Title	不動点定理とその周辺
Sub Title	Fixed point theorems in nonlinear functional analysis
Author	高橋, 渉
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1980
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.73, No.1 (1980. 2) ,p.32- 68
JaLC DOI	10.14991/001.19800201-0032
Abstract	
Notes	小特集 経済学と函数解析 論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19800201-0032

不動点定理とその周辺

高橋　渉

§0. はじめに

函数解析学は，数学の中でも応用性の最もある学問である。その中でも，最近特に脚光を浴びているのが非線形函数解析学といわれる新しい分野である。これまでの函数解析学は線形作用素とその応用が中心的課題であって，種々の分野で発生する非線形な問題を解決するまでには至らなかった。しかしながら，最近不動点定理の急速な発展に伴い，非線形作用素とその周辺がかなり盛んに研究されるようになり，一つの学問を形成するに至った。これが非線形函数解析学である。

ここでは，この非線形函数解析学において本質的役割りを演じている不動点定理と，その周辺について論じてみたいと思う。

Xを与えられた集合とし，TをXからXへの写像とするとき，$Tx=x$なる点xをTの不動点という。この概念をさらに拡張してTをXから2^X（Xの部分集合の全体）への写像とするとき，$x \in Tx$なる点xをやはりTの不動点と呼んでいる。この不動点に関する定理がいわゆる不動点定理である。これは形が単純であるがゆえに応用性も広く種々の分野で有効に用いられている。また最近では，この不動点に対するアルゴリズムも盛んに研究されており，有用で興味ある結果がいくつか出されている。

第1節では，非線形作用素（特に nonexpansive 写像と monotone 写像）を論ずるに必要な Hilbert 空間の性質と nonexpansive 写像に対する2つの不動点定理が述べられている。第2節では，非線形エルゴード定理が証明される。これは非線形函数解析学の最近の話題となっているところである。ここでは，1975年に Baillon〔2〕によってはじめて証明された非線形エルゴード定理を一般な形に直し，かつまた簡単に証明している。第3節では凸解析などによく表われる monotone 写像の一般論について述べている。特に maximal monotone 写像は沢山の興味ある性質をもっており，非線形問題を考えるにあたっては重要な道具となる。ここでは maximal monotone 写像の性質と nonexpansive semigroup の関係を明らかにしている。第4節では，nonexpansive semigroup の不動点定理とその漸近的挙動について論じられている。その証明に際しては maximal monotone 写像の理論が有効に使われる。第5節は，これまでの理論の応用として，凸計画等によ

く表われる凸函数について論じられている。凸計画問題では凸函数が重要な役割りを演ずるが，凸函数にある条件を加えると，その函数の subdifferential が maximal monotone 写像になることが示される。それゆえ，凸計画の解の研究は nonexpansive semigroup の不動点の研究に置きかえられる。第6節では，位相線形空間のコンパクト凸集合上での基本定理がいくつか証明されている。まず Brouwer の不動点定理と単位の分割定理を用いて応用性のある Fan-Browder の不動点定理〔8〕を証明し，それを用いていくつかの使いやすい存在定理を得ている。特に Fan〔16〕の凸不等式のシステムに関する定理は種々の分野で有効となる〔20〕,〔40〕,〔47〕,〔48〕。第7節では，前節で証明した存在定理を用いて Tychonoff の不動点定理と Schauder の不動点定理の拡張を得，さらに Fan の minimax 定理〔14〕と Sion の minimax 定理〔42〕を簡単に証明する。また Fan の多価写像の不動点定理〔14〕を用いて興味ある存在定理を2，3証明する。第8節では，数理計画やゲームの理論，経済均衡論等によく表われる変分不等式と相補性問題の定理が論じられる。ここではまず初めに変分不等式の解と相補性問題の解の関係が明らかにされ，そのあと変分不等式と相補性問題に関する定理がかなり一般的な形で証明されている。第9節では，Fan の凸不等式のシステム定理〔15〕,〔16〕,〔40〕を用いて，ゲームの core に関する Schmeidler〔41〕と Kannai〔24〕による定理が証明される。

§1. nonexpansive 写像の不動点定理

この節では，nonexpansive 写像に関する不動点定理を証明する。

E を実 Banach 空間とし，C を E の閉で凸な部分集合とする。C から E への写像 T が nonexpansive であるとは，C の任意の元 x と y に対して

$$\|Tx-Ty\|\leq\|x-y\|$$

がつねに成り立つときをいう。また，C から E の dual 空間 E^* への写像 U が monotone であるとは，C の任意の元 x と y に対して

$$\langle Tx-Ty,\ x-y\rangle\geq 0$$

がつねに成り立つときをいう。ここで $\langle f, x\rangle$ は $f\in E^*$ の $x\in E$ における値 $f(x)$ を表わすものとする。写像 $T: C\to C$ に対して，C 上の写像 $S_n(n=1, 2, 3, \ldots\ldots)$ は

$$S_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}T^kx$$

で定義される。nonexpansive 写像 T の不動点定理は一般には Banach 空間で論じられているが，その写像に対する漸近的挙動を論ずるときは Hilbert 空間 H の方が都合が良いので，§1～§5 ではその空間の場合を主に取り扱う。まずよく知られた Hilbert 空間での性質を2つほど証明なしで述

べておこう。

補助定理 1　CをHilbert空間Hの空でない閉で凸な集合とし，$x\in H$とする。そのとき

$$\|z-x\|=\min_{y\in C}\|y-x\|$$

となるようなCの元zが一意に存在する。

このzをPxとおくと，PはHからCの上への $P^2=P$ なる nonexpansive 写像であり，次の性質をも満たしている。

(1)　すべての$y\in C$に対して，

$$\langle x-Px, Px-y\rangle \geq 0.$$

(2)　x_nがx_0に弱収束し，Px_nがy_0に強収束するならば$Px_0=y_0$である。

上の補助定理における写像PはCの上への metric projection といわれ，また(2)の性質をもっている写像は demiclosed であるといわれている。すなわち，一般に写像$T: C\to E$が demiclosed であるとは，$x_n\rightharpoonup x_0$, $Tx_n\to y_0$ならば$Tx_0=y_0$であるときをいう。記号“$\rightharpoonup$”は弱収束を，“$\to$”は強収束を表わすものとする。

補助定理 2　Hilbert空間Hにおいて，$\{x_n\}$がx_0に弱収束し，$x_0\neq y$ならば

$$\varliminf_{n\to\infty}\|x_n-x_0\| < \varliminf_{n\to\infty}\|x_n-y\|$$

が成り立つ。

補助定理2はOpial〔34〕によって得られたもので，これはOpialの条件といわれている。

最初の不動点定理を証明しよう。

定理 1　CをHilbert空間Hの閉で凸な集合とし，TをCからCへのnonexpansive写像とする。そのとき，次の条件(1)と(2)は同値である。

(1)　Tの不動点の集合$F(T)$は空でない。

(2)　Cのある元xに対して$\{T^nx : n=0,1,\cdots\cdots\}$は有界である。

このとき，$F(T)$は閉で凸な集合となる。

証明　(1)⇒(2)はxとしてTの不動点をとれば明らかである。

(2)⇒(1)　xを(2)の条件をみたすCの点とする。任意の$y\in C$に対して，

$$\begin{aligned}0&\leq\|T^kx-y\|^2-\|T^{k+1}x-Ty\|^2\\&=\|T^kx-Ty\|^2+2\langle T^kx-Ty, Ty-y\rangle\end{aligned}$$

$$+\|Ty-y\|^2-\|T^{k+1}x-Ty\|^2$$

である。上の式を $k=0$ から $k=n-1$ まで加えて n でわると，

$$0\leq\frac{1}{n}\|x-Ty\|^2+2\ \langle S_nx-Ty,Ty-y\rangle+\|Ty-y\|^2$$

となる。$\{T^nx\}$ が有界なので，$\{S_nx\}$ は有界となる。有界集合は弱コンパクトなので，$\{S_nx\}$ の部分列で C の元 p に弱収束するものがあるから，上の不等式はこの p に対して，

$$0\leq 2\ \langle p-Ty,Ty-y\rangle+\|Ty-y\|^2$$

となる。$y=p$ とすると，$Tp=p$ であることがわかる。これで(2)⇒(1)が証明された。

つぎに $F(T)$ が閉で凸であることを示す。

$x_n\to x_0$，$x_n\in F(T)$ とすると T の連続性より

$$x_0=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}Tx_n=Tx_0$$

となり，$x_0\in F(T)$ がわかる。ゆえに $F(T)$ は閉である。x，$y\in F(T)$ とする。α，$\beta\geq 0$，$\alpha+\beta=1$ とし，$z=\alpha x+\beta y$ とするとき，

$$\|Tz-x\|\leq\|z-x\|,\ \|Tz-y\|\leq\|z-y\|$$

であり，さらに

$$\|x-y\|\leq\|x-Tz\|+\|Tz-y\|$$
$$\leq\|x-z\|+\|z-y\|=\|x-y\|$$

であるから，$\|x-Tz\|=\|x-z\|$，$\|y-Tz\|=\|y-z\|$ をうる。Hilbert 空間は strictly convex なので $Tz=z$ をうる。だから $F(T)$ は凸である。（証了）

上の定理によって，C が有界なとき T の不動点はいつでも存在するのである。

定理 2　C を Hilbert 空間 H の有界で閉な凸集合とし，T を C から C への nonexpansive な写像とする。また P を $F(T)$ 上への metric projection とするとき，次の(1)と(2)が成立する。

(1)　任意の $x_0\in C$ に対して，C から C への写像 T_n を

$$T_nx=\left(1-\frac{1}{n}\right)Tx+\frac{1}{n}x_0\quad(n=2,3,\cdots\cdots)$$

とすると，T_n は一意の不動点 u_n をもつ。

(2)　$n\to\infty$ としたとき，この u_n は Px_0 に強収束する。

証明　(1)　$n\geq 2$ とし，$x,y\in C$ とする。

$$\|T_nx-T_ny\|\leq\left(1-\frac{1}{n}\right)\|x-y\|$$

より，T_n は C 上の縮小写像であることがわかる。それゆえ，T_n の不動点 u_n が一意に存在する。これで(1)が示された。

(2) $\{u_{n_i}\}$ を $\{u_n\}$ の任意の部分列とする。そのとき，$\{u_{n_i}\}$ の部分列で $u_0=Px_0$ に強収束するものを見つければよい。いま $v_i=u_{n_i}$ としよう。$\{v_i\}$ は有界なので $\{v_i\}$ の部分列で C の元 v に弱収束するものがある。このとき，一般性を失うことなしで v_i が v に弱収束すると仮定してもよい。この v が T の不動点であることは後で証明するとして，v_i が u_0 に強収束することを示そう。任意の i に対して v_i は T_{n_i} の不動点であるので

$$\frac{1}{n_i}v_i+\left(1-\frac{1}{n_i}\right)(v_i-Tv_i)=\frac{1}{n_i}x_0$$

であり，また u_0 は T の不動点なので

$$\frac{1}{n_i}u_0+\left(1-\frac{1}{n_i}\right)(u_0-Tu_0)=\frac{1}{n_i}u_0$$

である。$U=I-T$ とすると

$$\frac{1}{n_i}\langle v_i-u_0,\ v_i-u_0\rangle+\left(1-\frac{1}{n_i}\right)\langle Uv_i-Uu_0,\ v_i-u_0\rangle$$
$$=\frac{1}{n_i}\langle x_0-u_0,\ v_i-u_0\rangle$$

となり，U は monotone なので，

$$\frac{1}{n_i}\|v_i-u_0\|^2\leq\frac{1}{n_i}\langle x_0-u_0,\ v_i-u_0\rangle$$

となり，

$$\begin{aligned}\|v_i-u_0\|^2&\leq\langle x_0-u_0,\ v_i-u_0\rangle\\&=\langle x_0-u_0,\ v-u_0\rangle+\langle x_0-u_0,\ v_i-v\rangle\end{aligned}$$

をうる。$u_0=Px_0$ なので $\langle x_0-u_0,\ v-u_0\rangle\leq 0$ であるから

$$\|v_i-u_0\|^2\leq\langle x_0-u_0,\ v_i-v\rangle$$

をうる。v_i は v に弱収束するから，v_i は u_0 に強収束することがわかる。さて v が T の不動点であることを示す。いま $v\neq Tv$ とすると補助定理2より

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty}\|v_i-v\|&<\varliminf_{n\to\infty}\|v_i-Tv\|\\&=\varliminf_{n\to\infty}\|Tv_i-Tv\|\\&\leq\varliminf_{n\to\infty}\|v_i-v\|\end{aligned}$$

となり，矛盾を得る。それゆえ $Tv=v$ である。　(証了)

上の定理は Browder〔7〕によって証明されたものである。

§2. 非線形エルゴード定理

非線形エルゴード定理を証明する上で次の補助定理は本質的な役割りを演ずる。

補助定理 3 Cを Hilbert 空間Hの閉で凸な集合とし，TをCからCへの nonexpansive 写像とする。$F(T)\neq\phi$を仮定し，Pを$F(T)$ 上への metric projection とする。そのとき，任意の$x\in C$に対して，$PT^n x$は強収束する。

証明 $x\in C$とする。Pが$F(T)$ 上への metric projection であることより

$$\begin{aligned}\|PT^n x-T^n x\| &\leqq \|PT^{n-1}x-T^n x\|\\ &=\|TPT^{n-1}x-T^n x\|\\ &\leq \|PT^{n-1}x-T^{n-1}x\|\end{aligned}$$

となる。それゆえ，$\{\|PT^n x-T^n x\|\}$ は単調減少列であることがわかる。さらにCの元vと$F(T)$の元uに対してPの性質より

$$\langle v-Pv,\ Pv-u\rangle\geq 0$$

である。すなわち

$$\|v-Pv\|^2\leqq\langle v-Pv,\ v-u\rangle$$

となる。それゆえ，

$$\begin{aligned}\|Pv-u\|^2&=\|Pv-v+v-u\|^2\\ &=\|Pv-v\|^2-2\ \langle Pv-v,\ u-v\rangle+\|v-u\|^2\\ &\leqq\|v-u\|^2-\|Pv-v\|^2\end{aligned}$$

となる。いま$v=T^{n+k}x$, $u=PT^n x$とおくと

$$\begin{aligned}&\|PT^{n+k}x-PT^n x\|^2\\ &\leq\|T^{n+k}x-PT^n x\|^2-\|PT^{n+k}x-T^{n+k}x\|^2\\ &\leq\|T^n x-PT^n x\|^2-\|PT^{n+k}x-T^{n+k}x\|^2\end{aligned}$$

となり，$\{\|T^n x-PT^n x\|\}$ が単調減少であることより，$\{PT^n x\}$ は Cauchy 列になることがわかる。それゆえ$PT^n x$は強収束する。 （証了）

これを用いて，Baillon の非線形エルゴード定理〔2〕が簡単に証明できる。

定理 3 Cを Hilbert 空間Hの閉で凸な集合とし，TをCからCへの nonexpasive な写像とする。そのとき，次の条件(1)と(2)は同値である。

(1)　$F(T) \neq \phi$。

(2)　任意の $x \in C$ に対して，

$$S_n x = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k x$$

は弱収束する。

このとき，$x \in C$ に対して

$$Qx = w - \lim S_n x$$

とおくと，Q は C から $F(T)$ の上への $Q^2 = Q$ なる nonexpansive 写像で，$QT = TQ = Q$ をみたしている。

証明　(1)⇒(2)　$x \in C$ とする。補助定理3より，$PT^n x$ は $F(T)$ の元 p に強収束する。$\{S_n x\}$ は有界であるから，その部分列で弱収束するものがある。そこでいまそのような部分列の極限がすべて p であることがいえれば(2)が証明されたことになる。$u \in F(T)$ に対して，P の性質から

$$\langle T^k x - PT^k x,\ PT^k x - u\rangle \geq 0$$

をうる。これと $\{\|T^k x - PT^k x\|\}$ が単調減少であることを用いると，

$$\begin{aligned}\langle u - p,\ T^k x - PT^k x\rangle &\\ &\leq \langle PT^k x - p,\ T^k x - PT^k x\rangle\\ &\leq \|PT^k x - p\|\|T^k x - PT^k x\|\\ &\leq \|PT^k x - p\|\|x - Px\|\end{aligned}$$

をうる。上の式を $k=0$ から $k=n-1$ まで加えて n でわると，

$$\langle u - p,\ S_n x - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} PT^k x\rangle \leq \frac{\|x - Px\|}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\|PT^k x - p\|$$

となる。$PT^k x$ が p に強収束することより，もし，$S_{n_k} x$ が v に弱収束すると仮定すると

$$\langle u - p,\ v - p\rangle \leq 0$$

をうる。定理1の証明からわかるように $v \in F(T)$ なので $u = v$ とおくと，$v = p$ をうる。

(2)⇒(1) は $S_n x$ が弱収束するという仮定を使えば，定理1の証明とまったく同様にできるので省略する。つぎに定理の後半を証明する。$x, y \in C$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle S_n x - S_n y,\ Qx - Qy\rangle &\leq \|S_n x - S_n y\|\|Qx - Qy\|\\ &\leq \|x - y\|\|Qx - Qy\|\end{aligned}$$

であるから，$n \to \infty$ とすると，

$$\|Qx - Qy\|^2 \leq \|x - y\|\|Qx - Qy\|$$

をうる。これは Q が nonexpansive であることを意味する。また任意の $x \in C$ に対して，

$$S_n T x - S_n x = \frac{1}{n}(T^n x - x)$$

であるから，$n\to\infty$とすると，$QTx-Qx=0$となり$QT=Q$をうる。$TQ=Q$は明らか。　（証了）

上の定理では $\{T^n x\}$ の Cesàro mean，すなわち$S_n x$の収束性を問題にしたが，$T^n x$ それ自身の収束性はどうなっているのであろうか。次の定理はそれに答えるものである。

定理 4　Cを Hilbert 空間 H の閉で凸な集合とし，TをC上の nonexpansive な写像とする。そのとき，$x\in C$に対して次の条件(1)と(2)は同値である。

(1)　$T^n x$ が弱収束する。

(2)　$F(T)\neq\phi$であり，かつ $\{T^n x\}$ の部分列 $\{T^{n_i}x\}$ が y に弱収束するなら，$y\in F(T)$ である。

証明　(1)⇒(2)　$T^n x\rightharpoonup x_0$としよう。そのとき$Tx_0=x_0$である。なぜなら，$Tx_0\neq x_0$とすると，補助定理 2 より

$$\varliminf_{n\to\infty}\|T^n x-x_0\|<\varliminf_{n\to\infty}\|T^n x-Tx_0\|$$

$$\leq\varliminf_{n\to\infty}\|T^{n-1}x-x_0\|=\varliminf_{n\to\infty}\|T^n x-x_0\|$$

となり，これは矛盾である。

(2)⇒(1)　$F(T)$ は空でないから，$\{T^n x\}$ は有界である。それゆえその部分列 $\{T^{n_i}x\}$ でCの元yに弱収束するものがある。一方 $F(T)$ 上への metric projection をPとすると，補助定理 3 より，$PT^n x$ は$F(T)$の元zに強収束する。P は demiclosed である（補助定理 1）から $Py=z$をうる。ところが仮定より $y\in F(T)$ であるので$y=z$をうる。これは $\{T^n x\}$ がzに弱収束することを意味する。　（証了）

この定理を用いると，Opial の定理〔34〕が系として得られる。その前に次の補助定理を証明しておく。

補助定理 4　Cを Hilbert 空間Hの閉で凸な集合とし，TをCからHへの nonexpansive な写像とする。そのとき，$I-T$は demiclosed である。

証明　$x_n\rightharpoonup x_0$とし，$(I-T)x_n\to y_0$とする。そのとき，$(I-T)x_0=y_0$ をいえばよい。もし，$x_0\neq y_0+Tx_0$とすると，

$$\varliminf_{n\to\infty}\|Tx_n-Tx_0\|\leq\varliminf_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|$$

$$<\varliminf_{n\to\infty}\|x_n-(y_0+Tx_0)\|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\|x_n-Tx_n-y_0+Tx_n-Tx_0\|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\|Tx_n-Tx_0\|$$

となり，矛盾をうる。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証了)

系1　Cを Hilbert 空間Hの閉で凸な集合とし，TをCからCへの nonexpansive な写像とする。もし，$F(T)\neq\phi$で，$x\in C$に対して，$T^nx-T^{n+1}x\to 0$ $(n\to\infty)$ なら，T^nxは$F(T)$ の元に弱収束する。

証明　定理4の(2)を示すためには $F(T)\neq\phi$ なので，$T^{n_i}x\rightharpoonup y$と仮定して$y\in F(T)$ をいえばよい。仮定より，

$$T^nx-T^{n+1}x=(I-T)T^nx\to 0$$

であるので，補助定理4を使うと $(I-T)y=0$をうる。すなわち$Ty=y$ である。　　(証了)

n次元ユークリッド空間では弱収束することと強収束することが一致するので，S_nx やT^nx の弱収束性はすべて強収束性にかわる。

現在ではS_nx の弱収束性は同じ仮定のもとで，Fréchet differentiable ノルムをもつ一様凸な Banach 空間のときにまで保証されているが (Bruck [10], Reich [38] をみよ)，Tの不動点の存在はもっと一般的な Banach 空間のときにでも証明できる (Browder [6], Kirk [28], Lim [31] をみよ)。

§3. Maximal monotone 写像

この節では maximal monotone 写像について論じる。この非線形写像は nonexpansive 写像と並んで重要なものである。

Hを実 Hilbert 空間とし，$A\subset H\times H$としよう。そのとき，$x\in H$に対して，

$$Ax=\{y\in H:(x,y)\in A\}$$

によって，Hから2^Hへの写像Aが定義されるが，逆にHから2^Hへの写像によって$H\times H$の部分集合も定義できるので，$H\times H$の部分集合を考えることと，Hから2^Hへの写像を考えることとは同値である。$A\subset H\times H$に対して，

$$D(A)=\{x\in H:Ax\neq\phi\},$$

$$R(A)=\cup\{Ax:x\in D(A)\}$$

でAの定義域，Aの値域を表わすことにしよう。$A^{-1}(y)$ は集合 $\{x\in H:y\in Ax\}$ のことであ

る。$B\subset H\times H$がAの拡張であるとは$D(A)\subset D(B)$ でかつ $Ax\subset Bx$ が成り立つことである。

$A\subset H\times H$が monotone であるとは，(x_1, y_1)，$(x_2, y_2)\in A$に対してつねに

$$\langle x_1-x_2, y_1-y_2\rangle \geq 0$$

が成立するときをいう。monotone 集合Aが$H\times H$のどんな monotone 集合の中にも真に含まれないときmaximal monotone であるといわれる。ツォルンの補題[1]を使うと maximal monotone 集合の存在が保証される。maximal monotone 集合に対しては次の重要な定理が成り立つ。

定理 5　Aを monotone とする。そのとき，Aが maximal monotone である必要十分条件は $R(I+A)=H$ が成り立つことである。このとき，すべての$\lambda>0$に対して $R(I+\lambda A)=H$ ともなる。ただし，Iは恒等写像を表わす。

Aが maximal monotone であるとき，Aの resolvent といわれるHから$D(A)$ への写像

$$J_\lambda=(I+\lambda A)^{-1}\quad(\lambda>0)$$

とAの Yosida approximation といわれる

$$A_\lambda=\frac{1}{\lambda}(I-J_\lambda)\quad(\lambda>0)$$

が定義されるが，J_λ，A_λ については次の性質が成り立つ。

補助定理 5　$A\subset H\times H$を maximal monotone とし，$\lambda>0$とする。そのとき次の性質が成立する。

(1) J_λは一価写像であり，x，$y\in H$に対して $\|J_\lambda x-J_\lambda y\|\leq\|x-y\|$ である。

(2) A_λは monotone であり，x，$y\in H$に対して $\|A_\lambda x-A_\lambda y\|\leq\frac{1}{\lambda}\|x-y\|$ である。

(3) $x\in H$に対して，$A_\lambda x\in AJ_\lambda x$ である。さらに，$x\in D(A)$ に対して

$$\|A_\lambda x\|\leq\|A^0x\|=\inf\{\|y\| : y\in Ax\}.$$

(4) $x\in\overline{D(A)}$ に対して，$\lim_{\lambda\to 0}J_\lambda x=x$.

(5) $x\in D(A)$ に対して，$\lim_{\lambda\to 0}A_\lambda x=A^0x$.

ただし，A^0xはAxの最小ノルムの元である。

(6) ある数列$\lambda_n\to 0$に対して

$$x_{\lambda_n}\to x_0,\ A_{\lambda_n}x_{\lambda_n}\rightharpoonup y_0 \text{ ならば } (x_0, y_0)\in A.$$

証明　(1)，(2)　$\lambda>0$とし，$(x_i, y_i)\in A\ (i=1, 2)$ としよう。そのとき，

$$\begin{aligned}&\|x_1+\lambda y_1-(x_2+\lambda y_2)\|^2\\ &=\|x_1-x_2\|^2+2\lambda\langle x_1-x_2, y_1-y_2\rangle+\lambda^2\|y_1-y_2\|^2\end{aligned}$$

$$\geq \|x_1-x_2\|^2+\lambda^2\|y_1-y_2\|^2$$

より，J_λ と A_λ は一価写像であり，

$$\|J_\lambda x-J_\lambda y\|\leq\|x-y\|,$$

$$\|A_\lambda x-A_\lambda y\|\leq\frac{1}{\lambda}\|x-y\|$$

であることがわかる。A_λ が monotone であることは明らかである。

(3) 定義によって，$x\in H$に対して

$$A_\lambda x\in\frac{1}{\lambda}((I+\lambda A)J_\lambda x-J_\lambda x)=AJ_\lambda x$$

である。$J_\lambda=\{(x+\lambda y, x):(x, y)\in A\}$ なので，$x\in D(A)$ に対して $A_\lambda x=\frac{1}{\lambda}\{J_\lambda(x+\lambda y)-Jx\}$ であり，それゆえ，

$$\|A_\lambda x\|=\frac{1}{\lambda}\|J_\lambda(x+\lambda y)-Jx\|$$
$$\leq\frac{1}{\lambda}\|x+\lambda y-x\|=\|y\|.$$

(4) Aは maximal monotone なので，すべての $x\in D(A)$ に対して Ax はHの閉で凸な集合となる。それゆえ Ax の中に最小ノルムをとる A^0x が存在し，それは一意である。すべての $x\in D(A)$ に対して $\|J_\lambda x-x\|\leq\lambda\|A^0x\|$ であり，J_λ は nonexpansive なので，$x\in\overline{D(A)}$ に対しても $\lim_{\lambda\to 0}\|J_\lambda x-x\|=0$ であることがわかる。

(5) $x\in D(A)$ とし，$y_n=A_{\lambda_n}x$ を $y_n\rightharpoonup y$ となるような点列としよう。A_λ は monotone なので

$$\langle y_n-v, J_{\lambda_n}x-u\rangle\geq 0, (u, v)\in A.$$

となる。それゆえ

$$\langle y-v, x-u\rangle\geq 0, (u, v)\in A.$$

Aは maximal monotone なので，$y\in Ax$ をうる。

$$\|y\|\leq\varliminf_{n\to\infty}\|y_n\|\leq\varlimsup_{n\to\infty}\|y_n\|\leq\|A^0x\|$$

を用いると，$A^0x=y$ と $\|y_n\|\to\|y\|$ をうる。そこで $\lim_{n\to\infty}y_n=A^0x$ となり，$\lim_{\lambda\to 0}A_\lambda x=A^0x$ をうる。

(6)は(5)と同様に証明できる。 （証了）

今や，$A\subset H\times H$ を maximal monotone とし，初期値問題

$$\frac{du}{dt}+Au\ni 0,\quad u(0)=x_0$$

を考えよう。このとき次の定理が成立する。

定理6 任意の $x_0 \in D(A)$ に対して，次の条件をみたすような函数 $u:[0,\infty) \to H$ が一意に存在する。

(1) $u(t) \in D(A)$, $t > 0$.

(2) $u(t)$ は $[0,\infty)$ 上でリプシッツ連続であり，

$$\left\|\frac{du}{dt}\right\|_{L_\infty(0,+\infty;H)} \leq \|A^0 x_0\|.$$

(3) $(0,\infty)$ のほとんどすべての t に対して

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) \ni 0.$$

(4) $u(0) = x_0$.

さらに，u は次の性質をもつ。

(5) u はすべての $t \in [0,\infty)$ に対して右微分可能で，

$$\frac{d^+u(t)}{dt} + A^0u(t) = 0, \quad t \in [0,\infty).$$

(6) 函数 $t \longmapsto A^0u(t)$ は右連続であり，函数 $t \longmapsto \|A^0u(t)\|$ は単調減少である。

(7) $y_0 \in D(A)$ に対するもう一つの解を $\hat{u}$ とすると，すべての $t \geq 0$ に対して

$$\|u(t) - \hat{u}(t)\| \leq \|x_0 - y_0\|$$

である。

この定理の証明は多くの紙面を用するので，ここでは省くことにする (cf. Brézis [5])。

いま $x \in D(A)$ と $t \geq 0$ に対して

$$S(t)x = u(t)$$

とすると，$S(t)$ は(7)より $D(A)$ 上の nonexpansive な写像となり，$S(t)$ を $\overline{D(A)} = C$ (Aが maximal momotone なので C は凸集合となる) 上に一意に拡張することができる。そこで，C 上の写像の族

$$S = \{S(t) : t \geq 0\}$$

と作ると，この S は次の4つの条件をみたしていることが証明できる。

(1) $S(t+s)x = S(t)S(s)x$, $x \in C$, t, $s \geq 0$.

(2) $S(0)x = x$, $x \in C$.

(3) 任意の $x \in C$ に対して，$S(t)x$ は t に関して連続である。

(4) $\|S(t)x - S(t)y\| \leq \|x-y\|$, x, $y \in C$, $t \geq 0$.

一般に，Hilbert 空間 H の閉で凸な部分集合 C 上で定義された写像 $S(t)$ の族 $S = \{S(t) : t \geq 0\}$ が上の4つの条件をみたすとき，S は C 上の nonexpansive semigroup であるといわれる。

Aが maximal monotone であるとき，上の手続きによって，$\overline{D(A)} = C$ 上の nonexpansive semigroup $S=\{S(t): t\geq 0\}$ が作れたが（このとき A は S の generator とよばれる），逆に H の閉で凸な集合 C 上に nonexpansive semigroup S が与えられると，$\overline{D(A)}=C$ となるような maximal monotone 写像 A が一意に存在して，これは S の generator となっている。

それゆえ，nonexpansive semigroup の研究においては maximal monotone 写像での定理が有効であり，maximal monotone 写像の研究にあたっては nonexpansive semigroup での定理が有効に使われるのである。

§4. Semigroup に対する不動点定理

この節では semigroup の不動点定理を考える。まずはじめに nonexpansive semigroup に対する不動点定理を議論する。この議論においては前の節で明らかとなったように maximal monotone 写像における種々の定理が有効となってくる。nonexpansive semigroup の不動点定理を証明する前に nonexpansive semigroup の不動点と関連して maximal monotone 写像の性質を少し調べておこう。H を Hilbert 空間とし，$A\subset H\times H$ を maximal monotone であるとしよう。そのとき，後でわかるように，

$$A^{-1}(0)=\{x\in D(A): 0\in Ax\}$$

なる集合が非常に重要となってくる。実はこの $A^{-1}(0)$ は A によって生成される $\overline{D(A)}=C$ 上の nonexpansive semigroup $S=\{S(t): t\geq 0\}$ の共通な不動点の集合

$$F(S)=\bigcap_{t\geq 0} F(S(t))=\bigcap_{t\geq 0}\{x\in C: S(t)x=x\}$$

と一致している。

実際，$x\in D(A)$ と $(v, w)\in A$ に対して，

$$\frac{1}{2}\|S(\lambda)x-v\|^2-\frac{1}{2}\|x-v\|^2$$

$$=\int_0^\lambda \langle A^0S(t)x-w+w,\ v-S(t)x\rangle\, dt$$

$$\leq\int_0^\lambda \langle w,\ v-S(t)x\rangle\, dt \cdots\cdots\cdots\cdots (*)$$

が一般にいえて，特にいま $y\in A^{-1}(0)$ 対して $x=y$，$v=y$，$w=0$ を上の式に代入すると，

$$\frac{1}{2}\|S(\lambda)y-y\|^2\leq 0$$

が得られる。$\lambda(\geq 0)$ は任意なので，$y\in F(S)$ であることがわかる。逆に $y\in F(S)$ とし，任意の $(v, w)\in A$ に対して，$(*)$ 式を用いると，

$$\langle w,\ v-y\rangle\geq 0$$

が得られる。A が maximal monotone であることより，$y\in D(A)$ で $Ay\ni 0$ をうる。

この事実を用いて次の定理を証明する。

定理 7　CをHilbert空間Hの閉で凸な部分集合とし，$S=\{S(t):t\geq 0\}$をC上で定義されたnonexpansive semigroupとしよう。このとき，つぎの条件(1)と(2)は同値である。

(1)　$F(S)\neq\phi$.

(2)　Cのある元xが存在して，$\{S(t)x:t\geq 0\}$は有界となる。

証明　(1)⇒(2)は明らかである。

(2)⇒(1)　$\{S(t)x:t\geq 0\}$を有界とし，

$$S_\lambda x=\int_0^\lambda S(t)x\,dt$$

としよう。そのとき$\{S_\lambda x:\lambda\geq 0\}$も有界となり，$S_{\lambda_i}x\rightharpoonup y$となるような$\{S_{\lambda_i}x\}$がとれる。$A$を$C$上のnonexpansive semigroup Sのgeneratorとし，$(v,w)\in A$とすると

$$\frac{1}{2}\|S(\lambda)x-v\|^2-\frac{1}{2}\|x-v\|^2\leq\lambda\langle w,v-S_\lambda x\rangle$$

をうるから，$\lambda=\lambda_i$とし，λ_iでわって$\lambda_i\to\infty$とすると，

$$\langle w,v-y\rangle\geq 0$$

をうる。Aのmaximalityから$y\in D(A)$で$0\in A(y)$をうる。それゆえ，$A^{-1}(0)=F(S)$であるので$y\in F(S)$をうる。　　　　（証了）

ここでnonexpansive semigroupのエルゴード定理を述べておこう。

定理 8　CをHilbert空間Hの閉で凸な集合とし，$S=\{S(t):t\geq 0\}$をC上のnonexpansive semigroupとする。そのとき，次の2つの条件は同値である。

(1)　$F(S)\neq\phi$.

(2)　Cの任意の元xに対して，$\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda S(t)x\,dt$は弱収束する。

このとき，Cの任意の元xに対して

$$Qx=w-\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda S(t)x\,dt$$

とおくと，QはCから$F(S)$の上への$Q^2=Q$なるnonexpansiveな写像で，$t\geq 0$に対して

$$QS(t)=S(t)Q=Q$$

をみたしている。

(2)⇒(1)は定理7と同様にできる。

(1)⇒(2) は次の補助定理を用いて，定理2と同じ方法で証明できる。

補助定理6　Cを Hilbert 空間Hの閉で凸な集合とし，$S=\{S(t): t\geq 0\}$をC上の nonexpansive semigroup とする。$F(S)\neq\phi$とし，$F(S)$ の上への metric projection をPとする。そのとき，Cの任意の元xに対して$PS(t)x$は強収束する。

証明　Pは$F(S)$ 上への metric projection であるので，$v\in H$ と $u\in F(S)$ に対して

$$\|Pv-u\|^2\leq\|v-u\|^2-\|Pv-v\|^2$$

が成立する。ここで $v=S(t+h)x$，$u=PS(t)x$ とおくと，

$$\begin{aligned}&\|PS(t+h)x-PS(t)x\|^2\\ &\leq\|S(t+h)x-PS(t)x\|^2-\|S(t+h)x-PS(t+h)x\|^2\\ &\leq\|S(t)x-PS(t)x\|^2-\|S(t+h)x-PS(t+h)x\|^2\end{aligned}$$

を得る。$t\longmapsto\|S(t)x-PS(t)x\|^2$は単調減少なので$PS(t)x$は Cauchy net となり，$PS(t)x$は強収束する。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証了）

つぎに$S(t)x$ それ自身の収束性を問題にする。これに対しては Pazy〔36〕の2つの結果がある。

定理9　Cを Hilbert 空間Hの閉で凸な集合とし，$S=\{S(t): t\geq 0\}$をC上のnonexpansive semigroup とする。そのとき，$x\in C$に対して次の条件(1)と(2)は同値である。

(1)　$S(t)x$は弱収束する。

(2)　$F(S)\neq\phi$ であり，かつ$S(t_i)x\rightharpoonup y$ならば$y\in F(S)$ である。

証明は定理4と同様にできるから，ここでは書かない。

定理10　Cを Hilbert 空間Hの閉で凸な集合とし，$S=\{S(t): t\geq 0\}$をC上の nonexpansive semigroup とする。そのとき，$x\in C$に対して次の条件(1)と(2)は同値である。

(1)　$S(t)x$ が強収束する。

(2)　$F(S)\neq\phi$ であり，かつ$\{S(t)x\}$の中に強収束する部分列が存在する。そして$S(t_i)x\rightarrow p$ならば $p\in F(S)$ である。

証明　(1)⇒(2)　$S(t)x\rightarrow p$とする。すると

$$S(s)p=S(s)\lim_{t\to\infty}S(t)x=\lim_{t\to\infty}S(s+t)x=p$$

となり，$p\in F(S)$ がいえる。

(2)⇒(1)　$F(S)\neq\phi$ とし，$S(t_i)x\rightarrow p$とする。そのとき$p\in F(S)$ であるので，$t>t_i$ とする

と

$$\|S(t)x-p\|=\|S(t_i+s)x-S(s)p\|$$
$$\leq\|S(t_i)x-p\|$$

となり，$S(t)x\to p$ であることがわかる。　（証了）

定理9と定理10を比較すると，$S(t)x$ の強収束性を研究することはそれ程意義のあることではないことがわかる。なぜなら定理9においては $F(S)\neq\phi$ であることより，$\{S(t)x\}$ が有界となり，いつでも弱収束する部分列がとれるのであるが，$S(t)x$ の強収束性を出すためには $\{S(t)x\}$ のある部分列に対して強収束性を仮定しなければならないからである。

この節を閉じるにあたり，nonexpansive 写像から作られる一般の semigroup の不動点定理に関し，少し触れておこう。

定理11　C を Banach 空間の weakly compact convex 集合とし，normal structure をもつものとする。そのとき C 上で作用する nonexpansive 写像の作る left reversible semigroup は共通な不動点をもつ。

一様凸な Banach 空間の有界で閉な凸集合や Banach 空間のコンパクトな凸集合は normal structure をもっているし，left amenable semigroup (可換な semigroup も含む) は left reversible semigroup の特別な場合であるから，上の定理は相当一般的な結果であることがわかるであろう。

§5.　凸函数

H を Hilbert 空間とし，f を H 上で定義され $(-\infty,\infty]$ に値をとる凸函数とする。f が恒等的に $+\infty$ でないとき f は proper であるといわれる。proper な凸函数 f に対して，

$$\partial f(x)=\{x^*\in H:f(y)\geq f(x)+\langle x^*,y-x\rangle,\ y\in H\}$$

によって，H から 2^H への写像 ∂f が定義されるが，この ∂f は f の subdifferential とよばれ，convex programming の理論において重要な役割りを演ずる作用素である。f が x で differentiable のときは $\partial f(x)=\nabla f(x)$ となることは明らかである。proper な凸函数 $f:H\to(-\infty,\infty]$ に lower semicontinuous を仮定したときが特に重要であるので，以後 f としてそのような函数のみを取り扱う。f の subdifferential ∂f の性質として，x_0 が $0\in\partial f(x_0)$ をみたす必要十分条件は

$$f(x_0)=\min_{x\in H}f(x)$$

であることを知っておくことは大切である。

実際，$0\in\partial f(x_0)$ なら

$$f(y)\geq f(x_0)+\langle 0, y-x_0\rangle=f(x_0)$$

となり，$f(x_0)$ は $f(x)$ の最小値となるし，逆に $f(x_0)$ が $f(y)$ の最小値なら

$$f(y)-f(x_0)\geq 0=\langle 0, y-x_0\rangle$$

より $0\in\partial f(x_0)$ であることがわかる。

補助定理7　$f: H\to(-\infty,\infty]$ を proper な凸函数で lower semicontinuous であるとし，

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x)=\infty$$

をみたすとする。そのとき，

$$f(x_0)=\inf\{f(x): x\in H\}$$

なる $x_0\in D(f)$ が存在する。ここで $D(f)$ は $f(x)<+\infty$ なる点 x の集合を表わす。

証明　$d=\inf\{f(x): x\in H\}$ とし，$\{x_n\}\subset H$ を $\lim f(x_n)=d$ となるような点列とする。そのとき条件によって $\{x_n\}$ が有界であることがわかる。それゆえ $x_{n_i}\rightharpoonup x_0$ なる $\{x_n\}$ の部分点列 $\{x_{n_i}\}$ が存在する。f は lower semicontinuous なので，

$$f(x_0)\leq\varliminf_{i\to\infty} f(x_{n_i})=\lim_{i\to\infty} f(x_{n_i})=d$$

となり，$f(x_0)=\inf\{f(x): x\in H\}$ をうる。　（証了）

上の定理の特別な場合を考える。C を H の閉で凸な集合とし，$z\in H$ とする。いま，H 上の函数 f として

$$f(x)=\begin{cases}\|z-x\|, & x\in C\\ +\infty, & x\notin C\end{cases}$$

とするとき，f は補助定理7の条件をすべてみたしている。それゆえ，

$$\begin{aligned}\|z-x_0\|&=\inf\{\|z-x\|: x\in H\}\\&=\inf\{\|z-x\|: x\in C\}\end{aligned}$$

なる $x_0\in C$ の存在がわかる。

上の補助定理を使うと次の ∂f に関する重要な定理が証明できる。

定理12　H を Hilbert 空間とし，$f: H\to(-\infty,\infty]$ を proper lower semicontinuous な凸函数とする。

そのとき，∂f な maximal monotone 写像である。

証明　$x_i^* \in \partial f(x_i)(i=1,2)$ とすると，

$$\langle x_1-x_2, x_1^*-x_2^*\rangle = \langle x_1-x_2, x_1^*\rangle - \langle x_1-x_2, x_2^*\rangle$$
$$\geq -(f(x_2)-f(x_1)+f(x_1)-f(x_2))=0$$

より，∂f は monotone な写像となる。これが maximal monotone となることをいうには，定理5より $R(I+\partial f)=H$ であることを示せばよい。すなわち，$x_0^* \in H$ に対して方程式

$$x_0+\partial f(x_0) \ni x_0^*$$

をみたすような $x_0 \in D(\partial f)$ の存在をいえばよい。いま，

$$f_1(x)=\frac{1}{2}\|x\|^2+f(x)-\langle x, x_0^*\rangle,\quad x\in H$$

としよう。そのとき，f_1 はH上の lower semicontinuous で proper 凸函数であり，さらに

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f_1(x)=\infty$$

をみたしているから，上の補助定理が使えて

$$f_1(x_0)=\inf\{f_1(x) : x\in H\}$$

となるような $x_0 \in D(f_1)$ の存在がわかる。これから

$$f(x_0)-f(x)\leq \langle x_0-x, x_0^*\rangle + \langle x-x_0, x\rangle$$

をうる。$x=tx_0+(1-t)u$ （$t\in[0,1]$, $u\in H$）とおき，fの凸性を使うと，

$$f(x_0)-f(u)\leq \langle x_0-u, x_0^*\rangle + \langle u-x, tx_0+(1-t)u\rangle$$

をうる。$t\to 1$ とすると

$$f(x_0)-f(u)\leq \langle x_0-u, x_0^*\rangle + \langle u-x_0, x_0\rangle$$

となり，それゆえ

$$f(u)-f(x_0)\geq \langle u-x_0, x_0^*-x_0\rangle,\quad u\in H$$

をうる。すなわち $x_0^*-x_0\in\partial f(x_0)$ となり定理が証明された。　　(証了)

これを用いると，次の系が得られる。

系2　$f: H\to(-\infty,\infty]$ を lower semicontinuous で proper 凸函数とする。そのとき$D(\partial f)$ は$\bar{D}(f)$ の dense な部分集合となる。

証明　$x\in D(f)$ とし，$\lambda>0$ とする。$R(I+\lambda\partial f)=H$なので，$x_\lambda+\lambda\partial f x_\lambda \ni x$ なるような $x_\lambda\in D(\partial f)$ が一意に存在する。それゆえ ∂f の定義より，

$$\|x-x_\lambda\|^2+\lambda f(x_\lambda)\leq\lambda f(x)$$

をうる。fに対して

$$f(x)\geq\langle x, x^*\rangle+\mu,\quad x\in H$$

となるような $x^* \in H$ と μ（実数）が存在するので，$f(x)$ のかわりに $\hat{f}(x)=f(x)-\langle x, x^* \rangle$ を考えることにより，$\|x_\lambda - x\| \to 0\ (\lambda \to 0)$ がいえる。これで $\overline{D(\partial f)}=\overline{D(f)}$ がいえた。（証了）

次の定義は Bruck〔9〕による。

$A \subset H \times H$ を monotone とする。A が demipositive であるとは $A^{-1}(0) \neq \phi$ であり，さらに次の条件が成り立つときをいう。

$x_0 \in A^{-1}(0)$ が存在して $x_n \rightharpoonup x$, $y_n \in Ax_n$, $\sup\|y_n\| < +\infty$, $\lim \langle y_n, x_n - x_0 \rangle = 0$ のときはいつでも $x \in A^{-1}(0)$ となる。

この定義のもとで次の定理が成り立つ。

定理13　A を maximal monotone で demipositive であるとし，$S=\{S(t) : t \geq 0\}$ を A によって生成される $\overline{D(A)}$ 上の nonexpansive semigroup とする。そのとき，$x \in \overline{D(A)}$ に対して $S(t_i)x \rightharpoonup y$ ならば $y \in A^{-1}(0)=F(S)$ である。

この定理と定理9を用いると次の定理が得られる。

定理14　C を Hilbert 空間 H の閉で凸な集合とし，$S=\{S(t) : t \geq 0\}$ を C 上の nonexpansive semigroup としよう。A をその semigroup S の generator とし，そして A が demipositive とする。そのとき，任意の $x \in C$ に対して $S(t)x$ は $F(S)$ の元に弱収束する。

一方，凸函数 f に対しては次の性質が成り立つ。

定理15　$f : H \to (-\infty, \infty]$ を lower semicontinuous で proper な凸函数とし，最小値をもつものとする。そのとき，f の subdifferential ∂f は demipositive である。

証明　一般性を失うことなしで，$0=\min\limits_x f(x)$ とすることができる。

$$f(y_0)=\min_{x \in H} f(x)=0$$

とすると，$0 \in \partial f(y_0)$ である。いま，

$$x_n \rightharpoonup x,\ v_n \in \partial f(x_n),\ \lim \langle v_n, x_n - y_0 \rangle = 0$$

と仮定すると，$f(x_n) \geq 0$ で

$$0=f(y_0) \geq f(x_n)+\langle v_n, y_0 - x_n \rangle$$

なので $\lim f(x_n)=0$ となる。f はノルムの意味で lower semicontinuous であるが，凸函数なので，weak の意味でも lower semicontinuous になる。そこで，

$$f(x) \leq \varliminf_{n\to\infty} f(x_n) = 0$$

となり，$0 \in \partial f(x)$ となる。また ∂f が maximal monotone であることは定理12より明らか。

（証了）

以上より，次の結果をうる。

定理16 $f : H \to (-\infty, \infty]$ を lower semicontinuous で proper 凸函数とし，最小値をもつものとする。∂f を f の subdifferential とし，$S = \{S(t) : t \geq 0\}$ を ∂f によって生成される $\overline{D(\partial f)} = \overline{D(f)}$ 上の nonexpansive semigroup とするならば，任意の $x \in \overline{D(f)}$ に対して，$S(t)x$ は f の最小値をとる点に弱収束する。

§6. Fan-Browder の不動点定理

この節では，線形位相空間のコンパクト凸集合上で証明されるいくつかの基本定理を系統的に得ることを試みる。その前に，よく知れた2つの定理を述べておく。

定理17 (Brouwerの不動点定理) Xをn次元ユークリッド空間R^nのコンパクトで凸な集合とし，TをXからXへの連続な写像とする。そのとき，Xの中にTの不動点が存在する。

定理18 (単位の分割定理) Xをコンパクトハウスドルフ空間とし，$\{G_1, G_2, \cdots\cdots, G_n\}$ をXの開被覆とする。そのとき次の3つの条件をみたすX上のn個の実数値連続函数 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_n\}$ が存在する。

(1) $0 \leq \beta_i(x) \leq 1$，$x \in X$，$i = 1, 2, \cdots\cdots, n$.

(2) $\sum_{i=1}^{n} \beta_i(x) = 1$，$x \in X$.

(3) $x \notin G_i$ ならば $\beta_i(x) = 0$　$(i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$。

定理17の基本的な証明は Kuga〔30〕によってなされているので，それを参照されたい。また定理18は Urysohn の補助定理〔1〕を用いることによって帰納的に証明することができる。これらの定理を用いてまず次の Fan-Browder の不動点定理〔8〕を証明する。

定理19 Xを線形位相空間（もちろんハウスドルフは仮定する）のコンパクトな凸集合とする。Tを次の条件(1)と(2)をみたすXから 2^X（Xの部分集合の全体）への写像とする。

(1) 任意の $x \in X$ に対して，Tx は X の空でない凸集合である。

(2) 任意の $y \in X$ に対して $T^{-1}y = \{x \in X : y \in Tx\}$ は X の開集合である。

そのとき，$x_0 \in Tx_0$ となる $x_0 \in X$ が存在する。

証明 任意の $x \in X$ に対して Tx は空でないことより，$\{T^{-1}y : y \in X\}$ は X の開被覆になることがわかる。X はコンパクトなので，その有限開被覆 $\{T^{-1}y_1, T^{-1}y_2, \cdots\cdots, T^{-1}y_n\}$ が存在する。定理18を用いてこの有限開被覆に対する単位の分割 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_n\}$ を作り，X から X への写像を

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x) y_i$$

で定義する。するとすべての $x \in X$ に対して $p(x) \in Tx$ である。なぜなら $x \in X$ に対して $\beta_i(x) \neq 0$ なら $x \in T^{-1}y_i$ であり，それゆえ $y_i \in Tx$ である。Tx は凸集合なので $p(x) \in Tx$ をうる。いま X_0 を $\{y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n\}$ によってはられる凸集合とすると，この X_0 は R^n のコンパクト凸集合と同相になる（cf.〔26〕)。p は X_0 から X_0 への連続写像なので定理17が使えて $x_0 = px_0 \in Tx_0$ なる $x_0 \in X$ をうることができる。（証了）

同様に次の定理も証明できる。

定理19′ X を線形位相空間のコンパクトな凸集合とする。T を次の条件(1)と(2)をみたす X から 2^X への写像とする。

(1) 任意の $x \in X$ に対して Tx は X の開集合である。

(2) 任意の $y \in X$ に対して $T^{-1}y$ は X の空でない凸集合である。

そのとき $x_0 \in Tx_0$ なる点 $x_0 \in X$ が存在する。

定理19を用いて次の存在定理を証明することができる。

定理20 X を線形位相空間の空でないコンパクト凸集合とする。A を次の性質(1)，(2)，(3)をみたす $X \times X$ の部分集合とする。

(1) 任意の $y \in X$ に対して，集合 $\{x \in X : (x, y) \in A\}$ は閉である。

(2) 任意の $x \in X$ に対して，$(x, x) \in A$ である。

(3) 任意の $x \in X$ に対して，集合 $\{y \in X : (x, y) \notin A\}$ は凸である。

そのとき $x_0 \times X \subset A$ となる $x_0 \in X$ が存在する。

証明 背理法によって証明する。任意の $x \in X$ に対して $(x, y) \notin A$ なる $y \in X$ の存在を仮定する。いま $x \in X$ に対して，

$$Tx=\{\,y\in X : (x, y)\notin A\}$$

とすると，Txは空でない凸集合である。また$T^{-1}y$は開集合であるので定理19より $x_0\in Tx_0$ なる点$x_0\in X$が存在する。すなわち $(x_0, x_0)\notin A$ である。これは(2)に反する。ゆえに $x_0\times X\subset A$ なる$x_0\in X$が存在する。　（証了）

定理20の直接の結果として次の使いやすい定理をうる。

定理21　Xを線形位相空間のコンパクト凸集合とし，Fを次の条件(1), (2), (3)をみたす$X\times X$上の実数値函数とする。

(1)　任意の$y\in X$に対して，xの函数$F(x, y)$ は upper semicontinuous である。

(2)　任意の$x\in X$に対して，yの函数$F(x, y)$ は quasi-convex である。

(3)　すべての$x\in X$に対して，$F(x, x)\geq c$ となるような実数cが存在する。

そのとき，すべての$y\in X$に対して$F(x_0, y)\geq c$ となるような $x_0\in X$ が存在する。

証明　いま$A=\{(x, y)\in X\times X : F(x, y)\geq c\}$ とする。そのとき定理20の条件(1), (2)をみたすことは明らかである。Aが(3)をみたすことを示す。$x\in X$に対して，集合$C=\{\,y\in X : (x, y)\notin A\}$ は $\{\,y\in X : F(x, y)< c\}$ なる集合であるが，いま

$$C_n=\{\,y\in X : F(x, y)\leq c-\frac{1}{n}\}\ (n=1, 2, \cdots\cdots)$$

とすると，C_nは凸集合であり，$C=\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ なので，Cは凸集合となる。これで定理20が使えて，すべての$y\in X$に対して$F(x_0, y)\geq c$ となる $x_0\in X$ の存在がわかる。　（証了）

定理21を用いると，Fan〔16〕によって証明された次の凸不等式のシステムに関する有用な定理を得ることができる。

定理22　Xを位相線形空間のコンパクトで凸な集合とし，$f_1, f_2, \cdots\cdots, f_n$を$X$上で定義され，$(-\infty, \infty]$ に値をとる lower semicontinuous で凸な函数とする。そのとき，次の条件(1)と(2)は同値である。

(1)　n個の不等式のシステム

$$f_i(x)\leq c\quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

が解をもつ。

(2)　$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$なる非負な数$\{\alpha_i\}$に対して，

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(y)\leq c$$

なる $y \in X$ が存在する。

証明 (2)における y として(1)の解をとれば，(1)⇒(2) は明らかである。

(2)⇒(1) もし $f_i(x_0) \leq c\ (i=1, 2, \cdots\cdots, n)$ なる x_0 が存在しないとする。

$$G_i = \{x \in X : f_i(x) > c\}\ (n=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

とすると，$\{G_1, G_2, \cdots\cdots, G_n\}$ は X の開被覆になる。いまこの開被覆に対する単位の分解を $\{\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_n\}$ とし，$X \times X$ 上の函数を

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x) f_i(y)$$

とすると，F は定理21の(1), (2)をみたしており，さらに x の函数 $F(x, x)$ は lower semicontinuous であることより，すべての x に対して $F(x, x) \geq c_0 > c$ なる実数 c_0 が存在する。そこで定理21が使えて，すべての $y \in X$ に対して $F(x_0, y) \geq c_0 > c$ となる $x_0 \in X$ の存在がわかる。すなわち，すべての $y \in X$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i(x_0) f_i(y) > c$$

であり，$\sum_{i=1}^{n} \beta_i(x_0) = 1$ となるような非負な数 $\{\beta_i(x_0)\}$ が存在したことになる。これで証明が完了した。 （証了）

§7. 拡張された不動点定理

まず定理21を用いて Tychonoff の不動点定理と Schauder の不動点定理の拡張をえよう。

定理23 X を局所凸な位相線形空間 E のコンパクトで凸な集合とする。そのとき次の(1)あるいは(2)が成立する。

(1) $Ty_0 = y_0$ なる $y_0 \in X$ が存在する。

(2) $0 < p(x_0 - Tx_0) = \min_{x \in X} p(x - Tx_0)$

となるような点 $x_0 \in X$ と E 上の連続なセミノルム p が存在する。

証明 (1)を否定しよう。すると，任意の $x \in X$ に対して，$p_x(x - Tx) > 0$ となるような E 上の連続セミノルム p_x が存在する。いま

$$G_x = \{y \in X : p_x(y - Ty) > 0\}$$

とおくと $\{G_x : x \in X\}$ は X の開被覆となる。X はコンパクトなので，その有限開被覆 $\{G_{x_1}, G_{x_2}, \cdots, G_{x_n}\}$ が存在する。この開被覆に対する単位の分割を $\{\beta_1, \beta_2, \cdots\cdots, \beta_n\}$ とし，$X \times X$ 上の函数 F を

$$F(x, y)=\sum_{i=1}^{n} \beta_i(x)p_{x_i}(y-Tx)-\sum_{i=1}^{n} \beta_i(x)p_{x_i}(x-Tx)$$

とおくと，Fは定理21の仮定(1)，(2)をみたし，さらに$x\in X$に対して$F(x, x)=0$である。それゆえ定理21が使えて，すべての$y\in X$に対して$F(x_0, y)\geq 0$なる$x_0\in X$が存在する。すなわち，すべての$y\in X$に対して

$$\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x_0)p_{x_i}(y-Tx_0)\geq\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x_0)p_{x_i}(x_0-Tx_0)>0$$

なる不等式をうる。ここで

$$p=\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x_0)p_{x_i}$$

とおくと，定理の(2)が得られる。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証了）

定理24　Xをノルム空間Eのコンパクトな凸集合とし，TをXからEへの連続写像とする。そのとき，

$$\|x_0-Tx_0\|=\min_{x\in X}\|x-Tx_0\|$$

となる$x_0\in X$が存在する。

証明　$X\times X$上の函数Fを

$$F(x, y)=\|y-Tx\|-\|x-Tx\|$$

とおけば，定理21によりすべての$y\in X$に対して$\|y-Tx_0\|\geq\|x_0-Tx_0\|$なる$x_0\in X$をうることができる。すなわち定理が証明される。　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証了）

定理23と定理24において，TをXからXへの連続写像とすると，よく知られたTychonoffの不動点定理とノルム空間におけるSchauderの不動点定理が得られる。

つぎに定理22を用いてFanのminimax定理〔14〕を証明する。

定理25　Xを線形位相空間のコンパクトで凸な集合とし，Yを単なる集合とする。Fを$X\times Y$上の実数値函数で次の(1)と(2)の条件をみたすものとする。

(1)　$y\in Y$を固定したとき，xの函数$F(x, y)$はlower semicontinuousでconvexである。

(2)　$x\in X$を固定したとき，yの函数$F(x, y)$はconcavelikeである。

そのとき，

$$\sup_{y\in Y}\min_{x\in X}F(x, y)=\min_{x\in X}\sup_{y\in Y}F(x, y)$$

が成立する。

証明　$c=\sup_{y}\min_{x}F(x, y)$とし，$Y$の任意の有限集合を$\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$とする。いま，

$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ なる n 個の非負な数 $\{\alpha_i\}$ とするとき，(2)により，すべての $x\in X$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i F(x,y_i)\leq F(x,y_0)$$

となるような $y_0\in Y$ をうる。この y_0 に対して $c=\sup_y \min_x F(x,y)$ より $F(x_0,y_0)\leq c$ なる x_0 が存在する。すなわち，$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ なる非負な数 $\{\alpha_i\}$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i F(x_0,y_i)\leq F(x_0,y_0)\leq c$$

なる $x_0\in X$ が存在する。ここで，定理22を用いると

$$\bigcap_{i=1}^{n}\{x: F(x,y_i)\leq c\}\neq\phi$$

がいえたことになる。X がコンパクトなので

$$\bigcap_{y\in Y}\{x: F(x,y)\leq c\}\neq\phi$$

となる。これは $\min_x \sup_y F(x,y)\leq c$ を意味するので，

$$\sup_y \min_x F(x,y)=\min_x \sup_y F(x,y)$$

の成立がわかる。

つぎに定理 19′ を用いて Sion の minimax 定理〔42〕を簡単に証明する。

定理26　X と Y を線形位相空間 E_1 と E_2 のコンパクトな凸集合とする。F を次の条件 (1) と (2) をみたす $X\times Y$ 上の実数値函数とする。

(1)　$y\in Y$ を固定したとき，x の函数 $F(x,y)$ は lower semicontinuous で quasi-covex である。

(2)　$x\in X$ を固定したとき，y の函数 $F(x,y)$ は upper semicontinuous で quasi-concave である。

そのとき，

$$\min_{x\in X}\max_{y\in Y}F(x,y)=\max_{y\in Y}\min_{x\in X}F(x,y)$$

が成立する。

証明　等式が成立しないとする。すなわち

$$\max_y \min_x F(x,y)<c<\min_x \max_y F(x,y)$$

としよう。いま，

$$A_x=\{y\in Y: F(x,y)<c\},$$
$$B_y=\{x\in X: F(x,y)>c\}$$

として，$X\times Y$ から $2^{X\times Y}$ への写像 T を

$$T(x,y)=B_y\times A_x$$

とすると，Tは定理 19′ の (1)，(2) の条件をみたしている。それゆえ，$(x_0, y_0)\in T(x_0, y_0)$ となる $(x_0, y_0)\in X\times Y$が存在する。これを書きなおすと $c<F(x_0, y_0)<c$ となり矛盾である。

（証了）

定理23と同じような証明の方法によって（定理21を用いて）次の多価写像に対する Fan の不動点定理〔14〕を得ることができる。

定理27 Xを局所凸な位相線形空間Eのコンパクトな凸集合とし，TをXから 2^X への upper semicontinuous な写像で，点 xを空でない閉で凸な集合 Tx にうつすとする。そのとき $x_0\in Tx_0$ なる点 $x_0\in X$ が存在する。

これを用いると次の興味ある存在定理が得られる。

定理28 Xを局所凸な線形位相空間Eのコンパクトで凸な集合とし，gを$X\times X$から線形位相空間Fへの連続写像とする。CをFの閉集合とする。もし任意の $x\in X$に対して $\{y\in X: g(x, y)\in C\}$ がつねに空でない凸集合となるとき，$g(x_0, x_0)\in C$なる点 $x_0\in X$ が存在する。

証明 Xから 2^X への写像Tを

$$Tx=\{y\in X: g(x, y)\in C\}$$

とする。T が upper semicontinuous なることは，Tのグラフ $G(T)=\{(x, y): x\in X,\ y\in Tx\}$ が集合 $g^{-1}(C)$ と一致することからわかる。上の定理より，$x_0\in Tx_0$ なる $x_0\in X$ の存在が保証され，$g(x_0, x_0)\in C$を得る。（証了）

これを用いると次の２つの系がえられる。

系 3 Xを局所凸な線形位相空間のコンパクトな凸集合とし，gを$X\times X$から線形位相空間Fへの連続写像とする。$x\in X$ を固定したとき，yの函数 gは affine であり，さらに $x\in X$ に対して $g(x, y)=0$ なる $y\in X$がつねに存在するとき，$g(x_0, x_0)=0$ なる $x_0\in X$ が存在する。

系 4 Xを局所凸な線形位相空間Eのコンパクトな凸集合とし，CをEの閉で凸な集合とする。また gをXからEへの連続写像で $g(X)\subset X+C$をみたすものとする。そのとき，$g(x_0)\in x_0+C$ なる $x_0\in X$が存在する。

§8. 変分不等式と相補性問題

Cを局所凸な線形位相空間Eの閉で凸な集合とし，TをCからE^*（Eのdual 空間）への写像とする。そのとき，

$$\langle Tx, u-x\rangle \geq 0,\quad u\in C$$

をみたすCの元xのことを変分不等式の解という。またCを closed convex cone とし，C^*をCの polar，すなわち

$$C^*=\{y\in E^*:\ \langle y, x\rangle \geq 0,\quad x\in C\}$$

とするとき，CからE^*への写像Tに対して

$$Tx\in C^*,\ \langle Tx, x\rangle = 0$$

をみたすCの元xを相補性問題の解という。特に$E=E^*=R^n$，$C=R^n_+$とするとき，上の式は$x\geq 0$，$Tx\geq 0$，$\langle Tx, x\rangle = 0$となって，よく知られた相補性問題の形になっている。このような問題は数理計画やゲームの理論，経済均衡論等においてしばしば表われるものであるが，数学的にも非常に興味のある問題である。

変分不等式の解と相補性問題の解との間には次の関係がある。

補助定理8　Cを局所凸な線形位相空間Eの closed convex cone とし，C^*をその polar とする。TをCからE^*への写像とするとき，

$$\{x\in C: Tx\in C^*,\ \langle Tx, x\rangle = 0\}$$
$$=\{x\in C: \langle Tx, u-x\rangle \geq 0,\ u\in C\}.$$

証明　xを相補性問題の解とする。そのとき，すべての$u\in C$に対して

$$\langle Tx, u-x\rangle = \langle Tx, u\rangle - \langle Tx, x\rangle = \langle Tx, u\rangle \geq 0$$

なので，xは変分不等式の解になる。逆に，xを変分不等式の解としよう。そのとき，

$$\langle Tx, u-x\rangle \geq 0,\quad u\in C$$

なので，特に$u=0$のときと$u=\lambda x$（$\lambda>1$）のときを考えれば$\langle Tx, x\rangle = 0$をうる。証明を完了するためには$Tx\in C^*$を示せばよい。$Tx\notin C^*$とすると，$\langle Tx, u_0\rangle < 0$なる$u_0\in C$が存在する。そのとき，$\langle Tx, u_0-x\rangle \geq 0$より，$0 > \langle Tx, u_0\rangle \geq \langle Tx, x\rangle = 0$なる矛盾をうる。

（証了）

定理20を用いて，コンパクト集合上での変分不等式に関する定理を証明する。

補助定理 9　Xを局所凸な線形位相空間Eのコンパクトで凸な集合とする。TをXからE^*への連続写像とし，$f: X \to (-\infty, \infty]$ を lower semicontinuous な凸函数とする。そのとき，

$$\langle Tx_0, x-x_0\rangle + f(x) \geq f(x_0)$$

なる $x_0 \in X$が存在する。

証明　いま

$$A = \{(x, y) \in X \times X : \langle Tx, y-x\rangle + f(y) \geq f(x)\}$$

とすると，Aは定理20の条件をすべてみたしているので，$x_0 \times X \subset A$なる $x_0 \in X$ の存在がわかる。すなわち，

$$\langle Tx_0, x-x_0\rangle + f(x) \geq f(x_0),\quad x \in X$$

なるような $x_0 \in X$ が存在する。　　　　　（証了）

この補助定理をXが閉で凸な場合に拡張しよう。その前に定義を与えておく。CとXを線形位相空間Eの閉部分集合としよう。そのとき，$z \in \partial_C X$であるとは，$z \in X$であり，さらにzの任意の近傍$U(z)$ に対して$U(z) \cap (C-X) \neq \phi$となるときをいう。$z \in i_C X$であるとは，$z \in X$であって，$z$のある近傍$U(z)$ に対して$U(z) \cap (C-X) = \phi$となるときをいう。$\partial_C X$はCに関するXの境界といい，$i_C X$ をCに関するXの開核という。

定理29　Cを局所凸な線形位相空間Eの閉で凸な集合とする。TをCからE^*への連続写像とし，fをCから $(-\infty, \infty]$ への lower semicontinuous な凸函数とする。そのとき，もしCのコンパクトで凸な部分集合Xが存在して，$z \in \partial_C X$に対して

$$\langle Tz, y_0 - z\rangle + f(y_0) \leq f(z)$$

となるような $y_0 \in i_C X$ がつねに存在するなら

$$\langle Tx_0, x-x_0\rangle + f(x) \geq f(x_0),\quad x \in C$$

となるような $x_0 \in C$が存在する。

証明　前の補助定理により

$$\langle Tx_0, y-x_0\rangle + f(y) \geq f(x_0),\quad y \in X \cdots\cdots (*)$$

となるような $x_0 \in X$ が存在する。もし，$x_0 \in i_C X$ならば，$x \in C$に対して$y = \lambda x + (1-\lambda)x_0 \in X$となるような $\lambda\ (0 < \lambda < 1)$ があるから，

$$f(x_0) \leq f(\lambda x + (1-\lambda)x_0) + \lambda\langle Tx_0, x-x_0\rangle$$

となり，fが凸函数であることを使うと，

$$\lambda f(x_0) \leq \lambda f(x) + \lambda\langle Tx_0, x-x_0\rangle$$

をうる。それゆえ，$\lambda > 0$でわると

$$f(x_0) \leq f(x) + \langle Tx_0, x-x_0 \rangle$$

が成り立つ。$x_0 \in \partial_C X$とすると，まず仮定より

$$\langle Tx_0, x_0-y_0 \rangle + f(x_0) \geq f(y_0)$$

となるような $y_0 \in i_C X$が存在する。また，

$$\langle Tx_0, y-x_0 \rangle + f(y) \geq f(x_0), \quad y \in X$$

であるので，

$$\langle Tx_0, y-y_0 \rangle + f(y) \geq f(y_0), \quad y \in X$$

をうる。$y_0 \in i_C X$であるので，$x \in C$に対して $y=\lambda x+(1-\lambda)y_0 \in X$ となるような λ（$0<\lambda<1$）が存在するので，前の議論と同様に

$$f(y_0) \leq f(x) + \langle Tx_0, x-y_0 \rangle$$

をうる。また $y_0 \in X$なので（＊）式より

$$f(x_0) \leq f(y_0) + \langle Tx_0, y_0-x_0 \rangle$$

をうる。上の2つの式を加えると

$$f(x_0) \leq f(x) + \langle Tx_0, x-x_0 \rangle$$

となり，定理の証明は完了する。（証了）

上の定理と補助定理8を用いると，次の相補性問題に関する定理が得られる。

定理30　Cを局所凸な線形位相空間Eの閉で凸な cone とし，TをCから E^* への連続写像とする。そのとき，Cのコンパクトで凸な集合Xが存在して，$z \in \partial_C X$に対して

$$\langle Tz, z-y_0 \rangle \geq 0$$

となるような $y_0 \in i_C X$が存在するならば

$$Tx_0 \in C^*, \ \langle Tx_0, x_0 \rangle = 0$$

となるような $x_0 \in C$が存在する。

これを用いると Karamardian〔25〕によって得られていた次の興味ある結果が証明できる。

系5　Cをn次元ユークリッド空間R^n の閉で凸な cone とし，T を C からR^n への連続写像とする。そしてすべての$x \in C$に対して

$$\langle Tx-T0, x \rangle \geq c\|x\|^2$$

なる $c>0$が存在するものとする。そのとき，

$$Tx_0 \in C^*, \ \langle Tx_0, x_0 \rangle = 0$$

となるような $x_0 \in C$ が存在する。

証明 $T0=0$ のときは $x_0=0$ とすればよい。だから $T0 \neq 0$ と仮定する。

$$X=\{x \in C : \|x\| \leq \frac{\|T0\|}{c}\}$$

とすると，Xはコンパクトな凸集合であり，$x \in \partial_C X$に対し，$c\|x\|^2=\|T0\|\|x\|$ となる。それゆえ，$x \in \partial_C X$ なら

$$\langle Tx-T0,\ x\rangle \geq c\|x\|^2=\|T0\|\|x\|$$

となり，Schwarz の不等式を用いると

$$\begin{aligned}\langle Tx,\ x\rangle &\geq \langle T0,\ x\rangle + \|T0\|\|x\| \\ &\geq -\|T0\|\|x\|+\|T0\|\|x\|=0\end{aligned}$$

をうる。これは定理 30 において $y_0=0$ となった場合である。それゆえ，$Tx_0 \in C^*$, $\langle Tx_0, x_0\rangle=0$ となるような $x_0 \in C$ が存在する。 （証了）

つぎに，多価写像における変分不等式と相補性問題を考える。証明は一価の場合に似ているので省くことにする。

定理31 Cを局所凸な線形位相空間Eの閉で凸な集合とし，TをCからE^*への upper semicontinuous な多価写像で，Cの任意の点xをE^*の空でないコンパクトな凸集合Txに写すものとする。また$f : C \to (-\infty, \infty]$ を lower semicontinous で凸な函数とする。そのとき，もしCのコンパクトで凸な集合Xが存在して，$z \in \partial_C X$ に対して

$$\inf_{w \in Tz} \langle w, y_0 - z\rangle + f(y_0) \leq f(z)$$

となるような $y_0 \in i_C X$がつねにあるならば

$$\langle w_0,\ x-x_0\rangle + f(x) \geq f(x_0),\quad x \in C$$

となるような $x_0 \in C$ と $w_0 \in Tx_0$ が存在する。

上の定理において，Cを閉で凸な cone とし $f \equiv 0$ とすれば相補性問題に関する定理が得られる。最後に，Banach 空間でのこの種の定理を述べてこの節を終りたい。

定理32 Eを reflexive Banach 空間とし，Tを，EからE^*への monotone で hemicontinuous な写像とする。Cを$D(A)$ の閉で凸な部分集合とし，Cが有界あるいはTがC上で coercive ならば，そのとき，

$$\langle Tx,\ u-x\rangle \geq 0,\quad u \in C \cdots\cdots (*)$$

となるような解$x \in C$が存在する。さらに解の集合はCの有界で閉な凸集合で，特にTが strictly monotone なら，それは一点集合からなっている。

前と同様に，この定理から相補性問題に関する定理がただちに得られる。

§9. 凸ゲーム

凸ゲームの core に関する定理を証明する前に，定理22を用いて，次の2つの補助定理を証明しておく。

補助定理10 Xを位相線形空間のコンパクトで凸な集合とし，$\{f_\nu : \nu \in I\}$をX上で定義され，$(-\infty, \infty]$に値をとる lower semicontinuous で convex な函数の族とする。そのとき，次の条件(1)，(2)，(3)は同値である。

(1) 凸不等式のシステム

$$f_\nu(x) \leq 0, \quad \nu \in I$$

が解をもつ。

(2) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$なる有限個の非負な数$\{\alpha_i\}$と$\{f_i\}_{i=1}^{n} \subset \{f_\nu : \nu \in I\}$に対して，

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(y) \leq 0$$

となる$y \in X$が存在する。

(3) $f_1, f_2, \cdots, f_n \in \{f_\nu : \nu \in I\}$に対して，

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(y) \leq 0$$

となる$y \in X$が存在する。

証明 (1)⇔(2)は定理22とXのコンパクト性を用いれば明らかである。(2)⇒(3)は明らか。(3)⇒(1)は有理数が実数で dense であることを使えば証明できる。 （証了）

補助定理11 (Fan〔15〕) Eをノルム空間とし，$\{x_\nu\}$をすべては0でないEの部分集合，$\{\alpha_\nu\}$を$\{x_\nu\}$に対応する実数の集合とする。そのとき，次の(1)と(2)の条件は同値である。

(1) すべてのνに対して，$f(x_\nu) \geq \alpha_\nu$となるような$f \in E^*$が存在する。

(2) $\left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_{\nu_i} : \lambda_i > 0, \ \|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{\nu_i}\| = 1\right\}$

の上限をσとすると$\sigma < +\infty$である。

さらに，$S_\rho = \{f \in E^* : f(x_\nu) \geq \alpha_\nu, \ \forall_\nu\}$とし，条件(1)のもとで$S_\rho \ni 0$なら

$$\min_{f \in S_\rho} \|f\| = \sigma.$$

証明 (1)⇒(2) すべてのνに対して，$f(x_\nu) \geq \alpha_\nu$ なる $f \in E^*$をとろう。そして $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$を$\lambda_i >$ 0であり，$\|\sum_{i=1}^n \lambda_i x_{\nu_i}\| = 1$なるものとする。$\lambda_i f(x_{\nu_i}) \geq \lambda_i \alpha_{\nu_i}$ なので

$$f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_{\nu_i}) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_{\nu_i}$$

をうる。それゆえ，

$$\|f\| \geq |f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_{\nu_i})| \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_{\nu_i}$$

である。これは$\sigma < +\infty$を意味する。

(2)⇒(1) $\sigma < +\infty$ なので $S_\sigma = \{f \in E^* : \|f\| \leq \sigma\}$ とすると，S_σは weak* compact な凸集合である。νに対してS_σ上の函数F_νを

$$F_\nu(f) = \alpha_\nu - f(x_\nu)$$

で定義すると，F_ν はS_σ上で連続なアフィン函数である。補助定理10を用いて(1)を証明しよう。$\{\lambda_i\}_{i=1}^n$を$\lambda_i \geq 0$で$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$とする。もし，$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_{\nu_i} \neq 0$ならば Hahn-Banach の定理を用いて

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_{\nu_i} - \sum_{i=1}^n f(\lambda_i x_{\nu_i}) \leq 0 \cdots\cdots(*)$$

なる $f \in E^*(\|f\| = \sigma)$ をとることができるし，$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_{\nu_i} = 0$なら後で証明するが$\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_{\nu_i} \leq 0$なので（*）をみたす$f$として$f = 0$をとればよい。だから補助定理10よりすべての$\nu$に対して$f(x_\nu) \geq \alpha_\nu$なる$f \in S_\sigma \subset E^*$の存在がわかるのである。$\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_{\nu_i} \leq 0$なることを示す。$\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_{\nu_i} > 0$とすると，仮定より0でない$x_{\nu_0}$が存在するので$a \cdot \mu + \frac{1}{\|x_{\nu_0}\|} \alpha_{\nu_0} > \sigma$ なる$a > 0$ をとることができる。ところが，

$$\|\sum_{i=1}^n a\lambda_i x_{\nu_i} + \frac{1}{\|x_{\nu_0}\|} x_{\nu_0}\| = 1$$

なので

$$\sum_{i=1}^n a\lambda_i \alpha_{\nu_i} + \frac{1}{\|x_{\nu_0}\|} \alpha_{\nu_0}\| \leq \sigma$$

となり，ただちに矛盾をうる。

次に(1)のもとで$S_\rho \ni 0$とすると$0 < \sigma < \infty$であり，$S_\sigma = \{f \in E^* : \|f\| \leq \sigma\}$ の中に解があるので $\min_{f \in S_\rho} \|f\| \leq \sigma$ は明らかである。また$f \in S_\rho$なら

$$\|f\| \geq f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_{\nu_i}\right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_{\nu_i}$$

なので$\|f\| \geq \sigma$をうる。すなわち $\min_{f \in S_\rho} \|f\| \geq \sigma$ である。ゆえに

$$\min_{f \in S_\rho} \|f\| = \sigma$$

をうる。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　（証了）

これらの補助定理を用いて，Schmeidler〔41〕と Kannai〔24〕によるゲームの core に関する定理を証明してみようと思う。

Xをある集合とし，$\mathscr{A}$をXの部分集合からなる一つの algebra とする。$B(X,\mathscr{A})$によって有界な$\mathscr{A}$-measurable functions の作る Banach 空間を表わし，$B^*(X,\mathscr{A})$によって$\mathscr{A}$上の有界な finite additive set functions の全体を表わすことにする。$v\in V(X,\mathscr{A})$が game であるとは$v:\mathscr{A}\to R_+$であり，$v(\phi)=0$のときである。game v の core とはすべての$A\in\mathscr{A}$に対して$\mu(A)\geq v(A)$であり，$\mu(X)=v(X)$である$\mu\in B^*(X,\mathscr{A})$の全体のことである。これを$\mathscr{C}(X,\mathscr{A},v)$であらわす。次の定理は Schmeidler〔41〕によって得られたものであるが，補助定理10を用いることによって簡単に証明することができる。

定理33　vを game としたとき，次の(1)，(2)，(3)の条件は同値である。

(1)　$\mathscr{C}(X,\mathscr{A},v)\neq\phi$.

(2)　$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\geq 0$と$A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{A}$に対して

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v(A_i)\leq v(X)\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i 1_{A_i}\|$$

が成立する。

(3)　$A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{A}$に対して

$$\sum_{i=1}^{n}v(A_i)\leq v(X)\|\sum_{i=1}^{n}1_{A_i}\|$$

が成立する。ここで1_AはAの特性函数である。

証明　(1)⇒(2)　$\mu\in\mathscr{C}(X,\mathscr{A},v)$としよう。すると$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\geq 0$と$A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{A}$に対して

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v(A_i)\leq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\mu(A_i)&=\mu(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i 1_{A_i})\\&\leq\mu(1)\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i 1_{A_i}\|\\&=v(X)\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i 1_{A_i}\|\end{aligned}$$

となる。(2)⇒(3)は明らか。

(3)⇒(2)　$C=\{\mu\in B^*(X,\mathscr{A}):\mu(X)=v(X)\}$としよう。$A\in\mathscr{A}$に対して$C$上の函数$F_A$を

$$F_A(\mu)=v(A)-\mu(A)$$

で定義すると，(3)の仮定より任意の$A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{A}$に対して

$$\sum_{i=1}^{n} v(A_i) \leq v(X) \| \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i} \| = \mu(\sum_{i=1}^{n} 1_{A_i})$$

なる$\mu \in C$が存在するので補助定理10を用いて

$$\mu(A) \geq v(A), \quad \mu(X) = v(X)$$

なる$\mu \in C$をうることができる。 (証了)

次にKannai〔24〕の定理を証明する。

定理34 vをgameとしたとき，次の条件(1)と(2)は同値である。

(1) $\mathscr{C}(X, \mathscr{A}, v)$ の中にcountably additive set functionが存在する。

(2) $w(\phi) = 0$であり，しかも(i), (ii)をみたす$\mathscr{A}$上の非負なset function wが存在する。

(i) 共通点をもたない$\mathscr{A}$の減少列$\{A_i\}$に対して$w(A_i) \to 0$ ($i \to \infty$) である。

(ii) $|\sum a_i 1_{A_i}(x) - \sum b_j 1_{B_j}(x)| \leq 1$, $x \in X$

となる正の数$\{a_i\}_{i=1}^{n}$, $\{b_j\}_{j=1}^{m}$と$\{A_i\}_{i=1}^{n}$, $\{B_j\}_{j=1}^{m} \subset \mathscr{A}$に対して

$$\sup\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v(A_i) - \sum_{j=1}^{m} b_j w(B_j)\right) \leq v(X)$$

である。

証明 μを(1)をみたすset functionとする。そのとき，$\mu = w$おけば

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v(A_i) - \sum_{j=1}^{m} b_j w(B_j) \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(1_{A_i}) + \sum_{j=1}^{m} b_j \mu(-1_{B_j})$$
$$\leq \| \mu \| \| \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i} - \sum_{j=1}^{m} b_j 1_{B_j} \|$$

となり，(2)が証明された。

逆に(2)が成立するとしよう。そのとき，

$$\mu(1_A) \geq v(A), \quad A \in \mathscr{A}$$
$$\mu(-1_B) \geq -w(B), \quad B \in \mathscr{A}$$

は補助定理11によって，$\mu \in B^*(X, \mathscr{A})$, $\| \mu \| \leq v(X)$ なる解μをもつ。そのときμは非負であり，$\mu(1_B) \leq w(B)$ より$B_i \downarrow \phi$ なら$\mu(1_{B_i}) \downarrow 0$ であるのでcountably additive である。μが$\mathscr{C}(X, \mathscr{A}, v)$ に入ることは明らか。よって定理は証明される。 (証了)

<文　献>

〔1〕 青木利夫—高橋　渉，集合・位相空間要論，培風館，1979。

〔2〕 J. B. Baillon, "Un theórème de type ergodic pour les contractions non linéaires dans un espace de Hilbert", *C. R. Acad. Sci. Paris*, 280 (1975), 1511-1514.

〔3〕 V. Barbu, *Nonlinear semigroups and evolution equations in Banach spaces*, Editura Academiei R. S. R., Bucuresti, 1976.

〔4〕 V. Barbu - Th. Precupanu, *Convexity and optimization in Banach spaces*, Editura Academiei R. S. R., Bucuresti, 1978.

〔5〕 H. Brézis, *Operateurs maximaux monotones et semi-groups de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland Publishing Company, Amsterdom, 1973.

〔6〕 F. E. Browder, "Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space," *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 54 (1965), 1041-1044.

〔7〕 ———, Convergence of approximants to fixed points of nonexpansive nonlinear mappings in Banach spaces," *Arch, Rat. Mech. Anal.*, 24 (1967), 82-90.

〔8〕 ———, "The fixed point theory of multi-valued mappings in topological vector spaces," *Math. Ann.*, 177 (1968), 283-301.

〔9〕 R. E. Bruck Jr., "Asymptotic convergence of nonlinear contraction semigroups in Hilbert space," *J. Functional Analysis*, 18 (1975), 15-26.

〔10〕 ———, "A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces," to appear.

〔11〕 M. M. Day, "Amenable semigroups," *Illinois J. Math.*, 1 (1957), 509-544.

〔12〕 ———, "Fixed point theorem for compact convex sets," *Illinois J. Math.*, 5 (1961), 585-590.

〔13〕 N. Dunford - J. T. Schwartz, *Linear operators*, Part 1, Interscience, New York, 1958.

〔14〕 K. Fan, "Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces," *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 38 (1952), 121-125.

〔15〕 ———, "On systems of linear inequalities, in Linear Inequalities and Related Systems," "*Annals of Math. Studies*, No. 38 (1956), 99-156.

〔16〕 ———, "Existence theorems and extreme solutions for inequalities concerning convex functions or linear transformations," *Math. Z.*, 68 (1957), 205-217.

〔17〕 ———, "Applications of a theorem concerning sets with convex sections," *Math. Ann.*, 163 (1966), 189-203.

〔18〕 ———, "Extensions of two fixed point theorems of F. E. Browder," *Math. Z.*, 112(1969), 234-240.

〔19〕 N. Hirano - W. Takahashi, "Nonlinear ergodic theorems for nonexpansive mappings in Hilbert spaces," *Kodai Math. J.*, 2 (1979), 11-25.

〔20〕 N. Hirano, H. Komiya -W. Takahashi, "A generalization of the Hahn-Banach extension theorem," *J. Math. Anal. Appl.*, to appear.

〔21〕 S. Itoh - W. Takahashi, "Single-valued mappings, multivalued mappings and fixed point theorems", *J. Math. Anal. Appl.*, 59 (1977), 514-521.

〔22〕 ———, "The common fixed point theory of singlevalued mappings and multivalued mappings," *Pacific J. Math.*, 79 (1978), 493-508.

〔23〕 S. Itoh, W. Takahashi - K. Yanagi, "Variational inequalities and complementarity problems," *J. Math. Soc. Japan*, 30 (1978), 23-28.

〔24〕 Y. Kannai, "Countably additive measures in cores of games," *J. Math. Anal. Appl.*, 27 (1969), 227-240.

〔25〕 S. Karamardian, "generalized complementarity problem," *J. Optimization Theory and*

Applications, 8 (1971), 161-168.

[26] J. L. Kelly, I. Namioka, et al., *Linear topological spaces*, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1963.

[27] Y. Kijima - W. Takahashi, "A fixed point theorem for nonexpansive mappings in metric space," *Kōdai Math. Sem. Rep.*, (1969), 326-330.

[28] W. A. Kirk, "A fixed point theorem for mappings which do not increase distance," *Amer. Math. Monthly*, 72 (1965), 1004-1006.

[29] M. Kojima, "Computational methods for solving the nonlinear complementarity problem," *Keio Eng. Rep.*, 27 (1974), 1-41.

[30] K. Kuga, "Brouwer's fixed point theorem: An alternative proof," *SIAM J. Math. Anal.*, 5 (1974), 893-897.

[31] T. C. Lim, "A fixed point theorem for families of nonexpansive mappings," *Pacific J. Math.*, 53 (1974), 487-493.

[32] G. J. Minty, "On the monotonicity of the gradient of a convex function," *Pacific J. Math.*, 14 (1967), 243-247.

[33] T. Mitchell, "Fixed points of reversible semigroups of nonexpansive mappings," *Kōdai Math. Sem. Rep.*, 21 (1970), 322-323.

[34] Z. Opial, "Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings," *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73 (1967), 591-597.

[35] A. Pazy, " Asymptotic behavior of contractions in Hilbert space," *Israel J. Math.*, 9 (1971), 235-240.

[36] ———, "On the asymptotic behavior of semigroups of nonlinear contractions in Hilbert space," *J. Functional Analysis*, 27 (1978), 292-307.

[37] R. P. Phelps, "Convex sets and nearest points," *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8 (1957), 790-797.

[38] S. Reich, "Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces," *J. Math. Anal. Appl.*, to appear.

[39] R. T. Rockafellar, "On the maximal monotonicity of subdifferential mappings," *Pacific J. Math.*, 33 (1970), 209-216.

[40] K. Sakamaki - W. Takahashi, "Systems of convex inequalities and their applications," *J. Math. Anal. Appl.*, 70 (1979), 445-459.

[41] D. Schmeidler, "On balanced games with infinitely many players," Research program in game theory and mathematical economics; RM 28 (June 1967), The Hebrew University of Jerusalem, Israel.

[42] M. Sion, "On general minimax theorems," *Pacific J. Math.*, 8 (1958), 171-176.

[43] W. Takahashi, "Fixed point theorem for amenable semigroup of nonexpansive mappings," *Kōdai Math. Sem. Rep.*, 21 (1969), 383-386.

[44] ———, "A convexity in metric space and nonexpansive mappings 1," *Kōdai Math. Sem. Rep.*, 22 (1970), 142-149.

[45] ———, "Invariant functions for amenable semigroups of positive contractions on L^1," *Kōdai Math. Sem. Rep.*, 23 (1971), 131-143.

〔46〕 ———, "Ergodic theorems for amenable semigroups of positive contractions on L^1," *Sci. Rep. Yokohama Nat. Univ.*, 19 (1972), 5-11.

〔47〕 ———, "Nonlinear variational inequalities and fixed point theorems," *J. Math. Soc. Japan*, 28 (1976), 168-181.

〔48〕 ———, "Nonlinear complementarity problem and systems of convex inequalities," *J. Optimization Theory and Applications*, 24 (1978), 499-506.

（東京工業大学理学部情報科学科助教授）