak{M}}(g) = \left\{ \int_T \gamma d\nu \,|\, \gamma \in \mathfrak{M}(g) \right\}$$

とおけば，結局問題（P）は

$$\text{(P-1)} \begin{cases} \mathit{Maximize} \displaystyle\int_{S \times T \times \mathbb{R}^l} u(s, t, x) d\tilde{\gamma} \\ \qquad \mathit{on}\ \widetilde{\mathfrak{M}}(g) \end{cases}$$

に帰着するであろう。したがって議論の核心は，$\mathfrak{M}(g)$および$\widetilde{\mathfrak{M}}(g)$の構造を調べる点にある。しかし問題の難しさは$\gamma \in \mathfrak{M}(g)$が$L^1_{\mathbb{R}^l}(\nu)$-値の測度であるという一点に存する。このようなベクトル測度の作る空間の構造を綿密に調べるためには相当に長々しく，しかも難渋な推論を積み重ねなければならない。その困難を解決する理論は，他の機会に発表する予定である。ここでは別の解法を探すことにしたい。そのためには，〔1〕でとりあげたArkin-Levinの方法が役に立つ。

仮定1　u, gはCarathéodoryの写像である。

仮定2　$\tilde{u}(s, t) = \sup_{x \in \Gamma(s,t)} |u(s, t, x)| < +\infty$
$\tilde{g}(s, t) = \sup_{x \in \Gamma(s,t)} \|g(s, t, x)\| < +\infty$
は$\mu \otimes \nu$について可積分である。

まずf：　$S \times T \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^l$を

$$f(s, t, x) = [u(s, t, x),\ g(s, t, x)]$$

と定義すれば，fはCarathéodoryの写像である。さらに多価写像Λ：$S \times T \twoheadrightarrow \mathbb{R}^{l+1}$を

$$\Lambda(s, t) = f(s, t, \Gamma(s, t))$$

としよう。〔1〕の場合と同様，Λはコンパクト値かつ可測である。

次に強連続な線形作用素

$$T: L^1_{\mathbb{R}}(\mu\otimes\nu)\times L^1_{\mathbb{R}^l}(\mu\otimes\nu)\to\mathbb{R}\times L^1_{\mathbb{R}^l}(\nu)$$

を

$$T(\alpha,\beta),\ \left[\int_{S\times T}\alpha(s,t)d(\mu\otimes\nu);\ \int_S\beta(s,t)d\mu\right]$$
$$\alpha\in L^1_{\mathbb{R}}(\mu\otimes\nu),\ \ \beta\in L^1_{\mathbb{R}^l}(\mu\otimes\nu)$$

とおく。Λ の可測選択子の全体を $\mathscr{F}_\Lambda$ と書くとき，$T(\mathscr{F}_\Lambda)$ が(弱)コンパクトであれば有難いが，Λ は必ずしも凸値ではないので，定理12が使えない。そこで

$$\Delta(s,t)=\text{co}\ \Lambda(s,t)$$

とする。Δ の可測選択子の集合 $\mathscr{F}_\Delta$ とすれば，仮定２によって $\mathscr{F}_\Delta$ は積分有界であり，したがって定理12を用いれば，$T(\mathscr{F}_\Delta)$ は弱コンパクトである。そこで

$$K\equiv\{(a,b^*(t))\in T(\mathscr{F}_\Delta)\mid b(t)\leqq\omega(t)\}$$

とおけば，K も弱コンパクトである。したがって K の $\mathbb{R}$ への射影もコンパクトであって，それは最大値 a^* を有する。

$$(a^*,b^*(t))\in K$$

となるように $b^*\in L^1_{\mathbb{R}^l}(\nu)$ を選ぶ。

いま

$$T(\mathscr{F}_\Lambda)=T(\mathscr{F}_\Delta) \tag{2}$$

が成り立つものとすれば，

$$T(\lambda)=(a^*,b^*(t))$$

となるような，Λ の可測選択子 λ が存在する。Fillipov の定理 7′ によれば

$$f(s,t,x^*(s,t))=\lambda(s,t)$$

を満たす，Γ の可測選択子 $x^*: S\times T\to\mathbb{R}^l$ が存在する。この x^* が問題 (P) の最適解にほかならない。

そこで残された問題は（2）を証明することであろう。

まず $T(\mathscr{F}_\Lambda)\subset T(\mathscr{F}_\Delta)$ は自明であるから，逆の包含関係 “$\supset$” だけを示せばよい。$(\alpha(s,t),\ \beta(s,t))\in L^1_{\mathbb{R}}(\mu\otimes\nu)\times L^1_{\mathbb{R}^l}(\mu\otimes\nu)$ を $\mathscr{F}_\Delta$ の任意の元とする。Carathéodory の表現定理９により，

$$(\alpha_i(s,t),\ \beta_i(s,t))\in\mathscr{F}_\Lambda;\quad j=1,2,\cdots,l+2$$
$$\lambda_i: S\times T\to[0,1]$$
$$\sum_{i=1}^{l+2}\lambda_i(s,t)=1\quad \text{for all } (s,t)\in S\times T$$

を適当に選び

$$\alpha(s,t)=\sum_{i=1}^{l+2}\lambda_i(s,t)\alpha_i(s,t)$$
$$\beta(s,t)=\sum_{i=1}^{l+2}\lambda_i(s,t)\beta_i(s,t)$$

とすることができる。Arkin-Levine の定理（Arkin-Levine〔2〕Theorem 2.1, or 2.3）によれば，$S\times T$ の可測集合による分割 M_1, M_2, …, M_{l+2} が存在して

$$\int_{S\times T}\alpha(s,t)\alpha(\mu\otimes\nu)=\int_{S\times T}\sum_{i=1}^{l+2}\lambda_i(s,t)\alpha_i(s,t)d(\mu\otimes\nu)$$
$$=\int_{S\times T}\sum_{i=1}^{l+2}\alpha_i(s,t)\chi_{M_i}(s,t)d(\mu\otimes\nu)$$
$$\int_S\beta(s,t)d\mu=\int_S\sum_{i=1}^{l+2}\lambda_i(s,t)\beta_i(s,t)d\mu$$
$$=\int_S\sum_{i=1}^{l+2}\beta_i(s,t)\chi_{M_i}(s,t)d\mu$$

とすることができる。それゆえ

$$\tilde{\alpha}(s,t)=\sum_{i=1}^{l+2}\alpha_i(s,t)\chi_{M_i}(s,t)$$
$$\tilde{\beta}(s,t)=\sum_{i=1}^{l+2}\beta_i(s,t)\chi_{M_i}(s,t)$$

とおけば，$(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})\in\mathscr{F}_A$ でしかも

$$T(\alpha,\beta)=T(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})。$$

ゆえに(2)の証明が完了した。

定理21　仮定1，2の下に問題（P）には解が存在する。

ノート

Aumann-Perles の問題については Aumann-Perles〔5〕, Berliocchi-Lasry〔6〕, Maruyama〔33〕など。Arkin-Levin の方法については Arkin-Levin〔2〕, Maruyama〔34〕。

<参考文献>

〔1〕Alfsen, E. M. *Compact Convex Sets and Boundary Integrals* (Springer Verlag, Berlin) 1971.

〔2〕Arkin, V. I. and V. L. Levin "Convexity of Values of Vector Integrals, Theorems on Measurable Choice and Variational Problems" *Russian Math. Surveys*, 27, 1972, 21-85.

〔3〕Artstein, Z. "On the Calculus of Closed Set-valued Function" *Indiana Univ. Math. J.* 24, 1974, 433-441.

〔4〕Aumann, R. J. "Integrals of Set-valued Functions" *J. Math. Anal. Appl.* 12, 1965, 1-12.

〔5〕Aumann, R. J. and M. Perles "A Variational Problem Arising in Economics" *J. Math. Anal. Appl.* 11 1965, 488-503.

〔6〕 Berliocchi, H. and J. M. Lasry "Intégrandes normales et mesures paramétrées en calcul des variations" *Bull. Soc. Math. France* 101, 1973, 129-184.

〔7〕 Bourbaki, N. *Elements of Mathematics: General Topology*, Part 1, 2 (Addeson-Wesley, Reading) 1966.

〔8〕 Bridgland, T. F. Jr. "Trajectory Integrals of Set-valued Functions" *Pacific Math. J.* 33, 1970, 43-68.

〔9〕 Castaing, Ch. "Sur une extension du théorème de Lyapounov" *C. R. Acad. Sc. Paris* 260 Série A. 1965, 3838-3841.

〔10〕 ———, "Sur une nouvelle extension du théorème de Lyapunov" *C. R. Acad. Sc. Paris* 264, série A. 1967, 333-336.

〔11〕 Castaing, C. and M. Valadier *Convex Analysis and Measurable Multifunctions* (Springer Verlag, Berlin) 1977.

〔12〕 Choquet, G. *Lectures on Analysis* Vol. I (Benjamin, London) 1969.

〔13〕 De Blasi, F. S. and A. Lasota "Daniell's Method in the Theory of the Aumann-Hukuhara Integral of Set-valued Functions" *Lincei-Rend. Sc. fis. mat. e. nat.* XLV, 1968, 252-257.

〔14〕 ———, "Characterization of the Intergral of Set-valued Functions" *Lincei-Rend. Sc. fis. mat. e. nat.* XLVI, 1969, 154-157.

〔15〕 Debreu, G. "Integration of Correspondences" *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Vol. II (University of California Press, Berkeley and Los Angeles) 1967.

〔16〕 Diestel, J. and J. J. Uhl, Jr. *Vector Measures* (Amer. Math. Soc.) 1977.

〔17〕 Dunford, N. and J. T. Schwartz *Linear Operators*, Part 1 (Interscience, N. Y.) 1958.

〔18〕 Filippov, A. F. "On Certain Questions in Theory of Optimel Control" *SIAM J. Control* 1, 1962, 76-84.

〔19〕 Grothendieck, E. *Topological Vector Spaces* (Gordon and Breach, N. Y.) 1973.

〔20〕 Hermes, H. "Calculus of Set-valued Functions and Control" *J. Math. Mech.* 18, 1968, 47-59.

〔21〕 Hildenbrand, W. *Core and Equilibria of a Large Economy* (Princeton Univ. Press. Princeton)1974.

〔22〕 Himmelberg, C. J., M. Q. Jacobs, and F. S. van Vleck "Measurable Application, Selectors and Filippov's Implicit Function Lemma" *J. Math. Anal. Appl.* 25, 1969, 276-284.

〔23〕 Himmelberg, C. J. and F. S. van Vleck "Some Selection Theorems for Measurable Functions" *Can. J. Math.* XXI, 1969, 394-399.

〔24〕 Hukuhara, M. "Intégration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe" *Funkcialaj Ekvacioj* 10, 1967, 205-223.

〔25〕 Ioffe, A. D. "Survey of Measurable Selection Theorems: Russian Literature Supplement" *SIAM J. Control and Optimization* 16, 1978, 728-732.

〔26〕 Ioffe, A. D. and V. M. Tihomirov: *Theory of Extremal Problems* (North-Holland, Amsterdam) 1979.

〔27〕 Jacobs, M. Q. "Remarks on Some Recent Extension of Filippov's Implicit Function Lemma" *SIAM J. Control and Optimization* 5, 1967, 622-627.

〔28〕 ———, "Measurable Multivalued Mappings and Lusin's Theorem" *Trans. Amer. Math. Soc.* 134, 1968, 471-481.

〔29〕 Johnson, J. A. "Extrème Measurable Selections" *Proc. Amer. Math. Soc.* 44, 1974, 107-112.

〔30〕 Karlin, S. "Extreme Points of Vector Functions" *Proc. Amer. Math. Soc.* 4, 1953, 603-610.

〔31〕 Kuratowski, K. and C. Ryll-Nardzewski "A General Theorem on Selectors" *Bull. Ac. Pol. Soc.* 13, 1965, 397-403.

〔32〕 Lindenstrauss, J. "A Short Proof of Liapounoff's Convexity Theorem" *J. Math. Mech.* 15, 1966, 971-972.

〔33〕 Maruyama, T. "An Extension of the Aumann-Perles' Variational Problem" *Proc. Japan Acad.* 55 Ser. A, No. 9, 1979, 348-352.

〔34〕 ———, "Integration of Correspondences and its Applications to Variational Problems" mimeograhed, 1979.

〔35〕 ———, "A Note on the Disintegration of Measures: A Convergence Theorem" to appear.

〔36〕 ———, 「Convex Analysis の二，三の進展について」『三田学会雑誌』70巻1号 (1977) 97-119.

〔37〕 ———, 「確率測度の＊弱収束」『三田学会雑誌』70巻6号, 1977, 53-66; 71巻1号, 45-56.

〔38〕 ———, 「コンパクト集合族の位相に関する覚え書」『三田学会雑誌』72巻3号, 1979, 87-97.

〔39〕 ———, 「多価写像の連続性」『三田学会雑誌』72巻3号, 1979, 98-112.

〔40〕 Mcshane, E. J. and R. B. Warfield "On Filippov's Implicit Function Lemma" *Proc. Amer. Math. Soc.* 18, 1967, 41-47.

〔41〕 Naimark, M. A. *Normed Algebras* (Wolters-Noordhoff, Groningen) 1972.

〔42〕 Plis, A. "Remark on Measurable Set-valued Functions" *Bull. Ac. Pol. Sc.*, 9, 1961, 857-859.

〔43〕 Rådström, H. "An Embedding Theorem for Spaces of Convex Sets" *Proc. Amer. Math. Soc.* 3, 1952, 165-169.

〔44〕 Rockafellar, R. T. "Integral Functionals, Normal Integrands and Measurable Selections" in J. P. Gossez et al. ed. *Nonlinear Operators and the Calculus of Variations* (Springer Verlag, Berlin) 1976, 157-207.

〔45〕 Sainte-Beuve, M. F. "On the Extension of von Neumann-Aumann's Theorem" *J. Functional Anal.* 17, 1974, 112-129.

〔46〕 Schwartz, L. *Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical Measures*, (Oxford, London) 1973.

〔47〕 Sion, M. "On Uniformization of Sets in Topological Spaces" *Trans. Amer. Math. Soc.* 96, 1960, 237-245.

〔48〕 Valadier, M. "Multi-applications mesurables a valeurs convexes compactes" *J. Math. Pure. et. Appl.* 50, 1971, 265-297.

〔49〕 von Neumann, J. "On Rings of Operators" *Ann. Math.* 30, 1949, 401-485.

〔50〕 Wagner, D. H. "Integral of a Covex-hull-valued Function" *J. Math. Anal. Appl.* 50, 1975, 548-559.

〔51〕 ———, "Survey of Measurable Selection Theorems" *SIAM J. Control and Optimization* 15, 1977, 859-903.

〔52〕 Warga, J. *Optimal Control of Differential and Functional Equations* (Academic Press, N. Y.) 1972.

〔追記〕 本稿の最後に述べた parametric な制約を有する変分問題は，ごく最近(1980)，Maruyama〔34〕の revised version において，はるかに満足のゆく形で解決された。しかし，この結果を得たときは，既に本稿の組版が始まった段階で，新しい成果を本稿にとり入れることができなかったことを深く遺憾とする。興味のある方は筆者の working paper を見ていただきたい。(校正に際してとくに記す。)

(経済学部専任講師)