Title	正作用素
Sub Title	On the positive operators
Author	渡部, 隆一
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1980
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.73, No.1 (1980. 2) ,p.69- 92
JaLC DOI	10.14991/001.19800201-0069
Abstract	
Notes	小特集 経済学と函数解析 論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19800201-0069

正 作 用 素

渡 部 隆 一

この論文の目的は，正作用素という概念を多意写像の場合にまで拡張し，その性質を考察することにある。

有名な von Neumann の経済モデルでは，ベクトル x で表される経済的状態が1単位期間後にベクトル y に変換されるとしたとき，このようなベクトルの組 (x, y) の全体が凸錐をなしていると仮定して理論を展開する。この場合，上の変換を T で表せば，T はそのグラフが凸錐となるような多意写像である。Rockafellar は〔8〕,〔9〕において，グラフが凸錐となるような多意写像を convex process という名のもとに論じている。これらの論文は，多くの示唆を含んでおり，高い評価を与えるべきではあろうが，未解決の点も多く，十分満足できるとはいい難い。

この論文では，〔10〕において詳細に解説した Krein 空間の理論を利用して，正作用素に対応する多意写像の概念を構成することを試みる。

さて，正作用素というものは，n 次元ベクトル空間上で考えれば，正行列によって表される。したがって，正作用素に対応する多意写像も，正行列の主要な性質を持たなくては見合が悪い。そこで正行列の主要な性質をまとめておくことにするが，正行列特有の性質を知るには，非負行列までを考察する方が具合がよい。非負行列というものは，経済学の数学的モデルにはよく登場するから，非負行列の性質の中でどのようなものがどんな働きをするのかを考察しておくのも無駄ではないであろう。

1. 非 負 行 列

非負行列に関連してこの節で述べる命題はよく知られているもので，その証明は，Gantmacher〔1〕, Karlin〔2〕,〔3〕, Schaefer〔7〕, Dunford-Schwarz〔4〕等にのっているからここでは述べない。しかし，非負行列に関しては微妙な論点がいくつかあるから，それらを理解する為の例ははあげておく。

記号は慣用のものを用いるが，まぎらわしいものだけを次にあげておく。

x：	n次元ベクトル，成分はx_iで表す。
e：	すべての成分が1のベクトル。
$x \geqq y$：	$x_i \geqq y_i$（$i=1, 2, \cdots, n$）。
$x \geq y$：	$x \geqq y$，$x \neq y$。
$x > y$：	$x_i > y_i$（$i=1, 2, \cdots, n$）。
$A \geqq 0$：	$a_{ij} \geqq 0$（$i, j=1, 2, \cdots, n$）。
$A > 0$：	$a_{ij} > 0$（$i, j=1, 2, \cdots, n$）。
Ω：	非負ベクトル全体の集合（非負象限）。
$\lvert\lambda\rvert$：	複素数$\lambda=\mu+\nu i$の絶対値 $\sqrt{\mu^2+\nu^2}$。
$R(\lambda, A)$：	Aのレゾルベント $(\lambda I-A)^{-1}$。
m位の極：	λの関数 $f(\lambda)$ に対して，$\lim\limits_{\lambda \to a}(\lambda-a)^m f(\lambda)$ は存在するが，$k<m$ に対しては，$\lim\limits_{\lambda \to a}\lvert\lambda-a\rvert^k\lvert f(\lambda)\rvert=\infty$となるとき，$a$を関数$f$の$m$位の極という。

最初に，正行列に関する命題を述べる。命題1.1はPerronの定理と呼ばれているものである。

命題 1.1 Aを正行列とする。

(1) Aは正の固有値λ_0と，λ_0に対応する正の固有ベクトルx_0とを持つ。すなわち，

$$Ax_0=\lambda_0 x_0,\ \lambda_0>0,\ x_0>0,$$

を満たす実数λ_0とベクトルx_0とが存在する。

(2) λ_0と異なるAの固有値をλ（一般に複素数）とすれば，$\lvert\lambda\rvert<\lambda_0$である。

(3) λ_0は固有方程式 $\det(\lambda I-A)=0$ の単根である。

この命題1.1のλ_0を$r(A)$で表し，Aの**Frobenius**根と呼ぶ。

命題 1.2 $A>0$，$r(A)=\lambda_0$とすると，Aは次のように表せる。

$$A=\lambda_0 P+Q$$

ここで，Pは次の関係より定まる行列である。

$$AP=PA=\lambda_0 P,\ P^2=P$$

このPより，$Q=A-\lambda_0 P$とすると，

$$QP=PQ=O$$

したがって，A^kは次のように表せる

$$A^k=(\lambda_0)^k P+Q^k$$

さらに，$\lim\limits_{k\to\infty}(\frac{1}{\lambda_0}A)^k=P$，$\lim\limits_{k\to\infty}(\frac{1}{\lambda_0}Q)^k=O$が成り立つ。

この命題1.2が成り立つので，Pを$\frac{1}{\lambda_0}A$の**主要部分**と呼ぶ。

〔例1〕 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$とすると，

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ -3 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-6)(\lambda^2+3\lambda+3)$$

固有方程式：$(\lambda-6)(\lambda^2+3\lambda+3)=0$

固有値：6，$-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Frobenius 根：$r(A)=6$

$$\left|-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{3}<r(A)$$

$r(A)$に対応する固有ベクトル：$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P^2=P$，$PA=AP=\lambda_0 P$より，

$$P=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix},\ \frac{1}{\lambda_0}A=\begin{pmatrix} 1/6 & 2/6 & 3/6 \\ 3/6 & 1/6 & 2/6 \\ 2/6 & 3/6 & 1/6 \end{pmatrix},\ \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda_0}A\right)^k=P$$

$$Q=A-\lambda_0 P=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda_0}Q\right)^k=O$$

$$A=6P+Q=6\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

〔例2〕 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$とすると，

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -2 \\ -3 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -4 & \lambda-2 \end{vmatrix}=(\lambda-6)(\lambda^2+2\lambda+2)$$

固有方程式：　$(\lambda-6)(\lambda^2+2\lambda+2)=0$

固有値：　$6,\ -1+2i,\ -1-2i$

Frobenius 根：　$r(A)=6$

$$|-1\pm 2i|=\sqrt{5}<r(A)$$

$r(A)$に対応する固有ベクトル：$\begin{pmatrix}6\\8\\11\end{pmatrix}$

$P^2=P$，$PA=AP=\lambda_0 P$より，

$$P=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}6&6&6\\8&8&8\\11&11&11\end{pmatrix},\ \frac{1}{\lambda_0}A=\begin{pmatrix}1/6&1/6&2/6\\3/6&1/6&2/6\\2/6&4/6&2/6\end{pmatrix}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda_0}A\right)^k=P$$

$$Q=A-\lambda_0P=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}-11&-11&14\\27&-23&2\\-16&34&-16\end{pmatrix},\ \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda_0}Q\right)^k=O$$

$$A=6P+Q=\frac{6}{25}\begin{pmatrix}6&6&6\\8&8&8\\11&11&11\end{pmatrix}+\frac{1}{25}\begin{pmatrix}-11&-11&14\\27&-23&2\\-16&34&-16\end{pmatrix}$$

命題1.1と命題1.2は，正行列に関するものである。行列Aのすべての成分が正ならば，$\frac{1}{\lambda_0}A$の主要部分Pは連立方程式を解くだけで求まってしまうから，A^kがどのように行動するかが明快にとらえることが出来て具合がよい。しかし成分中に0が混入してくると，A^kの行動は複雑になる。次の命題は非負行列に関するもので，**Frobenius の定理**と呼ばれているものの一部である。

命題 1.3　Aを非負行列とする。

(1)　Aの固有値の中に非負のものが存在する。それらの最大のものをλ_0とすれば，λ_0に対応する非負の固有ベクトルx_0が存在する。すなわち，

$$Ax_0=\lambda_0x_0,\ \lambda_0\geqq 0,\ x_0\geqq 0,$$

を満たす実数λ_0とベクトルx_0とが存在する。

(2)　Aの任意の固有値をλ（一般に複素数）とすれば，$|\lambda|\leqq\lambda_0$である。

この命題1.3のλ_0が，非負行列Aに対するFrobenius根$r(A)$である。非負行列については，irreducibleとかimprimitiveとかいう概念を使ってさらにその性質を調べることが出来るが，そのことについては触れない。次に，実用的で簡明な命題をあげておく。

命題 1.4 Aを非負行列とする。

(1) Aの各行の成分の和を考え，その最小値をs，最大値をtとすれば，$s \leqq r(A) \leqq t$である。

(2) $Ax = \lambda x$，$x > 0$となるxが存在すれば，$\lambda = r(A)$である。

〔例3〕 非負行列Aの各行に，少なくとも1つの正の成分が含まれていれば，命題1.4の(1)より，$r(A) > 0$である。

確率行列とは，各行の成分の和が1であるような非負行列である。したがって，命題1.4の(1)より$s = t = 1$となるから，$r(A) = 1$である。あるいは，Aが確率行列ならば，$Ae = e$となり，$e > 0$であるから，命題1.4の(2)より$r(A) = 1$である。

次の命題もよく用いられる。

命題 1.5 Aは非負行列とする。

(1) $r(A) = \lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{\|A^k\|}$

(2) $\lambda > r(A) \Longrightarrow (\lambda I - A)^{-1} \geqq O$

非負行列Aのk乗については次が成り立つ。

命題 1.6 Aは非負行列とする。

(1) $\lim_{k \to \infty} A^k = O \iff r(A) < 1$

(2) $r(A) > 1$ならば，$\lim_{k \to \infty} A^k$は存在しない。

(3) $r(A) = 1$のとき，$\lim_{k \to \infty} A^k$が存在するための必要十分条件は，$\lambda = 1$がレゾルベントR(λ, A)の1位の極であって，他の任意の固有値をλとすると，$|\lambda| < 1$となることである。

λ_0が固有方程式の単根ならば，λ_0はレゾルベントR(λ, A)の1位の極となるが，後に示す〔例4〕からわかるように，逆は成立しない。

この命題1.6から，A^k の極限について調べるには，$r(A)=1$ の場合のみを考えればよいことになる。$r(A)\neq 1$ の時でも，$\frac{1}{r(A)}A$ の Frobenius 根は1であるから，これについて考えればよい。しかし，絶対値が1であるような固有値が $\lambda=1$ 以外にある場合には，振動する部分が出てくる。応用上は，この振動する部分が重要な意味を持つ場合が多いから，無視するわけにはいかない。振動する部分の影響を取り除く為に，次のような平均を考える。

$$M_k=\frac{1}{k}\,(I+A+A^2+\cdots+A^{k-1})$$

もし $r(A)<1$ ならば，$k\to\infty$ のとき $A^k\to 0$ だから $M_k\to 0$ である。また，$r(A)>1$ の時は，M_k は有界でなくなり M_k の極限は存在しない。したがって，$r(A)=1$ の場合のみを考えればよい。$r(A)=1$ で $A^k\to A_0$ ならば，$M_k\to A_0$ である。しかし，$r(A)=1$ で $\lim A^k$ が存在しない場合でも $\lim M_k$ は存在する場合がある。

$r(A)=1$ であって，$\lim M_k$ が存在するとき，行列 A は**平均エルゴード的**であると呼ばれる。

命題 1.7 非負行列 A が平均エルゴード的である為の必要十分条件は $\{A^k\}$ $(k=0,1,2,\cdots)$ がノルム有界であることである。

非負行列 A が平均エルゴード的の時，

$$\lim_{k\to\infty}M_k=P$$

とおくと，

$$A=P+Q,\ P^2=P,\ AP=PA=P,\ PQ=QP=O$$

と表せる。したがって，

$$A^k=P+Q^k$$

となる。この場合，$\lim A^k=P$ ならば $\lim Q^k=O$ であるが，$\lim A^k$ が存在しなければ，$\lim Q^k$ も存在しない。

命題 1.8 A が非負行列で $r(A)=1$ の時，次の3つの条件は同値である。

(1) $\lambda=1$ がレゾルベント $R(\lambda,A)$ の1位の極である。

(2) $\{A^k\}$ は有界である。

(3) A は平均エルゴード的である。

この命題1.8の条件が満たされる場合には，

$$\lim_{k\to\infty}M^k=\lim_{\lambda\to 1}(\lambda-1)(\lambda I-A)^{-1}$$

となる。

〔例4〕 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすると，

$\det(\lambda I-A) = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$

固有値： 1，-1.

Frobenius 根： $r(A)=1$.

$$|-1|=r(A).$$

$r(A)$に対応する固有ベクトル：$\begin{pmatrix} k \\ l \\ k \end{pmatrix}$

$$R(\lambda,A)=(\lambda I-A)^{-1}=\frac{1}{(\lambda-1)^2(\lambda+1)}\begin{pmatrix} \lambda(\lambda-1) & 0 & \lambda-1 \\ 0 & \lambda^2-1 & 0 \\ \lambda-1 & 0 & \lambda(\lambda-1) \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{(\lambda-1)(\lambda+1)}\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

したがって，$\lambda=1$は$R(\lambda,A)$ の1位の極である。

$$P=\lim_{\lambda\to1}(\lambda-1)R(\lambda,A)=\lim_{\lambda\to1}\frac{1}{\lambda+1}\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$Q=A-P=\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix},\quad A^m=P+Q^m=P+(-1)^{m-1}Q$$

すなわち，$\lim A^k$は存在しないが，$\lim M_k$は存在する。

〔例5〕 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすると，

$\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$

Frobenius 根： $r(A)=1$

$r(A)$に対応する固有ベクトル： $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$R(\lambda,A)=(\lambda I-A)^{-1}=\frac{1}{(\lambda-1)^2(\lambda+1)}\begin{pmatrix}\lambda(\lambda-1) & \lambda-1 & 0\\ \lambda-1 & \lambda(\lambda-1) & 0\\ \lambda+1 & \lambda+1 & \lambda^2-1\end{pmatrix}$$

$\lambda=1$は$R(\lambda,A)$の2位の極となる。この場合には，命題1.8の条件をAは満たさない。

$$A^{2m}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2m & 2m & 1\end{pmatrix},\quad A^{2m-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 2m-1 & 2m-1 & 1\end{pmatrix},$$

となり，A^kは有界ではない。$\lim M_k$も存在しない。

〔例6〕 Aが確率行列ならば，A^kも確率行列となり$\{A^k\}$は有界となる。したがって，Aは平均エルゴード的である。その場合，M_kも確率行列となり，$\lim M_k=P$も確率行列となる。行列Pは，

$$P=P^2,\quad AP=PA=P,\quad Pe=e$$

を満たし，$A=P+Q$とおくと，

$$Ae=Pe+Qe$$

$$\therefore\quad Qe=0$$

となる。すなわち，Qの行和は0である。

たとえば，$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\end{pmatrix}$とすると，

$$P=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}-1/2 & 1/2 & 0\\ 1/2 & -1/2 & 0\\ -1/6 & -1/6 & 1/3\end{pmatrix}$$

確率行列が平均エルゴード的ということは，エルゴード・チェーンを分類する時に有効に利用される。

いまの〔例5〕からわかるように，$r(A)=1$ で $\lambda=1$ が $R(\lambda, A)$ の2位以上の極になる時はやや面倒である。Karlin〔3〕, Schaefar〔5〕,〔6〕は，複素関数論を利用して，このような場合も統一的に扱っている。複素関数論はよく整理されているから，もし有効に使うことが出来れば，強力な解析的道具になるのである。しかし，この論文の目的は，正作用素に対応する多意写像を構成することにあるから，これ以上は深入りしない。

2. 正多意作用素

―― 順序の導入 ――

この論文では，有限次元ノルム空間上の多意作用素について考察する。まず，〔10〕に従って，この空間に順序を導入する。要点だけを述べる。

L： 有限次元ノルム空間.

L^*： Lの共役空間.

空間Lの空でない部分集合で，次の条件を満たすものをCとする。

(K－1) $C+C\subset C$.

(K－2) $\forall\lambda\geqq 0;\ \lambda C\subset C$.

(K－3) $C\cap(-C)=\{0\}$.

(K－4) Cは閉集合である.

(K－5) $\mathrm{int}\, C\neq\emptyset$.

(K－6) Cはノルム有界な底Vを持つ.

Lの元の間に次のような順序を導入する。

$$x\leqq y \iff y-x\in C.$$

$$x\leq y \iff x\leqq y,\ x\neq y.$$

$$x<y \iff y-x\in \mathrm{int}\, C.$$

元xがCに属するということと，$0\leqq x$ということとは同値である。

次にLの共役空間 L^* に順序を導入する。

$$x^*\leqq y^* \iff \forall x\in C;\ \langle x, x^*\rangle \leqq \langle x, y^*\rangle.$$

空間 L^* において，

$$C^*=\{x^*|\ 0\leqq x^*\}$$

とおけば，C^* は L^* の凸錐となり，

$$x^*\leqq y^* \iff y^*-x^*\in C^*.$$

である。

なお，〔10〕で述べたようにC^*は(K－1)～(K－6)を満たす。

$$x^* \leq y^* \iff x^* \leqq y^*,\ x^* \neq y^*,$$

$$x^* < y^* \iff y^* - x^* \in \mathrm{int}C^*.$$

とする。

$$0 < x^* \iff \forall x \geq 0\ ;\ 0 < \langle x,\ x^* \rangle.$$

である。

空間Lの凸錐Cの底Vは，適当な正の線形関数f^*により，次の形に書ける。

$$V = \{x \mid \langle x,\ f^* \rangle = 1,\ x \in C\}.$$

また，空間Lの正の元eに対して，

$$V^* = \{x^* \mid \langle e,\ x^* \rangle = 1,\ x^* \in C^*\},$$

とおくと，V^*は空間のL^*のノルム有界な底となる。

空間Lの部分集合の間に，次のような算法を考える。すなわち，任意の実数α，βと，空間Lの部分集合A，Bに対して，

$$\alpha A + \beta B = \{\alpha x + \beta y \mid x \in A,\ y \in B\}.$$

ただし，

$$A + \emptyset = \emptyset,\ \alpha\emptyset = \emptyset,$$

とする。

凸錐Cの部分集合で，有界，閉，凸であるもの全体からなる集合族を$\mathscr{C}$で表す。$\mathscr{C}$は空集合$\emptyset$を含むとする。次が成り立つ。

$$A,\ B \in \mathscr{C} \implies A + B \in \mathscr{C}.$$

$$\alpha \geqq 0,\ A \in \mathscr{C} \implies \alpha A \in \mathscr{C}.$$

集合族$\mathscr{C}$に属する集合Aと，非負の線形関数$x^* \in C^*$に対して，

$$\langle A,\ x^* \rangle = \sup_{x \in A} \langle x,\ x^* \rangle.$$

と定める。ただし，

$$\langle \emptyset,\ x^* \rangle = -\infty.$$

とする。

集合$A \in \mathscr{C}$を1つ固定した時，写像

$$\langle A,\ \cdot \rangle\ :\ C^* \to \bar{R} \quad (\bar{R} = R \cup \{-\infty,\ +\infty\}).$$

は次の性質を持つ。

(1) $\alpha \geqq 0,\ x^* \in C \implies \langle A,\ \alpha x^* \rangle = \alpha \langle A,\ x^* \rangle.$

(2) $x_1^*,\ x_2^* \in C \implies \langle A,\ x_1^* + x_2^* \rangle \leqq \langle A,\ x_1^* \rangle + \langle A,\ x_2^* \rangle.$

また，凸錐 C^* の元 x_0^* を1つ固定した時，写像

$$\langle\cdot,\ x_0^*\rangle : \mathscr{C} \longrightarrow \bar{R}$$

は次の性質を持つ。

(1) $\alpha \geqq 0,\ A \in \mathscr{C} \implies \langle \alpha A,\ x_0^* \rangle = \alpha \langle A,\ x_0^* \rangle$,

(2) $A_1,\ A_2 \in \mathscr{C} \implies \langle A_1 + A_2,\ x_0^* \rangle = \langle A_1,\ x_0^* \rangle + \langle A_2,\ x_0^* \rangle$.

集合族 $\mathscr{C}$ に属する集合の間に，次のように順序を導入する。

$$A \leqq B \iff \forall x^* \in C^*;\ \langle A,\ x^* \rangle \leqq \langle B,\ x^* \rangle,$$

凸錐 C^* の底 V^* の定義から，

$$A \leqq B \iff \forall x^* \in V^*;\ \langle A,\ x^* \rangle \leqq \langle B,\ x^* \rangle,$$

である。

1点0のみからなる集合 $\{0\}$ を O で表す。$O \in \mathscr{C}$ であって，次が成り立つ。

$$\forall A \in \mathscr{C}:\quad A + O = A,\ O \leqq A\ (A \neq \varnothing).$$

$$\forall \alpha \geqq 0:\quad \alpha O = O.$$

また，$A, B \in \mathscr{C}$ に対して，

$$A < B \iff \forall x^* \in V^*:\ \langle A,\ x^* \rangle < \langle B,\ x^* \rangle,$$

とする。1点 a のみからなる集合 $\{a\}$ に対しては，

$$0 < a \iff O < \{a\},$$

である。

―― 非負多意作用素 ――

多意写像

$$T : C \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow C$$

が次の条件を満たす時，T を**非負多意作用素**と呼ぶ。

(LM－1) $\forall x \in C:\quad T(x) \in \mathscr{C}$.

(LM－2) $\forall x,\ x' \in C:\quad T(x + x') \supset T(x) + T(x')$.

(LM－3) $\forall \alpha \geqq 0,\ \forall x \in C:\quad T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

(LM－4) $T(0) = O$.

(LM－5) T のグラフ $G(T)$ は閉集合である。

また，$A \subset C$ に対して，

$$T(A) = \bigcup_{x \in A} T(x).$$

と書く。さらに，

$$\mathrm{dom}(T) = \{x \mid T(x) \neq \varnothing\},\ \mathrm{range}(T) = T(C)$$

とおく。

非負作用素の全体を$\mathscr{N}$で表す。$\mathscr{N}$の元の中で，$\mathrm{dom}(T)=C$となるものを**本質的な非負作用素**といい，その全体を$\mathscr{N}^p$で表す。

$\mathscr{N}$の元の間に次のような算法を導入する。

$$\forall\alpha,\ \beta\geqq 0,\ \forall x\in C:\ (\alpha S+\beta T)x=\alpha S(x)+\beta T(x).$$

$$\forall x\in C:\quad (ST)(x)=S(T(x)).$$

多意写像$T: C \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow C$に対して，その逆写像は

$$T^{-1}(y)=\{x\,|\,T(x)\ni y\},$$

と形式的に定義され，次が成り立っている。

$$\mathrm{dom}\ (T^{-1})\ =\mathrm{range}\ (T),\ \mathrm{range}\ (T^{-1})\ =\mathrm{dom}\ (T),$$

しかし，$T\in\mathscr{N}$の時，T^{-1}は必ずしも$\mathscr{N}$には属さない。それは，Tのグラフは$C\times C$における閉凸錐になるから，（LM－1）～（LM－5）のうちで，（LM－4）以外をT^{-1}が満たすことは明らかであるが，（LM－4）は必ずしも満たされないからである。また，T^{-1}が$\mathscr{N}^p$に属する為には，$\mathrm{range}(T)=C$となる事が必要十分な条件となる。

命題 2.1　$T\in\mathscr{N}$に対して次が成り立つ。

(1) $T^{-1}\in\mathscr{N}\iff T^{-1}(0)=O.$

(2) $T^{-1}\in\mathscr{N}^p\iff T^{-1}(0)=O,\ \mathrm{range}(T)=C.$

次に，$\mathscr{N}$の元の間の順序について考える。

$$S\leqq T\iff\forall x\in C;\quad S(x)\leqq T(x).$$

とする。明らかに次が成り立つ。

(1) $\forall S:\quad S\leqq S$

(2) $S\leqq T,\ T\leqq U\implies S\leqq U.$

(3) $\alpha\geqq 0,\ S\leqq T\implies \alpha S\leqq\alpha T.$

(4) $S\leqq T\implies S+U\leqq T+U.$

Cの任意の元xを$\{0\}$に写像する作用素をOで表せば，$O\in\mathscr{N}^p$であって，

$$O\leqq T\iff T\in\mathscr{N}^p$$

である。これは$\langle\emptyset,\ x^*\rangle=-\infty$という規約から導かれる。

C上の恒等作用素をIで表す。$\alpha\geqq 0$ならば$\alpha I\in\mathscr{N}^p$である。

また，

$$S<T \iff \forall x \in V:\ S(x)<T(x).$$

と定義する。このように定義すれば，

$$O<I$$

である。一般に，$O<T$となる作用素Tを**正多意作用素**という。

順序についてさらに考察を進める為に，次のような概念を導入する。

集合族$\mathscr{C}$に属する集合Aに対して，

$$A^{\wedge}=\{x \mid \exists y \in A:\ 0 \leqq x \leqq y\},$$

とする。任意の$u^* \in C^*$に対して，

$$\langle A,\ u^*\rangle = \langle A^{\wedge},\ u^*\rangle,$$

である。また，

$$0 \leqq x \iff \forall u^*:\ \langle x,\ u^*\rangle \geqq 0,$$

であるから次が成り立つ。

$$A \leqq B \iff A \subset B^{\wedge},$$

したがって，

$$A \leqq B,\ O \leqq T \implies T(A) \leqq T(B)$$

である。

定理 2.1 (1) $0 \leqq x \leqq y,\ O \leqq T \implies T(x) \leqq T(y).$

(2) $O \leqq T_1 \leqq T_2,\ O \leqq S \implies ST_1 \leqq ST_2,\ T_1S \leqq T_2S.$

〔証明〕 (1) $0 \leqq x \leqq y$という仮定より，

$$\exists z \geqq 0:\ x+z=y$$

したがって，

$$T(y)=T(x+z) \supset T(x)+T(z)$$

任意の$u^* \in C^*$に対して，

$$\begin{aligned}\langle T(y),\ u^*\rangle &\geqq \langle T(x)+T(z),\ u^*\rangle \\ &= \langle T(x),\ u^*\rangle + \langle T(z),\ u^*\rangle \\ &\geqq \langle T(x),\ u^*\rangle\end{aligned}$$

$\therefore\ T(x) \leqq T(y)$ Q. E. D.

(2) 仮定から，任意の$x \in C$に対して，

$$T_1(x) \subset (T_2(x))^{\wedge}$$

したがって，

$$S(T_1(x))\subset S((T_2(x))^\wedge)=\{S(T_2(x))\}^\wedge$$

$$\therefore\quad ST_1\leqq ST_2$$

また，$S(x)$に属する任意のyに対して，

$$T_1(y)\subset\{T_2(y)\}^\wedge$$

ところで，

$$\{T_2(S(x))\}^\wedge=\bigcup_{y\in S(x)}\{T_2(y)\}^\wedge$$

であるから，

$$T_1(S(x))\subset\{T_2(S(x))\}^\wedge$$

$$\therefore\quad T_1S\leqq T_2S$$

Q. E. D.

—— $\lambda I-T$について ——

本質的な非負作用素Tに対して，作用素$\lambda I-T$とは，

$$(\lambda I-T)(x)=\{y\mid y=\lambda x-z,\ \ z\in T(x)\}$$

によって定められる作用素である。

作用素の符号を調べるには，底V上で考えればよいが，$\lambda I-T$の性質を調べる為には，まず，次のことを確認しておく必要がある。

定理 2.2 $T\in\mathscr{N}$に対して，$T(V)$はノルム有界である。

〔証明〕 底に関する仮定より，Vはノルム有界であるから，順序有界でもある。したがって，正の元eが存在して，

$$\forall x\in V:\quad 0\leqq x\leqq e.$$

定理2.1より，

$$\forall x\in V:\quad 0\leqq T(x)\leqq T(e).$$

仮定から，$T(e)$はノルム有界であり，ノルム有界ということと，順序有界ということとは同値であるから，$T(V)$はノルム有界となる。 Q. E. D.

定理 2.3 $T\in\mathscr{N}^p$に対して，十分大きな正の数λをとれば$(\lambda I-T)^{-1}$が存在し，次の不等式が成り立つ。

$$\frac{1}{\lambda}I\leqq(\lambda I-T)^{-1}$$

また，もし$(\alpha I-T)^{-1}$が存在し$0<\alpha\leqq\beta$ならば，$(\beta I-T)^{-1}$も存在する。

〔証明〕 $(\lambda I-T)^{-1}$が存在することをいうには，命題2.1より，

$$\forall x\in V: \quad (\lambda I-T)(x)\not\ni 0$$

をいえばよい。定理2.2より，

$$\forall x\in V: \quad T\|(x)\|\leqq \gamma$$

となる正の数γが存在する。また，$x\in V$ならば$\|x\|>0$であるから，λを十分大きくとれば，

$$\|\lambda x\|=\lambda\|x\|>\gamma$$

と出来る。したがって，すべての$x\in V$に対し$(\lambda I-T)(x)\not\ni 0$である。

$$(\lambda I-T)^{-1}(x)\in y \iff x\in\lambda y-T(y)$$

したがって，

$$\lambda y=x+z, \ \exists z\in T(y)$$

任意の$u^*\in V^*$に対して

$$\langle y, u^*\rangle=\frac{1}{\lambda}\langle x+z, u^*\rangle\geqq\frac{1}{\lambda}\langle x, u^*\rangle$$

これから，

$$\frac{1}{\lambda}I\leqq(\lambda I-T)^{-1}$$

となる。また，$(\alpha I-T)^{-1}$が存在し，$0<\alpha\leqq\beta$とすると，$x\in V$に対し

$$(\beta I-T)(x)=(\beta-\alpha)x+(\alpha I-T)(x)$$

となるから，$\alpha\leqq\beta$ならば$(\beta I-T)^{-1}$が存在する事は明らかである。　Q. E. D.

―― 固有値について ――

一意写像に対する固有値の考えを，多意写像の場合に拡張することは一般には容易ではない。しかし，この論文で扱っているのは，非負多意作用素であるから，いわゆる Frobenius 根に相当するものだけを探求すればよい。

非負多意作用素Tに対して，

(1) $\quad Tx\ni\lambda x, \quad x\in V$

となるxが存在するようなλをTの**劣固有値** (sub-eigenvalue) と呼び，xをλに対応する**劣固有ベクトル** (sub-eigenvector) と呼ぶ。ここで，$x\in V$としたのは，もしxが$Tx\ni\lambda x$を満たすならば，正の数μに対して

$$T(\mu x)\ni\lambda(\mu x)$$

となるからであって，上の(1)の定義はVのとり方によらない。この$x\ni V$は，一意写像の場合の$x\neq 0$という条件に相当する。

定理 2.4 本質的な非負多意作用素には，非負の劣固有値が存在する。

〔証明〕 ある $x_0 \in V$ に対して，$T(x_0)=\{0\}$ となった場合には $\lambda=0$ とすればよいから，任意の $x \in V$ に対して $T(x)$ は半正の元を含むと仮定してよい。

$T(x)$ を含む最小の凸錐を $\mathrm{co}(T(x))$ で表すと，$T(x)$ は有界，閉，凸であるから，$\mathrm{co}(T(x))$ は閉凸錐となる。また，

$$S: \quad V \twoheadrightarrow V$$
$$x \mapsto\!\!\!\twoheadrightarrow \mathrm{co}(T(x)) \cap V$$

とおくと，S は閉写像となる。

したがって，角谷の不動点定理より，

$$S(x_0) \ni x_0$$

となる x_0 が存在する。ところが，

$$S(x_0)=\mathrm{co}(T(x_0)) \cap V$$

であるから，適当な正の数 λ をとると，

$$T(x_0) \ni \lambda x_0$$

となる。 Q. E. D.

作用素 T が正の多意作用素であるとは，

$$\forall x \in V: \quad O < T(x)$$

が成り立つことであるが，詳しくいうと，

$$\forall x \in V, \ \forall x^* \in V^*: \quad 0 < \langle T(x), x^* \rangle$$

が成り立つことである。したがって，正の作用素に対しては，$T(x)=O$，となるような $x \in V$ は存在しないから，定理2.4の証明より，次が成り立つことがわかる。

系 正の多意作用素には，正の劣固有値が存在する。

〔例1〕 $L=R^2$，$C=\{(x, y) \mid x \geqq 0, \ y \geqq 0\}$ とする。

$$K=\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leqq 1, \ x \geqq 0, \ y \geqq 0\}$$

とおく。平面上の点を一般に ξ，その座標を (x, y) とする。

$$T(\xi)=(x+y)K$$

とすると，T は正の多意作用素となる。この場合，任意の $\xi \in C$ に対して，

$$T(\xi)\in\lambda\xi$$

となるλが存在する。いまCの底として，

$$V=\{\xi\mid x+y=2\}$$

となる集合を考えると，

$$\forall\xi\in V:\quad T(\xi)=2K$$

であって，劣固有値は一意的に定まらない。不等式，

$$0\leqq\lambda\leqq\sqrt{2}$$

を満たすλは，いずれも劣固有値になる。

とくに，$\lambda=\sqrt{2}$に対する劣固有ベクトルを$\xi_{\sqrt{2}}$とすると，

$$\xi_{\sqrt{2}}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

である。$\lambda\leqq 1$のときは，λに対する劣固有ベクトルは，Vに属する任意のベクトルでよい。

―― 随伴作用素 ――

非負多意作用素Tと，$y^*\in C^*$に対して，

(2) $\forall x\in C:\ \langle T(x),\ y^*\rangle\leqq\langle x,\ z^*\rangle,\ z^*\in C^*,$

を満たすようなz^*の集合を$T^*(y^*)$と書き表す。

$$T^*:\quad C^*\twoheadrightarrow C^*$$

は，C^*上の多意作用素である。T^*をTの**随伴作用素** (adjoint operator) と呼ぶ。T^*は次の性質を持っている。

(AD―1) 任意の$y^*\in C^*$に対して，$T(y^*)$は閉凸集合で，

$$T(y^*)+C^*\subset T(y^*)$$

を満たす。

(AD―2) $\forall y_1^*,\ y_2^*\in C^*:\ T^*(y_1^*+y_2^*)\supset T(y_1^*)+T(y_2^*)$

(AD―3) $T^*(0)=C^*$

(AD―4) $0\cdot T^*(y^*)=C^*$と規約すれば，任意の$\alpha\geqq 0$に対して

$$\alpha T^*(y^*)=T^*(\alpha y^*)$$

(AD―5) T^*のグラフ$G(T^*)$は閉集合である。

随伴作用素については，次の公式が成り立つ。(Rockafellar〔8〕)

命題 2.2 (1) $(S+T)^*=S^*+T^*$　　(2) $(ST)^*=T^*S^*$

(3) $(\lambda T^*)=\lambda T^*\ (\lambda>0)$

随伴作用素に関して，

$$\langle x,\ T(y^*)\rangle=\inf_{z^*\in T(y^*)}\langle x,\ z^*\rangle$$

と定義すると，(2)より

$$\forall x,\ \forall y^*:\ \langle T(x),\ y^*\rangle=\langle x,\ T^*(y^*)\rangle$$

が成り立つ。

―― 単調過程 ――

非負作用素Tが，さらに次の条件を満たす時，Tを**単調過程**という。

$$(\text{LM}-6)\quad y\in T(x),\ 0\leqq z\leqq y\ \Longrightarrow\ z\in T(x).$$

これは，次のように簡単に述べることもできる。

$$T=T^{\wedge}$$

単調過程 (monotone process) という用語は，Rockafellar〔8〕による。

生産のモデルでいえば，yが生産可能ならば，$0\leqq z\leqq y$であるzも生産可能ということを意味するから，経済学的には（LM―6）は決して不自然な仮定ではないが，数学的にはかなり強い仮定であって，（LM―6）がないと通常の一意正作用素の性質を多意作用素の場合に拡張するのが難しい。

以下，正の単調過程Tの構造を調べる。

Tの劣固有値全体の集合をΛとおく。

$$\Lambda=\{\lambda\mid\exists\, x\in V:\ \lambda x\in T(x)\}$$

さらに，$\overline{\lambda}=\sup\Lambda$とする。

定理 2.5 $\overline{\lambda}$はTの正の劣固有値である。

〔証明〕 $\overline{\lambda}$はΛの上限であるから，Λの数列λ_kで，

$$\lim_{k\to\infty}\lambda_k=\overline{\lambda}$$

となるものがある。λ_kに対応する劣固有ベクトルをx_kとする。

$$\lambda_k x_k\in T(x_k),\ x_k\in V$$

Vはコムパクトだから，$\{x_k\}$は収束する部分列を含む。したがって，$\{x_k\}$自身が収束するとしても一般性は失われない。

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \bar{x}$$

とおくと，

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k x_k = \bar{\lambda}\,\bar{x}, \quad \lambda_k x_k \in T(x_k)$$

Tは閉作用素だから，

$$\bar{\lambda}\,\bar{x} \in T(\bar{x})$$

したがって，$\bar{\lambda}$はTの劣固有値である。また，Λの中には正のものがあるから，$\bar{\lambda} > 0$であることは明らか。　Q. E. D.

この$\bar{\lambda}$をTの**上限固有値**という。

〔例 2〕　Aを凸錐Cのコムパクト凸な部分集合で，$A=A^\wedge$，$O<A$を満たすものとする。正の線形関数f^*に対して，

$$T(x) = \langle x,\ f^* \rangle\ A$$

とおくと，これは正の単調過程になる。

例えば，$L=R^2$とし，

$$A=\{(x,\ y)\,|\,2x+y \leqq 2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$$

$$T(\xi)=(x+y)A$$

とする。また，

$$V=\{(x,y)\,|\,x+y=1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$$

とおく。

$T(V)=A$であり，Tの劣固有値は，

$$0 \leqq \lambda \leqq 2 \qquad \therefore\ \bar{\lambda}=2$$

$\lambda=2$に対応する劣固有ベクトルは，

$$\bar{x}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であって，必ずしも正とはならない。

作用素Tが正ということは，

(3) $\quad \forall x\in V,\ \forall x^*\in V^*:\quad 0<\langle T(x),\ x^*\rangle$

が成り立つということである。もし，$\mathrm{int}T(x)=\emptyset$とすると，$T(x)$は凸集合だから，$T(x)$はある超平面に含まれる。しかも，(LM—6）が満たされるとすれば，その超平面は原点を通るから，その方程式は，

$$\langle x,\ f^*\rangle=0,\ f^*\in V$$

という形に書ける。したがって，

$$\langle T(x),\ f^*\rangle=0,$$

となり，これは(3)に反する。したがって，

(4) $\quad \forall x\in V;\quad \mathrm{int}T(x)\neq\emptyset,$

となる。

いま，V上の点xを1つ固定し，$\mathrm{int}T(x)\ni u$とすると，$u>0$であるから，uは順序単位となり，〔10〕より，

$$0\leq x\leqq\mu u,\quad \mu>0,$$

となるμが存在する。したがって，(LM—6）より，

$$\frac{1}{\mu}x\in\{u\}^\wedge\subset T(x),$$

であるから，xは劣固有値$\frac{1}{\mu}$に対応する劣固有ベクトルとなる。すなわち，底Vに含まれる任意のベクトルは劣固有ベクトルである。

また，(LM—6）が満たされる場合には，

$$0\leqq\lambda\leqq\overline{\lambda}$$

を満たす任意のλは劣固有値になる。

上限固有値$\overline{\lambda}$の性質についてもう少し深く考察しよう。

$$K(x,\ x^*)=\langle T(x),\ x^*\rangle=\langle x,\ T^*(x^*)\rangle$$

とおく。この値は，関数$\langle\cdot,\ x^*\rangle$の集合$T(x)$上における値の上限であり，関数$\langle x,\ \cdot\rangle$の集合$T^*(x^*)$上における値の下限となっている。

関数$K:\quad C\times C^*\longrightarrow\bar{R}$　は明らかに次の性質を持っている。

(i) $K(x+\tilde{x},\ x^*)\geqq K(x,\ x^*)+K(\tilde{x},\ x^*)$

(ii) $K(\alpha x,\ x^*)=\alpha K(x,\ x^*)\qquad(\alpha>0)$

(iii) $K(x,\ x^*+\tilde{x}^*)\leqq K(x,\ x^*)+K(x,\ \tilde{x}^*)$

(iv) $K(x,\ \alpha x^*)=\alpha K(x,\ x^*)\qquad(\alpha>0)$

さて，$x^*>0$を1つ固定すると，凸錐Cの底が定まる。それを$V(x^*)$と書く。

$$V(x^*)=\{x \mid \langle x,\ x^*\rangle=1,\ x\in C\}$$

同じように，$x>0$を1つ固定すると，凸錐C^*の底が定まる。それを$V(x)$と書く。

$$V(x)=\{x^* \mid \langle x,\ x^*\rangle=1,\ x^*\in C^*\}$$

いま，$x^*>0$を固定し，関数$K(x,\ x^*)$を$V(x^*)$上で考えると，これは，xに関する凸関数となる。そこで，次のようにおく。

$$\sup_{x\in V(x^*)} K(x,\ x^*)=\overline{\mu}(x^*)$$

$$\inf_{x^*>0}\overline{\mu}(x^*)=\inf_{x^*>0}\ \sup_{x\in V(x^*)} K(x,\ x^*)=\overline{\mu}$$

前ページの(iii)の性質から，これは次のように書ける。

$$\inf_{x^*>0}\ \sup_{x>0}\frac{K(x,\ x^*)}{\langle x,\ x^*\rangle}=\inf_{x^*>0}\ \sup_{x>0}\frac{\langle T(x),\ x^*\rangle}{\langle x,\ x^*\rangle}=\overline{\mu}$$

同じように，次のようにおく。

$$\inf_{x^*\in V(x)} K(x,\ x^*)=\underline{\mu}(x)$$

$$\sup_{x>0}\ \underline{\mu}(x)=\sup_{x>0}\ \inf_{x^*\in V(x)} K(x,\ x^*)=\underline{\mu}$$

前ページの(iv)から，

$$\sup_{x>0}\ \inf_{x^*>0}\frac{\langle T(x),\ x^*\rangle}{\langle x,\ x^*\rangle}=\underline{\mu}$$

関数$K(x,\ x^*)$は，xに関しては凹関数で，x^*に関しては凸関数であるから，上限と下限の性質より，次が成り立つ。

$$\underline{\mu}\leqq\overline{\mu} \tag{5}$$

次に，上限固有値$\overline{\lambda}$と，$\overline{\lambda}$に対応する劣固有ベクトル$\overline{x}$をとる。

$$T(\overline{x})\ni\overline{\lambda}\overline{x}$$

であって，$T(\overline{x})$は正の同次性を満たすから，$\overline{\lambda}\,\overline{x}$は$T(\overline{x})$の境界上にある。点$\overline{\lambda}\,\overline{x}$における閉凸集合$T(\overline{x})$の支持超平面を，

$$\langle x,\ \overline{x}^*\rangle=\langle\overline{\lambda}\,\overline{x},\ \overline{x}^*\rangle$$

とおくと，Tが（LM—6）を満たすならば$\overline{x}^*\geqq 0$であって，

$$\langle\overline{\lambda}\,\overline{x},\ \overline{x}^*\rangle=\langle T(\overline{x}),\ \overline{x}^*\rangle$$

が成り立っている。$\overline{x}^*$を$\overline{\lambda}$に対応する共役劣固有ベクトルという。

また，任意の$x^*\geqq 0$に対して，

$$\langle\overline{\lambda}\,\overline{x},\ x^*\rangle\leqq\langle T(\overline{x}),\ x^*\rangle$$

が成り立っている。これは$\overline{\lambda}\overline{x}\in T(\overline{x})$より導かれる。

いま，$\overline{\lambda}$に対応する$\overline{x}$，$\overline{x}^*$がともに正であると仮定すると，

$$\overline{\lambda}=\frac{\langle T(\overline{x}),\ \overline{x}^*\rangle}{\langle \overline{x},\ \overline{x}^*\rangle}\leqq\frac{\langle T(\overline{x}),\ x^*\rangle}{\langle \overline{x},\ x^*\rangle}$$

$$\therefore\quad \overline{\lambda}\leqq\mu$$

今度は，Tの随伴作用素T^*に関して考えると，

$$\langle\overline{\lambda}\overline{x},\ \overline{x}^*\rangle=\langle\overline{x},\ T^*(\overline{x}^*)\rangle$$

であり，任意の$x\geqq0$に対して，

$$\langle\overline{\lambda}\,x,\ \overline{x}^*\rangle\geqq\langle x,\ T^*(\overline{x}^*)\rangle$$

となるから，

$$\overline{\lambda}=\frac{\langle \overline{x},\ T^*(\overline{x}^*)\rangle}{\langle \overline{x},\ \overline{x}^*\rangle}\geqq\frac{\langle x,\ T^*(\overline{x}^*)\rangle}{\langle x,\ \overline{x}^*\rangle}$$

$$\therefore\quad \overline{\lambda}\geqq\overline{\mu}$$

(5)より，次が得られる。

定理 2.6 $\overline{\lambda}$ に対応する劣固有ベクトル $\overline{x}$ と，共役固有ベクトル $\overline{x}^*$ とに正のものがあれば，$\overline{\mu}=\underline{\mu}=\overline{\lambda}$である。

以下，簡単のために，定理2.6の仮定が満たされ，さらに，$\overline{x}$と$\overline{x}^*$とが長さを除いては一意的に定まるものとして，T^mについて考察する。

$$T\overline{x}\ni\overline{\lambda}\overline{x}$$

であるから，

$$T^m\overline{x}\ni(\overline{\lambda})^m\overline{x}\tag{6}$$

となる。

$\overline{\lambda}>1$の時は，$\lim_{m\to\infty}(\overline{\lambda})^m=\infty$になるから，$T^m\overline{x}$は$m$が増加するにいくらでも長さが大きくなるベクトルを含んでいる。

$\overline{\lambda}<1$の時は，$\underline{\mu}<1$となるから，$\overline{\lambda}<\nu<1$となるνをとると，

$$\forall x<0,\ \exists x^*>0:\quad\langle T(x),\ x^*\rangle\leqq\nu\ \langle x,\ x^*\rangle$$

これより，

$$\langle T^m(x),\ x^*\rangle\leqq\nu^m\ \langle x,\ x^*\rangle$$

$x^*>0$であるから，$x>0$を固定した時，

$$W=\{y\geqq0\mid\langle y,\ x^*\rangle\leqq\langle x,\ x^*\rangle\}$$

とおくと，この不等式は，

$$T^m(x)\subset\nu^mW$$

ということを意味する。したがって，$m\to\infty$のとき，$T^m(x)$に含まれるすべての点は0に収束する。

最後に$\bar{\lambda}=1$の場合を考える。

$$\langle T(\bar{x}),\ \bar{x}^*\rangle = \langle \bar{x},\ \bar{x}^*\rangle$$

$$\inf_{x^*>0}\ \sup_{x>0}\frac{\langle T(x),\ x^*\rangle}{\langle x,\ x^*\rangle}=\sup_{x>0}\ \inf_{x^*>0}\frac{\langle T(x),\ x^*\rangle}{\langle x,\ x^*\rangle}=1$$

である。

T^*の行動は，ある底の上で考えればよいから，底として，

$$\bar{V}=\{x\geqq 0 \mid \langle x,\ \bar{x}^*\rangle=1\}$$

をとる。

仮定から，$x\in T(\bar{x})$，$x\neq\bar{x}$

$$\langle x,\ \bar{x}^*\rangle<1$$

である。また，$x_0\neq\bar{x}$，$x_0\in\bar{V}$とし，$x\in T(x_0)$，$x\neq\bar{x}$としても，やはりこの不等式は成り立たなくてはならない。それは，$\bar{x}$が長さを除いて一意的に決まるという仮定からの帰結である。

さて，次のような写像を考えてみる。

$$P:\quad C\ \longrightarrow\ C$$
$$x\ \longmapsto\ \langle x,\ \bar{x}^*\rangle\ \bar{x}$$

このPは$P^2=P$を満たすから$\bar{x}$を方向ベクトルとし原点を通る直線上への射影である。底$\bar{V}$上で考えると，Pは$\bar{V}$上の任意の点を$\bar{x}$に写す写像である。多意写像Tを分解して，

$$T=P+Q$$

とおく。$x\in\bar{V}$に対して，

$$T(x)=P(x)+Q(x)=\bar{x}+Q(x)$$

である。

もし，$T(x)\not\ni\bar{x}$ならば，

$$\langle T(x),\ \bar{x}^*\rangle<1$$

となるから，

$$\langle T(x),\ \bar{x}^*\rangle\leqq\nu<1$$

となるνをとれば，Tの正同次性より，

$$\langle T^m(x),\ \bar{x}^*\rangle\leqq\nu^m$$

となり，$m\to\infty$のとき，$T^m(x)$の各点はすべて0に収束する。

もし，$T(x)\ni\bar{x}$ならば，$T(\bar{x})\ni\bar{x}$だから，

$$T^m(x)\ni\bar{x}$$

であり，$T(x)$の$\bar{x}$以外の点uは，いずれも$\langle u,\ \bar{x}^*\rangle<1$を満たすから0に近づく。

以上のような意味から，

$$T^m = P + Q(m)$$

とおくと，PがT^mの主要部分と考えられる。

この論文で扱った，非負多意作用素は，一意写像の意味の非負作用素の拡張である。一意写像の場合には，行列で表現できるが，それでもかなり面倒である。多意写像の場合には，現在の時点では，解決しなければならない問題はまことに多い。特に，多意作用素を具体的に表現する手段がない事が，問題の取り扱いを難しくしているのである。

REFERENCES

〔1〕 Gantmacher, F. R.: *The Theory of Matrices*, vol. 2 (Chelsea Publishing Co., New York, 1959).

〔2〕 Karlin, S.: *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics*, vol. 1 (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1960).

〔3〕 Karlin, S.: Positive Operators, J. of Math. and Mech., vol. no. 6 (1959), 907～937.

〔4〕 Dunford, N. and Schwarz, J.: *Linear Operators*. Part 1, General Theory. (Interscience Publishers, Inc., New York, 1958).

〔5〕 Schaefer, H.: Spectral measures in locally convex algebras, Acta. Math. 107 (1962), 125～173.

〔6〕 Schaefer, H.: Convex cones and spectral theory, Proc. of Symposia in Pure Math. vol. 7, (1963), 451～471.

〔7〕 Schaefer, H.: *Banach Lattices and Positive Operators*, (Springer-Verlag, Berlin, 1974).

〔8〕 Rockafellar, R. T.: *Monotone Processes of Convex and Concave Type*, Memoirs of the Am. Math. Soc. no. 77, (1967).

〔9〕 Rockafellar, R. T.: Convex algebra and duality in dynamic models of production, in "Mathematical models in economics,".

〔10〕 渡部隆一： 多意写像の凸性について（その3），「三田学会雑誌」72巻5号

〔11〕 渡部隆一： 多意写像の不動点定理について，「日吉論文集」（自然科学編）14, 1977, 1～22.

（法学部助教授）