慶應義塾大学学術情報リポジトリ
Keio Associated Repository of Academic resouces

Title	景気変動と周期解
Sub Title	Oscillation in dynamic Kaldorian model
Author	川又, 邦雄
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1980
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.73, No.1 (1980. 2) ,p.93- 112
JaLC DOI	10.14991/001.19800201-0093
Abstract	
Notes	小特集 経済学と函数解析 論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19800201-0093

慶應義塾大学学術情報リポジトリ(KOARA)に掲載されているコンテンツの著作権は、それぞれの著作者、学会または出版社/発行者に帰属し、その権利は著作権法によって保護されています。引用にあたっては、著作権法を遵守してご利用ください。

The copyrights of content available on the KeiO Associated Repository of Academic resources (KOARA) belong to the respective authors, academic societies, or publishers/issuers, and these rights are protected by the Japanese Copyright Act. When quoting the content, please follow the Japanese copyright act.

景気変動と周期解

川又邦雄

1 序　論

カルドアの景気循環理論〔5〕は，国民所得について非線型の投資関数を用いることによって，外的撹乱のない自律的経済モデルにおける景気変動の存在を示したもので，現代の景気変動理論の一つの典型とみなしうるものである。そこでは戦略的な変数として国民所得と資本ストックが考えられ，投資関数および消費関数を通じてそれらがどのような変動径路をたどるかが，図表に基づいた分析によって明らかにされている。ただし，各変数の動学的調整については明確な運動方程式を欠いており，国民所得が資本ストック量を一定として変動する局面と後者の変化をゆるす局面で調整過程が二つに分割されて扱われている。じっさいこのような調整過程の二分化こそが，カルドアモデルにおける景気循環の存在証明のための戦略的礎石となっているのである。

本稿では，こうした欠陥を補充するために，一般に投資関数が国民所得と資本ストックに依存する場合の国民所得と資本ストックの変動の方程式を導入し，必ずしもカルドア型投資関数の仮定にとらわれることなく，いなむしろそれとは多少異なった条件の下で，景気循環の存在のための条件を示し，動学過程の性質について立ち入った考察を加えてみることにする。その際われわれの主要な関心事となるのは，貯蓄と投資に基づく国民所得の調整と，粗投資と資本の減耗の差として表わされる資本ストックの調整とに関する二つの速度の相対的な大きさである。

この調整速度をパラメターとしてモデルに導入すると，通常の二次元の位相図に基づく分析は二つの調整速度に極端な差がある場合を除いて不正確になるので，明確な条件を導出するためには，他の分析手法によらなければならない。本稿の分析はそうした方向についての一つの解答を意図したもので，主要な結論は均衡の安定条件を示した定理1と外的撹乱がない場合とある場合について景気循環の存在条件を示した定理2および定理3において要約的に述べられている。その分析の依拠する数学的基礎については，本稿の末尾の補論IおよびIIで必要な限りの説明が与えられている。そこでは変数の数が一般の有限個である場合について，微分方程式体系の安定性と周期解の存在を示すための一つの有効な方法が展開されている。その手法の経済分析の他の適用例については別の

機会に論じてみたい。なお本文で定義せずに用いた数学用語のいくつかは補論で説明されている。

2　モデルの概要

いま時点 t の国民所得（厳密には粗国民総生産）を $Y(t)$，消費を $C(t)$，粗投資を $I(t)$，資本ストックを $K(t)$ で表わすことにしよう。これらは非負の実数で，t の関数とみなした場合，以下に示すような関係を保ちつつ，すべての $t \geqq 0$ について定義されているものとする。

消費 $C(t)$ は消費関数 $\tilde{C}: R_+ \longrightarrow R_+$ (1) によって

$$(2.1) \qquad C(t)=\tilde{C}(Y(t))$$

によって与えられ，粗投資 $I(t)$ は投資関数 $\tilde{I}: R_+^2 \longrightarrow R_+$ (1) によって

$$(2.2) \qquad I(t)=\tilde{I}(Y(t),K(t))$$

によって定まるものとする。消費関数 $\tilde{C}$ を K にも依存させてその定義域を R^2 に拡張することも可能であるが，K の影響は些細と考えられるので簡単化のためにその依存関係は無視することにする。

ここで $\tilde{C}$ および $\tilde{Y}$ は，その要素について定義域の内点で連続微分可能であり，その微係数を，$I_Y=\dfrac{\partial \tilde{I}}{\partial Y}$ 等の記号で記すとき，標準的な条件である

$$(2.3) \qquad 0<C_Y<1$$

および

$$(2.4) \qquad 0<I_Y<1$$

$$I_K<0$$

満たすことを仮定することにしよう。

つぎに貯蓄関数 $\tilde{S}: R_+ \longrightarrow R$ を

$$(2.5) \qquad \tilde{S}(Y)=Y-\tilde{C}(Y)$$

によって定義しよう。$\tilde{C}(0)>0$ であれば $\tilde{S}(0)<0$ となることに注意しておこう。また (2.3) を用いると

$$(2.6) \qquad 0<S_Y<1$$

となることがただちに知られる。

以下の準備の下に，この経済モデルの動学的調整の過程をつぎのように定式化しよう。まず国民所得 $Y(t)$ は粗投資と貯蓄との差がプラスであれば上昇し，マイナスであれば下落し，ゼロであれば不変であるものとする。より具体的には $k>0$ を Y の調整速度を示す定数とするとき，

$$(2.7) \qquad \dot{Y}(t)=k(\tilde{I}(Y(t),K(t))-\tilde{S}(Y(t))$$

注(1)　R は実数の集合を表わし，R_+ はその非負象限を示すものとする。また R^n は n この R の直積，R^n_+ は n この R_+ の直積を示すものとする。

にしたがって変動するものと考えよう。また資本ストック$K(t)$の変動は減耗率を$\delta>0$として，

(2.8) $\dot{K}(t)=\tilde{I}(Y(t),\ K(t))-\delta K(t)$

によって与えられるものとする。ここで初期のYおよびKの値は

(2.9) $Y(0)=Y_0,\ K(0)=K_0$

のように与えられているものとしよう。なお，このような定式化および関連する問題については安井〔7〕を参照されたい。

3 均衡解の存在とY，Kの変動方向

以下では，簡単化のため，特に必要のない限り，時点tを示す文字tを省略して$Y(t)$，$K(t)$等を単にY，Kと記し，関数$\tilde{I}$，$\tilde{C}$，$\tilde{S}$をそれぞれI，C，Sで表わすことにしよう。この記号法によれば，以後のわれわれの考察の中心となる微分方程式体系 (2.7)，(2.8) は

(3.1) $\dot{Y}=k(I(Y,\ K)-S(Y))$

(3.2) $\dot{K}=I(Y,\ K)-\delta K$

のように表記されることになる。この動学系の初期条件は (2.9) によって与えられている。

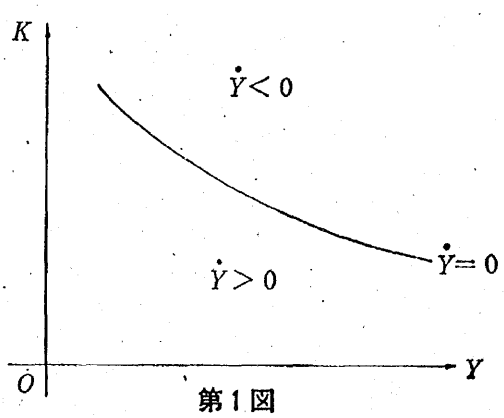
この体系の均衡解とは，$\dot{Y}=0$および$\dot{K}=0$を同時に満たす$(Y,\ K)$，すなわち

(3.3) $I(Y,\ K)=S(Y)$

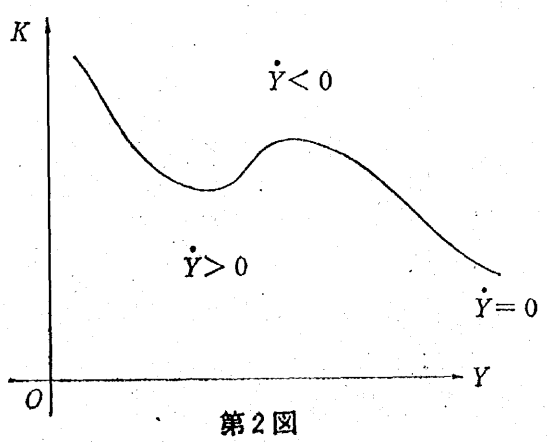
(3.4) $I(Y,\ K)=\delta K$

を同時に満たす$(Y,\ K)$のことをいう。

いま一般の各Yについて (3.3) を満たすKは1つである（ただしカルドア〔5〕におけるように各Kについて (3.3) を満たすYが複数個ある可能性は排除しない）ものとすれば，両辺を微分することによって



第1図



第2図

(3.5) $$\left.\frac{dK}{dY}\right|_{\dot{Y}=0}=\frac{S_Y-I_Y}{I_K}$$

が導かれる。仮定によって $I_K<0$ であるから

(3.6) $$\left.\frac{dK}{dY}\right|_{\dot{Y}=0}>0 \iff S_Y<I_Y$$

$$\left.\frac{dK}{dY}\right|_{\dot{Y}=0}=0 \iff S_Y=I_Y$$

$$\left.\frac{dK}{dY}\right|_{\dot{Y}=0}<0 \iff S_Y>I_Y$$

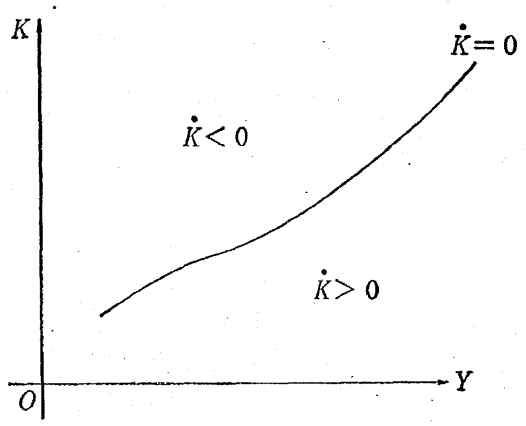
であることが知られる。

したがって (3.3) の関係を Y-K 平面に図示すれば，もしすべての $Y>0$ について $S_Y>I_Y$ が成立しているならば，それを満たす点の軌跡は第1図で $\dot{Y}=0$ で示した曲線のようになる。カルドア〔5〕は Y が中間のノーマルな範囲にあるときは $I_Y>S_Y$ が成立し，それより Y が小さくともまた大きくとも $S_Y>I_Y$ が成立するものと考えた。その場合の (3.3) の関係は第2図の $\dot{Y}=0$ で示した曲線のようになる。

なお以下の分析のため，第1図および第2図において，$\dot{Y}=0$ 曲線の上方では $\dot{Y}<0$，下方では $\dot{Y}>0$ となることを指摘しておこう。このことは $I_K<0$ であるとした仮定を用いると変動方程式 (3.1) より明らかである。

つぎに (3.4) を用いると同様にして

(3.7) $$\left.\frac{dK}{dY}\right|_{\dot{K}=0}=\frac{I_Y}{\delta-I_K}$$



第3図

が導かれる。仮定によってこの右辺はプラスであるから

(3.8) $$\left.\frac{dK}{dY}\right|_{\dot{K}=0}>0$$

となる。したがって (3.4) を満たす点の軌跡は第3図の $\dot{K}=0$ で示した曲線のようになる。また K

の変動方程式 (3.2) よりKの動きもその図に示したようになることが容易に知られる。

動学体系 (3.1), (3.2) の均衡点は，第1図（または第2図）の曲線$\dot{Y}=0$ と第3図の曲線$\dot{K}=0$との交点によって与えられるから，その存在のためには

(a) 曲線$\dot{Y}=0$のK軸との交点が，曲線$\dot{K}=0$のK軸との交点の上方にある。

(b) Yが十分大きいとき曲線$\dot{Y}=0$の傾きの絶対値が正の一定数を超える。

の2つが満たされればよいことになる。

いま$I(0, K)=S(0)$ の解をK_1, $I(0, K)=\delta K$の解をK_2とすれば，条件(a)は$K_1>K_2$, すなわち

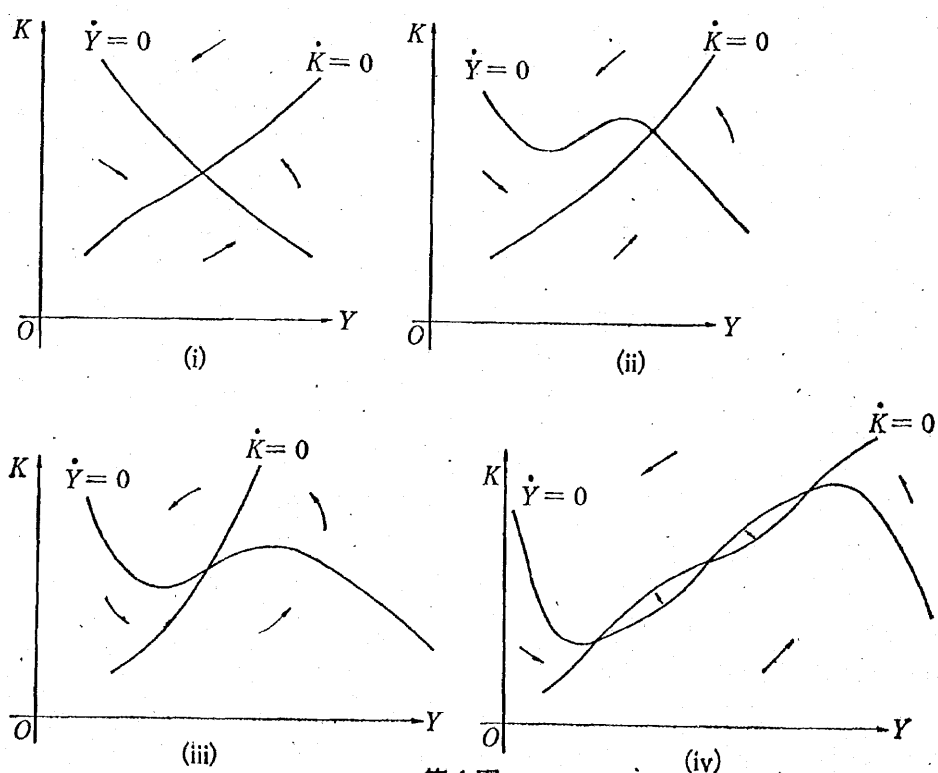
$$(3.9)\quad \delta K_2>S(0)$$

を意味するが，$K_2\geqq 0$かつ$S(0)<0$ (つまり$C(0)>0$) なら (3.9) はつねに満たされていることになる。

また (3.5) より，条件(b)は

(b)′ I_Kの絶対値（仮定 (2.4) の下では$-I_K$）がある正の数より小さく，十分大きなYについてS_Y-I_Yがある正の数より大きい

ことによって保証されることになる。以下ではこれらの均衡解の存在のための条件が満たされてい



第4図

るものとして議論を進めることにする。

均衡解の個数に関しては，1図や2図に示した曲線$\dot{Y}=0$の形に対応してさまざまな場合がありうる。第4図にはそのいくつかの代表的な例を掲げ，あわせてYとKの変動の方向をも示している。矢印を沢山，そして正確に描けば，Y，Kの変動のありさまを推測することができる。

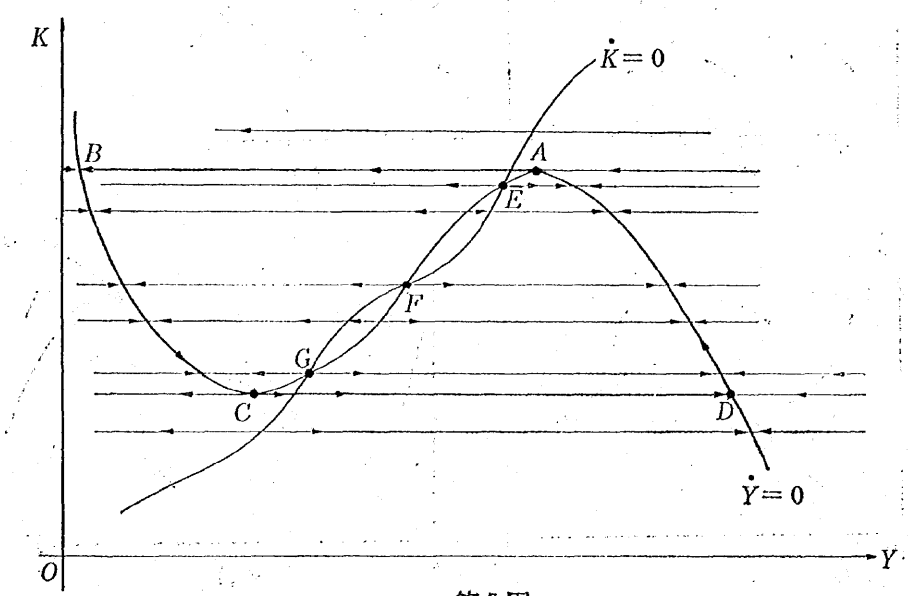
4　調整速度に著しい差がある場合の安定分析——カルドアモデルの再構成

第4図に示したような各ケースに対応して，動学系（3.1），（3.2）の定める（Y，K）の径路はさまざま様相を呈してくる。さらに所得の変化の大きさを定めるパラメターkの値の変化によっても安定な径路が不安定な径路に変りうることにも注意しなければならない。

パラメターの値が任意に与えられた場合には，第4図のような位相図に基づいて体系の動きを正確に分析することは一般に困難である。しかしkの値が（1に比べて）著しく大きいか，反対に0に極めて近い場合には，第4図のような位相図によってもほぼ満足すべき分析を行なうことができる。ここでは，その一例として第4図の(iv)の場合を採り上げてみよう。同様の分析はカルドア・ケースともいうべき同図(iii)の場合にも適用できる。

いまkの値が1に比べて著しく大きいものと想定してみよう。すると第5図のように，曲線$\dot{Y}=0$の上の点を除けば，すべての点の変化の矢印の方向は横軸に平行であるとみなしてよい。

第5図にはE，FおよびGで示した3つの均衡点があり，そのうち高い均衡国民所得に対応する



第5図

E点および低い均衡国民所得に対応するG点においても$\dot{K}=0$曲線は右上り（(3.6)より$I_Y>S_Y$）であるように描かれている点に注意されたい。このことは，均衡国民所得がいずれも$S_Y>I_Y$が成立しない中位の水準に位置していることを意味している。この仮定を改めて，曲線$\dot{Y}=0$上のKの最大点（第5図のA点）が曲線$\dot{K}=0$の左側にあるとするか，曲線$\dot{Y}=0$上のKの最小点（第5図のC点）が曲線$\dot{K}=0$の右側にあるとすると，体系の動きはまったく異なったものになる。

第5図のケースでは，均衡点E，F，Gはいずれも不安定であり，(Y, K)は一定の期間の後には必ず極限径路$ABCD$の上を動くことになる。後に述べるように第5図でE，F，Gが一点に重なった場合の分析は，カルドアの景気変動理論の一つの再定式化とみなしうるものである。

微分トポロジーの用語でいえば，$\dot{Y}=0$線上の$AEFGC$の部分はYの流れがそこから離れていくリペラー（repellor）であり，BCおよびADの部分はYの流れがそこに向かうアトラクター（attractor）である。なお調整速度にこのような極端な差がありうることを考慮して，動学体系の安定分析を行った興味深い文献としてジーマン〔8〕がある。またヘイル〔2〕にもそうした問題についての分析がある。

5　自律体系における安定均衡点と周期解の存在条件(2)

再び第4図をながめてみると，Y，Kの変化の矢印の方向，すなわちkその大きさによっては均衡点が安定な場合のあることが予想される。ここでは解析的方法によってそのための十分条件を与えることにしよう。

動学体系（3.1），（3.2）の右辺のヤコービ行列をJで示せば

$$(5.1)\qquad J=\begin{pmatrix} k(I_Y-S_Y) & kI_K \\ I_Y & I_K-\delta \end{pmatrix}$$

で与えられる。そこでJの転置行列をJ^*で表わし$W=(J+J^*)/2$と定義すれば

$$(5.2)\qquad W=\begin{pmatrix} k(I_Y-S_Y) & \dfrac{I_Y+kI_K}{2} \\ \dfrac{I_Y+kI_K}{2} & I_K-\delta \end{pmatrix}$$

となる。

Wは実対称行列であるから，その固有根は実であり，補論の定理Aによれば体系の運動が一点に収束するためには，すべての$(Y, K)\in R^2_+$について，その二根がともにそれより小さいような負の数が存在すればよい。

注(2)　第7節にはより一般的枠組の中で本節の分析の数学的基礎について説明してある。

容易に知られるように2次の対称行列については，その二根の和は行列のトレースすなわち対角要素の和に等しく，2根の積は行列式の値に一致する。したがって，いまの場合二根の和および積はそれぞれ

$$\text{(5.3)} \qquad \mathrm{tr}\,W=-(k(S_Y-I_Y)+(\delta-I_K))$$

および

$$\text{(5.4)} \qquad \det W=k(I_Y-S_Y)(I_K-\delta)-\frac{(I_Y+kI_K)^2}{4}$$

で与えられることになる。

ここで $I_K<0$ であったから，(5.3) を見ると $S_Y>I_Y$ なら $\mathrm{tr}\,W<-\delta$ となることが知られる。以下では $\det W$ の値について検討してみよう。

まず (5.4) の右辺を k について整理すると，

$$\text{(5.5)} \qquad \det W=-\frac{1}{4}h(k)$$

となる。ここで $h(k)$ は

$$\text{(5.6)} \qquad h(k)=I^2{}_Kk^2-2[2\delta(S_Y-I_Y)-I_K(2S_Y-I_Y)]k+I^2{}_Y$$

で定義されているものとする。

つぎに $h(k)$ を k についての2次式とみなし，判別式 D を計算すると，$S_Y>I_Y$ なら，

$$\text{(5.7)} \qquad \begin{aligned}\frac{1}{4}D&=[2\delta(S_Y-I_Y)-I_K(2S_Y-I_Y)]^2-I^2{}_KI^2{}_Y\\&=4[\delta^2(S_Y-I_Y)^2-\delta I_K(S_Y-I_Y)(2S_Y-I_Y)+I^2{}_K(S_Y-I_Y)S_Y]\\&>4[\delta^2(S_Y-I_Y)^2-2\delta I_K(S_Y-I_Y)^2+I^2{}_K(S_Y-I_Y)^2]\\&=[2(S_Y-I_Y)(\delta-I_K)]^2\end{aligned}$$

となる。

したがって，$S_Y>I_Y$ とすると $h(k)=0$ は2実根をもち，しかも

$$\text{(5.8)} \qquad \sqrt{D}>4(S_Y-I_Y)(\delta-I_K)$$

となることが知られた。

根の公式を用いれば，

$$\text{(5.9)} \qquad \frac{2[2\delta(S_Y-I_Y)-I_K(2S_Y-I_Y)]-\sqrt{D}}{2I^2{}_K}<k$$

$$<\frac{2[2\delta(S_Y-I_Y)-I_K(2S_Y-I_Y)]+\sqrt{D}}{2I^2{}_K}$$

を満たす k については $h(k)<0$ であることが知られる。よって (5.8) より

$$(5.10)\qquad -\frac{I_Y}{I_K}\leqq k\leqq\frac{4(\delta-I_K)(S_Y-I_Y)}{I^2{}_K}-\frac{I_Y}{I_K}$$

を満たすについては$h(k)<0$であり，(5.5) より det $W>0$ ともなることが知られた。以上によってWの固有根は2つとも負であることになる。

以下ではI_Kの絶対値 $(=-I_K)$ がある一定の正の数よりも大きく上限があると仮定しよう。S_Y，I_Yは仮定から一様有界であるから，(5.10) の定めるkの範囲はある有界な閉区間に含まれる。他方仮定によって$h(k)$ は連続であるから，(5.5) より det Wは (5.10) を満たすkについて最大値および最小値をとる。よってWの固有根の積は正でその上限および下限があることになり，(5.3) より2根の和についても同様であるから，2根ともにある負の一定数よりも小さいことが知られた。

以上の分析の結果を要約すると，つぎの命題が導かれる。

定理1　すべての $(Y,\ K)\in R^2{}_+$ について$S_Y>I_Y$で，I_Kの絶対値がある一定の正の数よりも大きく上限があるものとすれば，(5.10) を満たすにk ついて動学体系 (3.3)，(3.4) にはただ一つの均衡点 $(Y^*,\ K^*)$ が存在し，しかもすべての径路はそこに収束する。

本節では均衡解の一意性については何もふれなかったが，$S_Y>I_Y$ の仮定の下でそれが保証されることは第3節の分析 (第4図のケース(i)になる) から明らかである。

つぎに動学系 (3.1)，(3.2) について閉周期軌道が存在するための十分条件を与えることにしよう。ここでγが閉周期軌道であるとは，γが一点に収縮しない周期解(の像)であることを意味する。

以下ではカルドア型の投資関数をもつ第4図のケース(iii)にあたる場合について考察する。このケースの特色は，

(a)　投資関数関数がカルドア型 (96頁参照) であり，しかも均衡点が $I_Y>S_Y$ を満たす範囲にただ一つ存在すること，および

(b)　$\dot{K}=0$　を示す曲線の傾斜 (3.7) が，$\dot{Y}=0$　を示す曲線の傾斜 (3.5) より大きいこと，

の二つである。(a)の解の一意性はいうまでもなく(b)の条件から導かれるものである。

なおこの条件(b)は，Jを (5.1) で定義するとき

$$(5.11)\qquad \det J=k(S_Y(\delta-I_K)-\delta I_Y)>0$$

つまり

$$(5.12)\qquad S_Y>\frac{\delta}{\delta-I_K}I_Y$$

が成立することと同値である。またカルドア〔5〕は付録の図において貯蓄線の傾斜が RR 線の傾斜より大きいと仮定しているが，その条件も (5.12) に帰着するものである。(3)

つぎの条件(c)は曲線 $\dot{Y}=0$ がすべての正の K の値をとり，曲線 $\dot{K}=0$ が原点を通り一定値より小さい傾斜をもつことを保証するためのものである。

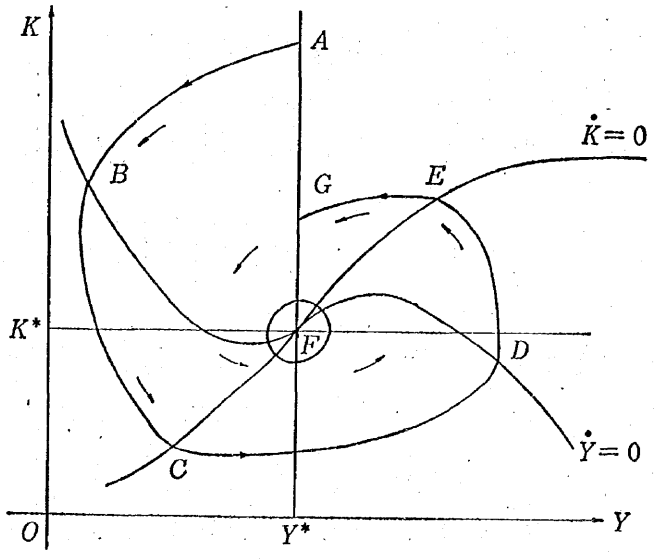
(c) すべての非負の K について $I(Y,K)=S(Y)$ を満たす（有限の）$Y>0$ が存在する。したがってとくに $K=0$ の場合の上式の解を $\overline{Y}$ とすると，$Y>\overline{Y}$ となる範囲では $\dot{Y}<0$ となる。また $Y=0$ の場合に，そしてその場合に限り $I(Y,0)=0$ となり，かつ I_K の絶対値はどこでも一定値以下である。

以上の準備の下で，本節の残された課題は，つぎの結論を示すことである。

定理2 上の条件 (a), (b)および(c)が成り立ち，しかも(d)均衡点の近くで $I_Y-S_Y>(\delta-I_K)/k$ が満たされるなら，動学系 (3.1), (3.2) は閉周期軌道をもつ。

証明） まず体系 (3.1), (3.2) の均衡点の近傍の動きを見るためにその線型近似の体系の性質を調べてみよう。いま (5.1) のヤコービ行列において，すべての関数を均衡点で評価した行列を $\overline{J}$ とおくことにしよう。よく知られているように，(4) その行列の固有根実部が正であるならば，均衡点は不安定な渦状点 (focus) か不安定な結節点 (node) となり，均衡点以外から出発する径路は，十分大きな t についてはすべて均衡点のある近傍の外を通る。

そのための十分条件は，すべての関数が均衡点で評価されているとして，



第6図

注(3) RR' 線の方程式は $I(Y,K)=\delta K$ で与えられるので，dI/dY は (5.12) の右辺で示される。
(4) たとえばヘイル〔3〕pp. 102～104 などを参照。

$$\text{(5.13)} \qquad \mathrm{tr}\,\overline{J} = -(k(S_Y - I_Y) + \delta - I_K) > 0$$

が成り立つことである。なぜなら，$\overline{J}$の固有多項式を $f(\lambda)$ とおくと，その二根の和は (5.13) で与えられ，二根の積は (5.11) で与えられるから，固有根が実の場合には二根とも正であり，固有根が複素数の場合も (5.13) からその実部が正となることが結論されるからである。なおいまの場合均衡点の近くでは $I_Y > S_Y$ であるから，(5.13) は十分に大きな k についてつねに満たされていることに注意しておこう。

つぎに動学系の大域的な動きを考察してみよう。第5図においてFを均衡点 (Y^*, K^*) とする。仮定(c)によれば曲線 $\dot{Y}=0$ および $\dot{K}=0$ の形は図のようであるから，横軸からFに立てた垂線上の十分高い点 A から出発した径路は，再びその垂線と同じ方向で交わることが知られる。しかも $\dot{Y}$ は $\overline{Y}$ より大きい範囲では負であるから，Aから出発した径路がこの垂線に再び同じ方向から到達する点 G は必ず A の下方にあると想定してよい。

さて5図の $ABCDEGA$ で囲まれた部分からFのごく小さな近傍を除いた領域をΩとすると，その中の点から出発して (3.1)，(3.2) にしたがって運動する点の径路はすべてその中に留まり，しかもΩの中には均衡点は存在しない。したがって定理2が成立することは，つぎの著名な命題[(5)]によって明らかでいる。

定理 (ポアンカレー＝ベンディクソン) 平面上の自律微分方程式体系において，すべての $t \geqq t_0$ についてその解軌道があるコンパクトな集合に含まれ，しかも定常点（均衡点）をもたないなら少なくとも一つの閉周期軌道が存在する。

6 外的撹乱と景気循環の存在[(6)]

本節では，動学系 (3.1)，(3.2) に周期的な外的撹乱がある場合に同じ周期の解が存在するための十分条件を与える。ここでは説明の便宜上最終需要（たとえば消費）に一定周期の連続な撹乱 $\beta(t)$ が加わったものとしよう。

いまαを正の数として，その場合の動学系 (3.1)，(3.2) を

$$\text{(6.1)} \qquad \begin{cases} \dot{Y} + \alpha Y = k(I(Y, K) + C(Y) + \beta(t)) + (\alpha + k)Y \\ \dot{Y} + \alpha K = I(Y, K) + (\alpha - \delta)K \end{cases}$$

と書き改め，$\varphi_\alpha[t] : R^2_+ \longrightarrow R^2$を

注(5) 証明については，ハーシュ＝スメール〔4〕，ヘイル〔3〕などを参照のこと。
(6) 第8節では，より一般的枠組の中で本節の分析の数学的構造について説明してある。

$$(6.2)\qquad \varphi_\alpha[t](Y,\ K)=\frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} k(I(Y,\ K)+C(Y)+\beta(t)+(\alpha-k)Y \\ I(Y,\ K)+(\alpha-\delta)K \end{pmatrix}'$$

によって定義しよう。

以下の方針は，$\alpha>0$を適当に選ぶことによって，$I(Y,\ K)$，$C(Y)$，δとkについての自然な条件の下で，$\varphi_\alpha[t]$を縮小写像とすることである。ここで$\varphi_\alpha[t]$が縮小写像であるとは，あるノルム$|\ |$と正の数$k<1$について，

$$(6.3)\qquad |\varphi_\alpha[t](z)-\varphi_\alpha[t](u)|<k\,|z-u| \qquad \forall z,\ u\in R^2_+$$

が成立することである。

第8節の結果（定理いまの場合この左辺に$\beta(t)$は現われない点に注意しておこう）を用いれば，適当なノルムを選ぶことにすると，(6.3) が成立するためには，すべての $(Y,\ K)\in R^2_+$ について φ_α のヤコービ行列

$$(6.4)\qquad J_\alpha=\frac{1}{\alpha}\begin{bmatrix} k(I_Y+C_Y)+\alpha-k & kI_K \\ I_Y & I_K+\alpha-\delta \end{bmatrix}$$

の固有根の絶対値が2つとも1よりも小さければよい。したがって αJ_α の固有根の絶対値がαより小さいことがその条件となる。以下では，そのための条件を具体的に求めることにする。

まずαJ_αの特性多項式を$f_\alpha(\lambda)$としよう。定義から，

$$(6.5)\qquad f_\alpha(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda+k(1-C_Y-I_Y)-\alpha & -kI_K \\ -I_Y & \lambda+(\delta-I_K)-\alpha \end{vmatrix}$$

である。

ここでとくに$\lambda=\alpha$としてみると

$$(6.6)\qquad f_\alpha(\alpha)=\begin{vmatrix} k(1-C_Y-I_Y) & -kI_K \\ -I_Y & \delta-I_K \end{vmatrix}$$
$$=k[(1-C_Y-I_Y)\delta-(1-C_Y)I_K]$$

となる。したがって

(6.7)　もし $1-C_Y-I_Y>0$ あるいは $-(1-C_Y)I_K>\delta$ なら $f_\alpha(\alpha)>0$

となることが知られた。

つぎに (6.5) において$\lambda=-\alpha$とおいてみると

$$(6.8)\qquad f_\alpha(-\alpha)=\begin{vmatrix} 2\alpha-k(1-C_Y-I_Y) & kI_K \\ I_Y & 2\alpha-(\delta-I_K) \end{vmatrix}$$

となり，いくつかの特定のαについては，この値が正になる条件を導くことができる。

たとえば

(6.9) $$f_1(-1)=(2-k(1-C_Y-I_Y))(2-(\delta-I_K))-kI_YI_K$$

(6.10) $$f_k(-k)=k[(1+C_Y+I_Y)(2k-(\delta-I_K))-I_YI_K]$$

また$\bar{\alpha}=\dfrac{k+\delta}{2}$のとき

(6.11) $$f_{\bar{\alpha}}(-\bar{\alpha})=k[(k+I_K)C_Y+kI_Y]+\delta(k+I_K)$$

となることは容易に確かめられる。したがって

(6.12) (a) もし $2>k(1-C_Y-I_Y)$かつ $2>\delta-I_K$ なら $f_1(-1)>0$

(b) もし$2k>\delta-I_K$ なら $f_k(-k)>0$

(c) もし$k>-I_K$ なら $f_{\bar{\alpha}}(-\bar{\alpha})>0$

となることが知られたことになる。

つぎにλの値として$\bar{\lambda}_\alpha=\alpha-[k(1-C_Y-I_Y)+\delta-I_K]/2$を選ぶと

(6.13) $$f_\alpha(\bar{\lambda}_\alpha)=\begin{vmatrix} \dfrac{k(1-C_Y-I_Y)-(\delta-I_K)}{2} & -kI_K \\ -I_Y & -\dfrac{k(1-C_Y-I_Y)-(\delta-I_K)}{2} \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{4}[(k(1-C_Y-I_Y)-\delta+I_K)^2+4kI_YI_K]$$

$$=-\frac{1}{4}[(k(1-C_Y-I_Y)-\delta)^2+[2k(1-C_Y+I_Y)-2\delta+I_K]I_K$$

となる。したがって

(6.14) $$2k(1-C_Y+I_Y)<2\delta-I_K \text{ なら } f_\alpha(\bar{\lambda}_\alpha)<0$$

となることが知られた。

さて$f_\alpha(\lambda)$ をλの2次式と考えれば，$f_\alpha(-\alpha)<0$，$f_\alpha(\alpha)>0$ でしかも$-\alpha<\bar{\lambda}_\alpha<\alpha$を満たす$\bar{\lambda}_\alpha$について$f_\alpha(\bar{\lambda}_\alpha)<0$なら，$f_\alpha(\lambda)$ の固有根は2つとも実で，その絶対値はαよりも小さい。このことに注意しながら，上で定義した$\bar{\lambda}_\alpha$な不等式$-\alpha<\bar{\lambda}_\alpha<\alpha$を満たす条件を求めてみると，簡単な計算により，

(6.15) $$4\alpha>k(1-C_Y-I_Y)+(\delta-I_K)>0 \text{ のとき} -\alpha<\bar{\lambda}_\alpha<\alpha \text{ となる}$$

ことが知られる。

さて(6.7)，(6.12)，(6.14)，(6.15) の結果を総合すれば，適当なαについて，$f_\alpha(\lambda)$ の固有根が2根よもに実で絶対値がαよりも小さくなるための十分条件として，つぎのような場合の存在することが知られたことになる。

(a) $\alpha=1$ のケース

(6.16) $$2\delta-I_K>2k(1-C_Y+I_Y)$$
$$2>\delta-I_K,\qquad 1-C_Y-I_Y>0$$

あるいは

(6.17) $$2-\delta>-I_K>\delta/(1-C_Y)$$
$$I_K-\delta<k(1-C_Y-I_Y)<\delta-I_K/2$$

(b) $\alpha=k$ のケース

(6.18) $$2k>2\delta-I_K>2k(1-C_Y+I_Y),\ 1-C_Y-I_Y>0$$

あるいは

(6.19) $$2k-\delta>-I_K>\delta/(-C_Y)$$
$$I_K-\delta<k(1-C_Y-I_Y)<\delta-I_K/2$$

(c) $\alpha=\dfrac{k+\delta}{2}$ のケース

(6.20) $$2\delta-I_K>k(1-C_Y+I_Y)$$
$$k>-I_K,\qquad 1-C_Y-I_Y>0$$

が成立する。また$S_Y>I_Y$でkが十分大きいとき，たとえば

(6.21) $$k(1-C_Y-I_Y)>4(\delta-I_K),\ k(1-C_Y-I_Y)^2>-8I_K$$

となるとは $f_k(\lambda)$ の固有根の2つが実でkより小さいことも同様にして知られる。以上の結果を総合するとつぎの帰結がえられる。

定理2 もしすべての $(Y,\ K)\in R^2_+$ について条件(6.16)～(6.21) の中のいずれか1つが満たされるなら動学体系(3.1)，(3.2) に一定周期の外的撹乱を加えた体系に周期解が存在する。

かくして外的撹乱がある場合の景気変動（周期解）の存在が示されたことになる。これはフリッシュ〔3〕の景気理論の一つの重要な側面の分析に関係するものであると考えてよかろう。

7 補論I 動学系の安定性——第5節への数学注

R^nをn次元ユークリッド空間とし，$f:X\to R^n$をR^nの領域Xで定義されたC^1関数（連続微分可能な関数）とする。以下では自律微分方程式体系

(7.1) $$\frac{dx}{dt}=f(x)$$

の安定性について考察するが，与えられた初期条件の下での解の存在と一意性は保証されているも

のとする。

いま

$$(7.2) \qquad x=\varphi(t\ ;x_0\ t_0)$$

を $t=t_0$ のとき $x=x_0$ を満たす (7.1) の解とする。この関数が $T_1<t<T_2$ で定義されているものとするとき，集合

$$(7.3) \qquad M=\{\varphi(t\ ;x_0\ t_0)|T_1<t<T_2\}$$

を (1.2) の径路あるいは軌道 (trajectory or orbit) とよぶことにしよう。

動学系 (7.1) はつぎの4つの条件を満たすとき収束する (convergent) という。

(i) x_0 にかかわりなく解 $\varphi(t\ ;x_0,\ t_0)$ はすべての $t\geqq t_0$ に拡張される。

(ii) 動学系 (7.1) は単一の周期解 $x=\Psi(t)$ をもつ。

(iii) その解はリアプーノフ安定である。つまり，$\Psi(t)$ の軌道を M とすれば，任意の $\varepsilon>0$ について，$d(x_0,\ M)<\delta$ なら $d(\varphi(t\ ;x_0,\ t_0),\ M)\leqq\varepsilon$ となるような $\delta<0$ が存在する。(ここで d は距離関数を示すものとする。)

(iv) $\lim_{t\to\infty}\|\varphi(t,\ x_0,\ t_0)-\Psi(t)\|=0$ となる。

なお周期解が単一の均衡点となる場合には，この条件の(iv)はリアプーノフの漸近安定の条件と一致することに注意しておこう。

さて (7.1) のヤコービ行列 $J(x)$ を

$$J(x)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ & \vdots & \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

その転置行列を $J^*(x)$ で定義し，$W(x)$ を

$$W(x)=\frac{1}{2}(J(x)+J^*(x))$$

とおく。$W(x)$ は実対称行列であるから，その固有根はすべて実数である。このときつぎの定理が成り立つ。

定理A もしすべての $x\in X$ について $W(x)$ の固有根がある負の数より小さければ動学系 (7.1) は収束する。

証明についてはプリス〔6〕pp. 79～85を参照されたい。

8　補論Ⅱ　周期解の存在について——第6節への数学注

XをR^nの凸領域とし，$f: X \longrightarrow R^n$をC^1関数，$b(t)$を各tについて$b(t) \in X$を満たす連続な周期ωの（つまり$b(t)=b(t+\omega)$となる）関数とする。そのときつぎのような手続きによって微分方程式体系

$$(8.1) \qquad \frac{dx}{dt}=f(x)+b(t)$$

に周期ωの周期解が存在することが示される。

まず適当な$\alpha \in R$によって（8.1）を

$$(8.2) \qquad \frac{dx}{dt}+\alpha x=f(x)+\alpha x+b(t)$$

と変形するとき

$$(8.3) \qquad g[t]x=\frac{1}{\alpha}(f(x)+\alpha x+b(t))$$

が（後に定義される意味で）縮小写像であるための取扱い十分条件を示す（定理C）。つづいて$g[t]$が縮小写像であるとき，動学系（8.1）に周期解が存在することが明らかにされる（定理D）。

本文第6節の分析では，適当なαの選択によって定理Dの前提条件が満たされることを示す方針で，周期解（景気循環）の存在証明が行われている。この手続きの厳密な意味と，それが依拠する諸定理の正確な内容は，以下の説明によって明らかとなろう。

線型写像についてのつぎの結果はよく知られている。

定理B　$T: R^n \to R^n$を線型写像とする。そのときもしTの固有根の絶対値のすべてが1より小さければ，

$$(8.4) \qquad |Tx| \leq k|x|$$

を満たすR^nのあるノルムと$k<1$が存在する。

証明については，たとえばハーシュ＝スメール〔4〕pp. 279～280を参照されたい。

さてXをノルム空間E（たとえばR^n）の部分集合とするとき，一般に$g[t]: X \to E$がある正の数kについて

$$(8.5) \qquad |g[t]x-g[t]y| \leq k|x-y| \qquad \forall x, y \in X$$

を満たすとき，$g[t]$はリプシッツ条件を満たすといい，kをリプシッツ定数とよぶことにする。

またとくに$k<1$のときgを縮小写像であるという。

また$T:E\to E$を線型写像とするとき，Tの一様ノルムを

(8.6) $$\|T\|=\max\{|Tx| \mid |x|\leq 1\}$$

で表わすことにする。

つぎの定理は，gが縮小写像であることを示すための一つの判定方法を与えるものである。

定理C XをR^nの凸領域とするとき，$g:X\to R^n$があるノリムについて縮小写像となるための十分条件は，任意の$x\in X$について，そのヤコービ行列$Dg(x)$の固有根の絶対値が，すべて1より小さいことである。

証明） 定理Bを用いれば定理Cを証明するためにはつぎの命題が示されればよい。

補助定理 $g[t]:X\to E$をC^1関数として，Xの凸部分集合X_0の任意の元xについて$\|Dg[t]x\|\leq k$が満たされるならば，kはgをX_0に制限した関数$g|_{X_0}$のリプシッツ定数となる。

この補助定理の証明は，つぎのようにして行われる。まずx，$y\in X_0$とすると，X_0は凸集合であるから，任意の$0\leq s\leq 1$について$x+s(y-x)\in X_0$となる。いま$\phi:[0,1]\to E$を

(8.7) $$\phi(s)=g(x+s(y-x))$$

と定義すれば，

(8.8) $$\begin{aligned} g[t]y-g[t]x&=\phi(1)-\phi(0)\\ &=\int_0^1\phi'(s)ds\\ &=\int_0^1 Dg(x+t(y-x))(y-x)ds \end{aligned}$$

したがって

(8.9) $$|g[t]y-g[t]x|\leq\int_0^1 k|y-x|dt=k|y-x|$$

が導かれる。

つぎの定理Dは，微分方程式体系（8.1）すなわち（8.2）の周期解の存在を示すための有効な方法を与えるものである。この定理の前提にあるgの縮小写像に関する条件の判定には，さきの定理Cが役立つことはいうまでもない。

定理D Eをバナッハ空間としXをその凸部分集合とする。そのときもし写像$g[t]:X\to X$が

周期Tをもちある$k<1$について

(8.10) $$|g[t]x-g[t]y|<k|x-y| \qquad \forall x,\ y\in X$$

を満たすならば，$X(0)$ を初期値とする微分方程式体系

(8.11) $$\frac{dx(t)}{dt}+\alpha x(t)=\alpha g[t]x(t)$$

の解$x(t)$ 各$t\in[0,\ T]$ について$x(t)\in X$，となり，その閉区間で絶対連続，その内点で微分可能，しかも$x(0)=x(T)$ を満たすものが存在する。ただし各$x\in X$について$g[t]x$は上の区間で可積分とする。

定理の証明は，ブレジス〔1〕の第1章1.3節の分析を総合することによって示される。以下そのアウトラインについて述べよう。

（ステップ1） まず$x(0)=x_0$を初期値とする

(8.12) $$\frac{dx(t)}{dt}+x(t)=g[t]x(t)$$

の解$x(t)$ （すなわち (8.11) で$\alpha=1$とした場合の解）は，

(8.13) $$x(t)=e^{-t}x_0+\int_0^t e^{s-t}g[t]x(s)ds$$

を満たすことが確かめられる。この表現によって絶対連続性と微分可能性は定理の残りが証明されると明らかとなる。

（ステップ2） 区間$I=[0,\ T]$からEへの連続関数の集合を$C(I\ ;E)$とし，その上のノルムを各$x\in C(I\ ;E)$について

$$\|x\|=\sup_I|x(t)|$$

で与えるここにする。ここで

$$X=\{x\in C(I\ ;E),\ x(t)\in C \quad \forall t\in I\}$$

とおけば，xは閉凸集合となる。

（ステップ3） つづいて$J:X\to X$を

(8.14) $$Jx(t)=e^{-t}x_0+\int_0^t e^{s-t}g[s]x(s)ds$$

で定義すると，$Jx(t)\in X$となることが確かめられ，しかもJ^kはあるkについて縮小写像になることが知られる。したがってJ^kに不動点が存在することが結論される。

（ステップ4） J^kの不動点x，すなわち$J^kx=x$となるxは，じつはJの不動点にもなってい

る。じっさい，$y=Jx$ とおくと，$J^k y=J^{k+1}x=Jx=y$ であり，よく知られているように縮小写像の不動点は一意であるから，$x=y$ となり，x は J の不動点である。かくして J の定義と不動点の意味から $\alpha=1$ の場合の (8.11) の解の存在が示されたことになる。

（ステップ5） $\alpha>0$ が一般の場合について (8.11) の解 $x(t)$ が

$$x(t)=e^{-\alpha t}x_0+\alpha\int_0^t e^{\alpha(s-t)}g[s]\,x(s)ds \tag{8.15}$$

を満たすことは，$\alpha=1$ の場合の結果において $x(t)=v(\alpha t)$ とおいてみることによって容易に導かれる。

（ステップ6） $x(t)$ を $x(0)=x_0$，$\hat{x}(t)$ を $\hat{x}(0)=\hat{x}_0$ を満たす (8.11) の解とすると

$$|x(t)-\hat{x}(t)|<e^{\alpha(k-1)t}|x_0-\hat{x}_0| \tag{8.16}$$

が満たされる。これはブレジス〔1〕の定理15の特別の場合である。

（ステップ7） $x(0)=x(T)$ となる解（周期解）の存在を示すために $\tilde{J}:C\to C$ を

$$\tilde{J}\xi=x_{\xi(T)} \tag{8.17}$$

と定義する。ここで x_ξ は

$$\frac{dx_\xi(t)}{dt}+dx_\xi(t)=g(x_\xi(t)),\quad x_\xi(0)=\xi \tag{8.18}$$

の解である。定義から x_ξ は ξ を初期値とする (8.11) の解であり，$\tilde{J}$ の不動点が存在すれば，ξ の T 期後の値がそれ自身に等しくなり，周期解の存在が保証されることになる。

さて (8.16) より

$$|\tilde{J}\xi-\tilde{J}\hat{\xi}|\leqq e^{\alpha(t-1)t}|\xi-\hat{\xi}|$$

であるから，$\tilde{J}$ は縮小写像となり，その不動点が存在する。以上で定理の証明の概要が示されたことになる。

参考文献

〔1〕 Brezis, H. *Operateurs Maximaux Monotones*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam and London, 1973.

〔2〕 Frish, R. "Propagation Problems and Impulse Problems in Dynamic Economics", *Economic Essays in Honour of G. Cassel*, 1933.

〔3〕 Hale, J. K. *Ordinary Differential Equations*, Wiley-Interscience A Division of John Wiley & Sons Inc., 1969.

〔4〕 Hirsch, M. W., and S. Smale. *Differential Equations Dynamical Systems and linear Algebra*, Academic Press, New York, San Francisco and London, 1974.

〔5〕 Kaldor, N. "A Model of the Trade Cycle", *Economic Journal*, March, 1940.

〔6〕 Pliss, V. A. *Nonlocal Problems of the Theory of Oscillations*, Academic Press, New York and London, 1966.

〔7〕 安井琢磨「自励振動と景気循環」『季刊理論経済学』第3および第4巻（1952および1953年）『安井琢磨著作集第Ⅲ巻』に収録。

〔8〕 Zeeman, E. C. "Differential Equations for the Heartbeat and Nerve Impulse," in C. H. Waddington, *Towards a Theoretical Biolozy*, Vol. 4 (E. U. P.) pp. 8-67.
also in Peixoto, *Dynamical Systems*, 1973.

（経済学部教授）