Title	多意写像の凸性について(その3)
Sub Title	On the convexity of multi-valued mappings (3)
Author	渡部, 隆一
Publisher	慶應義塾経済学会
Publication year	1979
Jtitle	三田学会雑誌 (Keio journal of economics). Vol.72, No.6 (1979. 12) ,p.805(113)- 834(142)
JaLC DOI	10.14991/001.19791201-0113
Abstract	
Notes	論説
Genre	Journal Article
URL	https://koara.lib.keio.ac.jp/xoonips/modules/xoonips/detail.php?koara_id=AN00234610-19791201-0113

多意写像の凸性について（その3）

渡　部　隆　一

この論文は〔13〕，〔14〕の続きである。次の3章はその中において既に解説した。

以下では

4章　凸多意写像の構成

について論ずる。この一連の論文の主要部分である。

1章において解説したように，

$$f: X \longrightarrow R$$

が凸関数であるとは，Xに含まれる任意の2点a，bと，$\lambda+\mu=1$，$\lambda \geqq 0$，$\mu \geqq 0$である任意の2つの実数λ，μに対して不等式

$$(\#) \qquad f(\lambda a+\mu b) \leqq \lambda f(a)+\mu f(b)$$

が成り立つという事である。そして，凸関数の基本性質として次の5つの性質をあげ，それが凸関数の概念を拡張してゆく時，どのような形で保存されるかを考察してきた。

〔CF—1〕 関数fが凸関数であるための必要十分条件は，fのエピグラフ$E[f]$が凸集合であることである。

〔CF—2〕 凸関数fの本質的定義域$\mathrm{dom} f$ の内部$(\mathrm{dom} f)^i$に含まれるある1点の近傍においてfが上に有界ならば，fは$(\mathrm{dom} f)^i$ において局所的に有界であり，局所的にリプシッツ条件を満たす。したがって，fは$(\mathrm{dom} f)^i$ において連続となり，$(\mathrm{dom} f)^i$ に含まれる任意のコムパクト集合においてfはリプシッツ条件を満たす。

〔CF—3〕 下半連続な関数fが凸関数であるための必要十分条件は，$\mathrm{dom} f$の任意の内点において，fの支持関数が存在することである。

〔CF—4〕 凸関数fが下半連続ならば，∂f は極大単調増加写像である。

〔CF—5〕 凸関数fが下半連続ならば，その共役関数f^*も下半連続な凸関数で，次が成り立つ。

(1) $\forall x,\ \forall x^*;\ \langle x,\ x^*\rangle \leqq f(x)+f^*(x^*)$

(2) $\langle x,\ x^*\rangle = f(x)+f^*(x^*) \Longleftrightarrow x^* \in \partial f(x)$

(3) $\partial(f^*)=(\partial f)^{-1}$

(4) $f^{**}=f$

さて，多意写像$f: X \twoheadrightarrow Y$の凸性を定義するためには，何らかの意味で不等式(#)が成り立たなくてはならないし，また〔CF—1〕～〔CF—5〕の大部分が保存されるようでないと具合が悪い。それには，凸関数の性質を凸多意写像に移行させるような数学的な機構を作る事が出来ればよい。以下の議論の力点はそこに置かれる事になる。

今までの1章～3章については数学的証明を省略したが，以下はこの論文の主要部分でもあるし，引用文献の中には入手し難い物もあるようなので，証明は特に有名な定理以外は原則として述べる事にした。

4章　凸多意写像の構成

多意写像に凸性を定義するためには，まず多意写像の値域に順序が導入されていなくてはならない。そこで順序に関して一般的な考察をする事から始める。記号は1章～3章までに用いたのと同様なものを用いるが，念のため次にまとめておく。

L；　実バナッハ空間。ただしLは零元でない元を少なくとも1つ含むとする。

L^*；　Lの共役空間，すなわちL上の連続な線形関数全体の集合。

A^iまたは int A；　Aの内部（強位相の意味で）。

$\bar{A}$または cl$A$；　Aの閉包（強位相の意味で）。

$B=\{x \mid \|x\| \leqq 1\}$；　空間$L$の原点と中心とする半径1の閉球。

$B^*=\{x^* \mid \|x^*\| \leqq 1\}$；　空間$L^*$の原点を中心とする半径1の閉球。

$U=\{x \mid \|x\| < 1\}$；　空間Lの原点を中心とする半径1の開球。

$U^*=\{x^* \mid \|x^*\| < 1\}$；　空間$L^*$の原点を中心とする半径1の開球。

§4.1　クライン空間

まず，公理(K−1)～(K−5)を導入する。

空間Lの部分集合$C(\neq\emptyset)$が，次の(K−1)，(K−2)を満たす時，Cを **wedge** という。

(K−1)　$C+C \subset C$

(K−2)　$\forall \lambda \geqq 0;\ \lambda C \subset C$

この(K−1)，(K−2)よりCは凸集合であって零元0を含む事を注意しておく。wedge Cが与えら

れると，L上に次のように順序“$\leqq$”が定義される。

$$x \leqq y \Longleftrightarrow y - x \in C$$

この順序を **C により導入された順序**という。以下，“$x \leqq y$”を“$y \geqq x$”とも書く事にする。

順序“$\leqq$”は，明らかに次の性質と持っている。

(a) $0 \leqq x \Longleftrightarrow x \in C$

(b) $\forall x$; $x \leqq x$ （反射的 ; reflexive）

(c) $x \leqq y$, $y \leqq z \Longrightarrow x \leqq z$ （推移的 ; transitive）

(d) $x \leqq y$, $\lambda \geqq 0 \Longrightarrow \lambda x \leqq \lambda y$

(e) $z \in L$, $x \leqq y \Longrightarrow x + z \leqq y + z$

wedge Cにより順序の導入された空間Lを(L, C)で表し，順序づけられたバナッハ空間と呼ぶ。Cがさらに次の条件を満たす時，Cは**凸錐**と呼ばれる。

(K−3)　$C \cap (-C) = \{0\}$

この場合には，Cにより導入された順序は次の性質を持つ。

(f) $x \leqq y$, $y \leqq x \Longrightarrow x = y$ （反対称的 ; antisymmetric）

以上の(K−1)〜(K−3)は順序を導入する時にCに課せられる普通の公理であるが，さらに次の2つの公理を追加する。

(K−4)　Cは閉集合である。

(K−5)　Cは少なくとも1つの内点を持つ。すなわち，$\mathrm{int}\, C \neq \emptyset$。

この(K−4)が満たされると，順序“$\leqq$”は次の性質を持つ。

(g) $x_n \leqq y_n$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} y_n = y \Longrightarrow x \leqq y$

以上の5つの公理(K−1)〜(K−5)を満たす空間(L, C)を**クライン空間** (Krein space) と呼ぶ。クライン空間(L, C)の元でCに含まれるもの，すなわち$0 \leqq x$となるxを**非負** (non-negative) の元という。さらに，$0 \leqq x$で$0 \neq x$となるxを**半正** (semi-positive) の元といい，記号“$0 \leq x$”またはx“≥ 0”で表す。また，int Cに含まれる元xを**正** (positive) の元といい，記号“$0 < x$”または“$x > 0$”で表す。

上の公理 (K−5) は，有限次元の空間たとえばR^nなどを考えている限りでは，無理のない仮定のように思えるが，実はかなり強い仮定である。その点を説明するために，用語を1つ導入しておく。

すなわち，空間Lの部分集合Aが，$L = A - A$を満たす時，Aを**再生的** (reproducing) であるという。

〔例1〕 数直線上の閉区間$[a, b]$上で定義された実数値連続関数の全体を$\mathscr{C}$で表す。$\mathscr{C}$のノルムは次のように定める。

$$\|x\|=\max_{a\leqq t\leqq b}|x(t)|$$

空間$\mathscr{C}$はバナッハ空間となる。

空間$\mathscr{C}$における非負の元を次のように定める。

$$x\geqq 0 \Longleftrightarrow x(t)\geqq 0 \quad (\forall t\in[a, b])$$

非負の元全体Cは凸錐になり，定数関数 $x(t)=1$ （$\forall$ t）は正の元となる。したがって$\mathscr{C}$はクライン空間となる。

また，

$$x^{+}(t)=\begin{cases} x(t) & (x(t)\geqq 0 \quad \text{の時}) \\ 0 & (x(t)<0 \quad \text{の時}) \end{cases}$$

$$x^{-}(t)=\begin{cases} 0 & (x(t)\geqq 0 \text{ の時}) \\ -x(t) & (x(t)<0 \text{ の時}) \end{cases}$$

とすれば，

$$x=x^{+}-x^{-} \qquad \therefore \quad \mathscr{C}=C-C$$

となるから，Cは再生的である。

空間$\mathscr{C}$において，非負で単調増加な連続関数の全体をKとすれば，Kはやはり凸錐となるが再生的ではない。それは，非負で単調増加な連続関数の差として表される関数は有界変動な関数であるから，任意の連続関数をその形に表す事は出来ないからである。

〔例2〕 数直線上の閉区間 $[a, b]$ で定義された関数で$|x(t)|^{p}(1\leqq p<\infty)$ が可積分となるようなもの，すなわち，

$$\int_{a}^{b}|x(t)|^{p}\,dt<+\infty$$

となるようなもの全体を$\mathscr{L}^{p}$ で表す。この空間のノルムは次のように定める。

$$\|x\|=\int_{a}^{b}|x(t)|^{p}\,dt$$

空間 $\mathscr{L}^{p}$ はバナッハ空間である。$\mathscr{L}^{p}$に属する非負の関数全体をCとすれば，Cは凸錐になり，再生的であるが，公理(K−5)は満たさない。それは次のように考えればわかる。

任意の正の数εと，区間 $[a, b]$ に属する長さ$\alpha(>0)$の区間をIとする。

$$a(t)=\begin{cases} \left(\dfrac{\varepsilon}{\alpha}\right)^{\frac{1}{p}} & (t\in I) \\ 0 & (t\notin I) \end{cases} \qquad \therefore \quad \|a\|=\varepsilon$$

さらに，$y(t)=x(t)-a(t)$ とおけば，

$$\|x-y\|=\|a\|=\varepsilon$$

ところが，αを十分0に近づければ，$y\notin C$ となってしまう。したがって，$\mathrm{int}\,C=\emptyset$ となり，空間 $\mathscr{L}^{p}$ はクライン空間ではない。

空間$\mathscr{L}^p$がクライン空間とならない原因は，クライン空間では，順序をノルムとは独立に定めるところにある。上の場合に，ノルムは積分で定義される。積分は1種の加重平均である。しかるに，$x \geqq 0$とは，各点毎 (point wise) に$x(t) \geqq 0$という事であるから，xの近くにyが存在するということは，平均が近くにあるという事で，各点毎に近くにあるという事ではない。すなわち，$\mathscr{L}^p$においてはノルムを定める考え方と順序を定める考え方は系統が異なるのであって，その為に，上のような事が起こるのである。

今の〔例1〕，〔例2〕は順序づけられたバナッハ空間の例として代表的なものである。空間に導入された順序と位相の関係には微妙なものがあるが，この論文の目的は凸多意写像の構成にあるから，その点については深入りしない。以下この節で解説するクライン空間の諸性質は，〔1〕，〔3〕，〔4〕，〔5〕，〔6〕，〔12〕などに解説されているものを整理したものである。

クライン空間の理論では，空間Lとその双対空間L^*との関係が重要な位置を占めている。

空間Lの双対空間L^*の元x^*のxにおける値を$\langle x, x^* \rangle$あるいは$x^*(x)$で表す。x^*のノルムは次の式で定義される。(L^*の元は連続な線形関数であるから，それをfで表す事もある)

$$\|x^*\| = \sup_{\|x\| \leqq 1} |\langle x, x^* \rangle|$$

よく知られているように，このノルムに関してL^*はバナッハ空間となる。

任意の非負の元xに対して$\langle x, x^* \rangle$が非負の時，すなわち，

$$0 \leqq x \Longrightarrow \langle x, x^* \rangle \geqq 0$$

が成り立つ時，x^*は非負であるといって$0 \leqq x^*$あるいは$x^* \geqq 0$と書き表す。

$$C^* = \{x^* \mid 0 \leqq x^*\}$$

とおくと，C^*はL^*の wedge となり，C^*によってL^*に順序が導入される。

元x^*について，x^*が非負で恒等的に0でない時，すなわち，$x^* \geqq 0$で$x^* \neq 0$の時，x^*は**半正**であるといって$0 \leq x^*$あるいは，$x^* \geq 0$と書き表す。また，空間Lの任意の$x \geq 0$に対して$\langle x, x^* \rangle > 0$の時$x^*$は**正**であるといって，$0 < x^*$あるいは，$x^* > 0$と書き表す。

〔例3〕 区間$[a, b]$において連続な関数φを1つ定め，例1の空間$\mathscr{C}$の元xに対して，

$$\langle x, x^* \rangle = \int_a^b x(t)\varphi(t)dt$$

とおくと，$x^* \in \mathscr{C}^*$であり，そのノルムは次のように表せる。

$$\|x^*\| = \int_a^b |\varphi(t)| dt$$

区間$[a, b]$において，$\varphi(t) \geqq 0$ならば$x^* \in C^*$であり，特に$\varphi(t) > 0$ならば，$x^* > 0$である。

空間Lの任意の元xに対して恒等的に0となる関数，すなわち定数関数0がC^*に属する事は明

らかであるが，それ以外の線形関数 x^*，すなわち半正の線形関数が存在するかどうかは決して明らかではない。しかし，クライン空間においては，分離定理より半正の線形関数の存在を導く事が出来る。

命題1　クライン空間 (L, C) においては，$x^* \geqq 0$ となる $x^* \in C^*$ が存在する。

〔証明〕　公理（K−3）より $C \neq L$ であり，公理（K−5）より $\mathrm{int}\, C \neq \emptyset$ である。凸錐 C に含まれない1点を a とすると，分離定理より点 a と凸錐 C を分離するような閉超平面 H が存在する。すなわち，連続な線形関数 x^*（$\neq 0$）が存在して，

(1)　　$\langle a, x^* \rangle \leqq \alpha \leqq \langle x, x^* \rangle, \ \forall x \in C$

となる。この x^* に対して，C の元 b が存在して，

$$\langle b, x^* \rangle < 0$$

となったとすると，C は凸錐であるから任意の $\lambda > 0$ に対して $\lambda b \in C$ であり，

$$\langle \lambda b, x^* \rangle = \lambda \langle b, x^* \rangle$$

が成り立つ。この式で $\lambda \longrightarrow +\infty$ とすれば，$\langle \lambda b, x^* \rangle \longrightarrow -\infty$ となるから，(1)の式は成り立たない。したがって，

$$\langle x, x^* \rangle \geqq 0, \ \forall x \in C$$

である。以上から，$x^* \geqq 0$ である。　　Q. E. D.

公理（K−5）より，半正の線形関数の存在は導けたわけであるが，正の線形関数の存在は今までの公理よりは導けない。それは，空間 L に wedge C が与えられると，それに対応して空間 L^* に wedge C^* が定まるわけであるが，その場合 C が大きくなれば C^* は小さくなり逆も成立する。すなわち，L の wedge C_1, C_2 に対応する L^* の wedge を C_1^*, C_2^* とすれば，

$$C_1 \supset C_2 \Longleftrightarrow C_1^* \subset C_2^*$$

という関係が成り立つ。したがって，C が大きくなり過ぎると C^* は小さくなって，正の線形関数の存在が保証されなくなるのである。ところで，多意写像の凸性を論ずる為には，C が大き過ぎても小さ過ぎても空間 L の順序が特殊なものとなり，理論が円滑に展開できない。公理（K−5）は，C が小さくなり過ぎない為の仮定であるが，それでは，凸錐 C が大きくなり過ぎない為には，どのような公理を課すべきであろうか。結論を急ぐ前に，公理（K−1）〜（K−5）より導かれる基本的な結果に目を向けよう。

例題2　凸錐 C の内部 $\mathrm{int}\ C$ は再生的である；　　$L = \mathrm{int}\ C - \mathrm{int}\ C$

〔証明〕　公理（K−5）より C には内点がある。凸錐 C の内点の1つを a とすると，点 a を中心と

する半径$r(>0)$の開球$a+rU$でCの内部に含まれるものがある。すなわち，適当な正の数rをとると次が成り立つ。

$$a+rU\subset \mathrm{int}\,C$$

空間Lの任意の点をx，これに対して適当な正の数λをとると，

$$\lambda x\in rU$$

が成り立つように出来る。したがって，

$$a+\lambda x\in \mathrm{int}\,C$$

すなわち，次が成り立つような元bが存在する。

$$a+\lambda x=b,\quad b\in \mathrm{int}\,C$$

これより

$$x=\frac{1}{\lambda}b-\frac{1}{\lambda}a$$

明らかに，$\frac{1}{\lambda}a$，$\frac{1}{\lambda}b$は int Cに属するから，これらをそれぞれu，vとおくと，

$$x=v-u,\quad v\in \mathrm{int}\,C,\quad u\in \mathrm{int}\,C$$

$$\therefore\quad x\in \mathrm{int}\,C-\mathrm{int}\,C,\quad L=\mathrm{int}\,C-\mathrm{int}\,C$$

Q. E. D.

この命題２を使うと，ある線形関数x^*に対して

$$\forall u\in \mathrm{int}\,C\,;\ \langle u,\ x^*\rangle=0$$

が成り立っているならば，任意の元$x\in L$は，$x=u-v$，$u\in \mathrm{int}\,C$，$v\in \mathrm{int}\,C$という形に書き表されるから，

$$\langle x,\ x^*\rangle=\langle u,\ x^*\rangle-\langle v,\ x^*\rangle=0-0=0$$

$$\therefore\quad \forall x\in L\,;\ \langle x,\ x^*\rangle=0$$

したがって，$x^*=0$が導かれる。

命題３　空間Lの任意の２つの元x，yに対して，「$x<z$ かつ $y<z$」となる正の元zが存在する。

〔証明〕　命題２より，Lの元xは次のように書き表せる。

$$x=u-v,\quad u>0,\quad v>0.$$

ところが，

$$u-(u-v)=v>0$$

$$\therefore\quad u-v<u,\quad x<u$$

同じようにして，$y<w$となる正の元wが存在する。いま$u+w=z$とおけば，$u<z$，

$w < z$ となるから，

$$x < z, \quad y < z \qquad \text{Q. E. D.}$$

定義 1　空間 L の任意の元 x に対して適当な正の数 λ をとれば，不等式

$$(4.1) \quad -\lambda u \leqq x \leqq \lambda u$$

が成り立つように出来る時，u を空間 L の**順序単位**（order－unit）という。

命題 4　元 u に関する次の2つの条件は同値である。

(1)　$u > 0$　　(2)　u は順序単位である。

〔証明〕　(1) $\Longrightarrow$ (2)：—— 元 u は正であるから，適当な正の数 r をとると，

$$u + rU \subset C$$

が成り立つように出来る。

$x = 0$ ならば，不等式 (4.1) は任意の $\lambda > 0$ に対して成り立つ。

$x \neq 0$ ならば，十分大きな正の数 λ に対して，

$$u \pm \frac{1}{\lambda} x \in u + rU \subset C$$

$$\therefore \quad u \pm \frac{1}{\lambda} x \geqq 0, \quad -\lambda u \leqq x \leqq \lambda u \qquad \text{Q. E. D.}$$

(2) $\Longrightarrow$ (1)：—— 元 u は順序単位であるとする。空間 L には正の元が存在するから，その1つを x とすると，

$$\exists \lambda > 0 \,; \quad x \leqq \lambda u$$

したがって，$0 < \lambda u$ となるから，$0 < u$.　　Q. E. D.

命題 5　$u^* \geq 0$，$x + rB \subset C$ $(r > 0)$ ならば，

$$\langle x, u^* \rangle \geqq r \|u^*\|$$

〔証明〕　空間 L の元 e で，$\|e\| \leqq 1$ となるものを任意に1つとると，

$$x \pm re \in C$$

$$\therefore \quad \langle x \pm re, u^* \rangle \geqq 0$$

したがって，

$$\langle x, u^* \rangle \geqq \pm r \langle e, u^* \rangle \qquad \therefore \quad \langle x, u^* \rangle \geqq r \, |\langle e, u^* \rangle|$$

これから，

$$\langle x, u^* \rangle \geqq r \sup_{\|e\| \leq 1} \langle e, u^* \rangle = r \|u^*\| \qquad \text{Q. E. D.}$$

この命題より，次の公式が得られる。

$$u^* \geqq 0,\ x > 0 \Longrightarrow \langle x,\ u^* \rangle > 0$$

この公式からは，Cの内部では $\langle x,\ u^* \rangle > 0$ となる事がいえただけであって，Cの0以外のすべての元xに対して u^* の値が正となる事がいえたわけではない。

定義2　空間Lの2つの元a，b（$a \leqq b$）に対して，

$$[a,\ b] = \{x \mid a \leqq x \leqq b\}$$

とおき，**順序区間** (order-interval) と呼ぶ。また，Lの部分集合Eに対して，

$$E \subset [a,\ b]$$

となる元a，bが存在する時，Eは**順序有界** (order-bounded) であるという。

明らかに，$[a,\ b]$は公理 (K−1)，(K−2)，(K−3) より閉凸集合である。また，空間Lの部分集合Eが有界であるとは，通常，

$$\exists r > 0,\ \forall x \in E;\quad \| x \| \leqq r$$

が成り立つ事を意味するが，これを順序有界と対比するために特に**ノルム有界**という事にする。

命題6　ノルム有界な集合は順序有界である。

〔**証明**〕　空間Lの部分集合Eがノルム有界であるとは，

$$\exists r > 0;\quad E \subset rB$$

という事である。したがって，任意の$r > 0$に対して rB が順序有界である事を証明すればよい。公理 (K−5) より，適当な$\rho > 0$をとると，

$$u + \rho B \subset C$$

となるような正の元uがある。この式を変形すれば，

$$\frac{1}{\rho} u + B \subset \frac{1}{\rho} C = C \qquad \therefore\ \frac{r}{\rho} u + rB \subset rC = C$$

$$\therefore\ \frac{r}{\rho} u + rB \geqq 0 \qquad \therefore\ rB \geqq -\frac{r}{\rho} u$$

公理 (K−5) より $\mathrm{int}\, C \neq \emptyset$ であるから，$\mathrm{int}(-C) \neq \emptyset$であって，

$$-u \in -C,\qquad -u + \rho B \subset -C$$

$$\therefore\ -\frac{r}{\rho} u + rB \leqq 0 \qquad \therefore\ rB \leqq \frac{r}{\rho} u$$

以上から，

$$-\frac{r}{\rho} u \leqq rB \leqq \frac{r}{\rho} u$$

したがって，rBは順序有界である。　　　　Q. E. D.

この命題6の逆は一般に成立しない。逆が成立するためには，クライン空間（L，C）の凸錐Cが大きくなり過ぎないように制限をつける必要がある。その制限のつけ方はいろいろあるが，その1つを紹介しよう。

定義3　次の条件が成り立つような正の数δが存在する時，凸錐Cは**正規**（normal）であるという。

$$x\in C,\ \ y\in C,\ \ \|x\|=\|y\|=1\Longrightarrow\|x+y\|\geqq\delta$$

明らかに$\delta\leqq 2$である。凸錐Cが正規であるという事の幾何学的意味は〔14〕において解説した。

命題7　凸錐Cが正規ならば，Cの任意の元x，yに対して次の不等式が成り立つ。

$$(4.2)\qquad \|x+y\|\geqq\frac{\delta}{2}\max\{\|x\|,\ \|y\|\}$$

〔証明〕　xまたはyが0の場合には，明らかに不等式（4.2）は成り立つ。

$x\neq 0$かつ$y\neq 0$の場合には，$0<\|y\|\leqq\|x\|=1$と仮定しても一般性は失われない。

その時，

$$\|x+y\|\geqq\|x\|-\|y\|=1-\|y\|$$

一方，

$$\begin{aligned}\|x+y\|&=\left\|x+\frac{y}{\|y\|}-\frac{1-\|y\|}{\|y\|}y\right\|\\&\geqq\left\|x+\frac{y}{\|y\|}\right\|-\frac{1-\|y\|}{\|y\|}\|y\|\\&\geqq\delta-(1-\|y\|)\end{aligned}$$

これら，2つの不等式を辺々加えれば，

$$2\|x+y\|\geqq\delta$$

以上から，求める不等式（4.2）が得られる。　　Q. E. D.

命題6の逆「順序有界ならばノルム有界である」は「任意の順序区間がノルム有界である」という事と同値である。これについては，次が成り立つ。

命題8　クライン空間（L，C）において，凸錐Cが正規であるための必要十分条件は，任意の$e>0$に対して，順序区間［$-e$，e］がノルム有界となる事である。

〔証明〕（必要性）：―― 正の元eを1つ固定し，$-e\leqq x\leqq e$とすると，

$$e\pm x\geqq 0\qquad\therefore\quad e\pm x\in C$$

そこで，y_1，y_2 を次のようにおく。

$$y_1=\frac{1}{2}(e+x), \qquad y_2=\frac{1}{2}(e-x)$$

明らかに，次が成り立つ。

$$y_1\in C, \quad y_2\in C, \quad y_1+y_2=e, \quad y_1-y_2=x$$

仮定より，凸錐 C は正規であるから，

$$\|e\|=\|y_1+y_2\|\geqq\frac{\delta}{2}\max\{\|y_1\|, \|y_2\|\}$$

$$\therefore \quad \max\{\|y_1\|, \|y_2\|\}\leqq\frac{2}{\delta}\|e\|$$

この不等式から，

$$\|x\|=\|y_1-y_2\|\leqq\|y_1\|+\|y_2\|\leqq\frac{4}{\delta}\|e\|$$

したがって，順序区間 $[-e, e]$ はノルム有界である。

(十分性)：——正の数 r を次のようにとる。

$$e+rU\subset C$$

空間 L の任意の元 u $(\neq 0)$ に対して，

$$e\pm r\frac{u}{\|u\|}\in C \qquad \therefore \quad -\frac{\|u\|}{r}e\leqq u\leqq\frac{\|u\|}{r}e$$

この右側の不等式は $u=0$ の時にも成り立っている。したがって，

$$x\in C, \quad y\in C, \quad \|x\|=\|y\|=1, \qquad \|x+y\|=\mu$$

とおき，上の不等式で $u=x+y$ とすれば，$\mu>0$ であって，

$$-\frac{\mu}{r}e\leqq x+y\leqq\frac{\mu}{r}e$$

$$\therefore \quad -\frac{e}{r}\leqq 0\leqq\frac{x}{\mu}\leqq\frac{x+y}{\mu}\leqq\frac{e}{r}$$

$$\therefore \quad -e\leqq\frac{r}{\mu}x\leqq e$$

仮定から，$[-e, e]$ は，ノルム有界であるから，

$$\left\|\frac{r}{\mu}x\right\|=\frac{r}{\mu}\leqq\gamma, \quad \gamma>0$$

となるような γ が存在する。したがって，

$$x\in C, \quad y\in C, \quad \|x\|=\|y\|=1\Longrightarrow\|x+y\|\geqq\frac{r}{\gamma}$$

すなわち，凸錐 C は正規となる。　　　　Q. E. D.

さて，クライン空間 (L, C) の凸錐は，どのような条件のもとに正規となるであろうか。それ

を考察する為に，次の概念を導入する。

定義4　バナッハ空間Lの凸錐Cに対して，次の条件を満たすCの部分集合VをCの基底（base）という。

(1)　Vは凸集合である。

(2)　$x \in C$，$x \neq 0$　であるようなxに対して，$\lambda x \in V$となるような正の数λがただ1つ存在する。

クライン空間（L，C）凸錐Cには必ずしも基底は存在しないが，次が成り立つ。

命題9　クライン空間（L，C）の凸錐Cに基底が存在する為の必要十分条件は，正の線形関数が存在する事である。

〔証明〕（必要性）：——$x \geq 0$であるようなxに対して，$\lambda x \in V$となるような正の数λがただ1つ存在するから，このようなxに対しては，

$$f(x)=\frac{1}{\lambda}$$

とおく。$\alpha > 0$ならば，明らかに次が成り立つ。

$$f(\alpha x)=\frac{\alpha}{\lambda}=\alpha f(x)$$

次に，$x \geq 0$，$y \geq 0$に対して，$f(x)+f(y)=k$とおく。

$$\frac{1}{k}(x+y)=\frac{f(x)}{k}\left(\frac{x}{f(x)}\right)+\frac{f(y)}{k}\left(\frac{y}{f(y)}\right)$$

ところが，

$$\frac{f(x)}{k}>0,\quad \frac{f(y)}{k}>0,\quad \frac{f(x)}{k}+\frac{f(y)}{k}=1$$

であり，fの定め方から，

$$\frac{x}{f(x)} \in V,\quad \frac{y}{f(y)} \in V$$

基底Vは凸集合であるから，

$$\frac{1}{k}(x+y) \in V \qquad \therefore\ f(x+y)=k$$

$$\therefore\ f(x+y)=f(x)+f(y)$$

命題2より，Lの任意の元xは，

$$x=u-v,\ u>0,\ v>0,$$

と表せる。このような表し方は必ずしも一意的でないが，

$$u-v=u'-v',\ u,\ v,\ u',\ v'>0$$

とすると，

$$u+v'=u'+v\in \mathrm{int}\,C$$

$$\therefore\quad f(u)+f(v')=f(u')+f(v)$$

$$\therefore\quad f(u)-f(v)=f(u')-f(v')$$

したがって，

$$f(x)=f(u)-f(v)$$

とおく事により，fはL全体において定義される。明らかにfは加法的で正の同次性を満たし，$f(-x)=-f(x)$となるから線形である。

次に，正の元uを１つ取り，正の数rを十分小さくとれば，

$$\| e\|\leqq 1 \Longrightarrow u\pm re>0$$

$$\therefore\quad f(u)\pm rf(e)\geqq 0 \qquad \therefore\quad |f(e)|\leqq \frac{1}{r}f(u)$$

すなわち，fは単位球Bにおいて有界となるから連続である。

また，$V=C\cap\{x\,|\,f(x)=1\}$となっている。

（十分性）：――φを正の線形関数とし，次のようにおく。

$$V=C\cap\{x : \varphi(x)=1\}$$

Vは凸錐と，超平面の交わりであるから。凸集合である。次に$u\geq 0$とし，

$$\alpha u\in B,\quad \beta u\in B,\quad \alpha>0,\quad \beta>0$$

とすると，

$$f(\alpha u)=f(\beta u)=1 \quad \therefore\quad f(u)=\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\beta} \qquad \therefore\quad \alpha=\beta$$

したがって，VはCの基底となる。 Q. E. D

命題10 クライン空間（L，C）の凸錐Cがノルム有界な基底を持てば，Cは正規である。

〔証明〕 命題８から，任意の$e>0$に対して，順序区間［$-e$，e］がノルム有界となる事を示せばよい。

凸錐Cのノルム有界な基底を

$$V=C\cap\{x\,|\,\langle x,\ \varphi^*\rangle=1\}$$

とおく。$e\in V$と仮定しても一般性は失われない。順序区間［$-e$，e］の任意の元，すなわち，$-e\leqq x\leqq e$である任意のxに対して，$\varphi^*>0$より，

(1) $\quad -1\leqq\langle x,\ \varphi^*\rangle\leqq 1$

もし，［$-e$，e］が有界でないとすれば，［$-e$，e］は凸集合だから半直線を含む。すなわち，任意の$\lambda>0$に対して

(2)　$\lambda a \in [-e,\ e]$

となる $a \neq 0$ が存在する。不等式(1)より

$$\forall \lambda > 0\ ;\quad -1 \leqq \lambda \langle a,\ \varphi^* \rangle \leqq 1$$

したがって，

$$\langle a,\ \varphi^* \rangle = 0$$

式(2)より，

$$-e \leqq \lambda a \leqq e$$

$$\therefore\quad e + \lambda a \in C, \qquad e - \lambda a \in C$$

しかるに，

$$\langle e \pm \lambda a,\ \varphi^* \rangle = \langle e,\ \varphi^* \rangle \pm \lambda \langle a,\ \varphi^* \rangle = \langle e,\ \varphi^* \rangle = 1$$

$$\therefore\quad e \pm \lambda a \in V$$

これが任意の $\lambda > 0$ に対して成り立つ事になり，V の有界性に反する。したがって V は正規である。　Q. E. D.

〔例4〕　関数空間 $\mathscr{C}$ （〔例1〕，〔例3〕）では，非負の関数全体が構成する凸錐を C とすると，$x \in C$，$y \in C$ ならば

$$\| x \| = \max x(t), \qquad \| y \| = \max y(t)$$

したがって，

$$\| x \| = \| y \| = 1 \Longrightarrow \| x + y \| \geqq 1$$

となるから，C は正規である。しかし，

$$V = \left\{ x \in C \ \middle|\ \int_a^b x(t)dt = 1 \right\}$$

とすると，V は基底となるがノルム有界ではない。一般に C の基底はノルム有界とならない。

このように，命題10の逆は成立しないから，「凸錐 C がノルム有界な基底を持つ」という仮定より「凸錐 C が正規である」という仮定のほうが弱いわけである。以下，次のような公理を導入する。

(K−6)　　凸錐 C は正規で基底を持つ。

この場合，基底は必ずしもノルム有界とは限らない。

クライン空間（L，C）が公理（K−6）を満たすならば，正の元 e および正の線形関数 f が存在する。いま，$\langle e,\ f \rangle = \alpha$ とおけば，$\alpha > 0$ である。そこで $(1/\alpha)f = u^*$ とおくと $\langle e,\ u^* \rangle = 1$ となる。この事をを利用すると，双対空間 L^* の凸錐 C^* に対して，その基底を次のように構成する事ができる。しかもそれはノルム有界となる。

命題11　正の元eに対して，$E^*=\{u^* \mid \langle e, u^*\rangle=1, u^*\geq 0\}$とすると，$E^*$は$C^*$の基底となる。しかも$E^*$はノルム有界な閉集合である。

〔証明〕　E^*の任意の2元をu_1^*, u_2^*とすると，

$$\langle e, u_1^*\rangle=1, \quad \langle e, u_2^*\rangle=1$$

そこで，$\lambda\geqq 0$, $\mu\geqq 0$, $\lambda+\mu=1$ である任意の2つの数λ, μをとると，

$$\langle e, \lambda u_1^*+\mu u_2^*\rangle=\lambda+\mu=1 \qquad \therefore \quad \lambda u_1^*+\mu u_2^*\in E^*$$

したがって，E^*は凸集合である。

次に$v^*\geq 0$とし，$\alpha v^*\in E^*$, $\beta v^*\in E^*$, $\alpha>0$, $\beta>0$とすると，

$$\langle e, v^*\rangle=\frac{1}{\alpha}, \quad \langle e, v^*\rangle=\frac{1}{\beta} \qquad \therefore \quad \alpha=\beta$$

すなわち，E^*はC^*の基底となる。

次に，E^*がノルム有界である事を証明する。

空間Lの単位閉球Bは命題5より順序有界であるから，

$$B\subset[-a, a], \quad a\in C$$

となるaが存在する。仮定から$e>0$であるから，命題4よりeは順序単位となる。そこで元aに対して，

$$0\leqq a\leqq\lambda e, \quad \lambda>0$$

となるλをとると，Bの任意の元xに対して，次の不等式が成り立つ。

$$-\lambda e\leqq x\leqq\lambda e$$

基底E^*の任意の元をu^*とすると，$u^*\geq 0$であって，

$$-\lambda\langle e, u^*\rangle\leqq\langle x, u^*\rangle\leqq\lambda\langle e, u^*\rangle$$

$$\therefore \quad -\lambda\leqq\langle x, u^*\rangle\leqq\lambda \qquad \therefore \quad |\langle x, u^*\rangle|\leqq\lambda$$

$$\therefore \quad \|u^*\|=\sup|\langle x, u^*\rangle|\leqq\lambda$$

したがって，E^*はノルム有界である。E^*はY^*における閉超平面と閉凸錐の交わりであるから閉集合である。　　Q. E. D.

§4.2.　極大元・極小元

経済学では，最適値問題を解くという形に最終的には帰着される問題が多いが，その場合，上限・下限，最大・最小，極大・極小などの用語の用法にいささか混乱があるように思われるので，ここで解説しておきたい。

クライン空間（L, C）の部分集合をAとする。

集合Aの任意の元xに対して，$x \leqq u$となる定元uが存在するとき，$A \leqq u$と書き表し，Aは上に**有界である**といい，uをAの**上界**という。

もし，$A \leqq g$，$g \in A$が成り立つならば，gをAの**最大元**といい，$\mathrm{grt}\,A$と書き表す。最大元は必ずしも存在しないが，存在すれば唯一つしかない。

同様に，集合Aの任意の元xに対して，$v \leqq x$となる定元vが存在するとき，$v \leqq A$と書き表し，Aは**下に有界である**といい，vをAの**下界**という。

もし，$l \leqq A$，$l \in A$が成り立つならば，lをAの**最小元**といい，$\mathrm{lst}\,A$と書き表す。最小元は必ずしも存在しないが，存在すれば唯一つしかない。

集合Aの上界全体の集合が最小元を持つ時，これをAの上限といい，$\sup A$で表す。同様にAの下界全体の集合が最大元を持つ時，これをAの**下限**といい，$\inf A$で表す。

集合Aの元aに対して，$a \leq x$となるAの元xが存在しない時，aをAの**極大元**であるといい，$\max A$で表す。aが$\max A$であるとは，次が成り立つ事である。

$$A \cap (\{a\}+C)=\{a\}$$

同様に，次が成り立つ時，aをAは**極小元**といい，$\min A$で表す。

$$A \cap (\{a\}-C)=\{a\}$$

集合Aは，極大元・極小元を全然持たない事もあるし，場合によっては2個以上持つ事もある。もしAが最大元を持てば，それは唯一つの極大元であり，Aが最小元を持てば，それは唯一つの極小元である。

集合Aの元aに対して，$a<x$となるAの元xが存在しない時，aをAの**広義の極大元**であるといい，その集合を$\mathrm{w}-\max A$で表す。また，$x<a$となるAの元xが存在しない時，aをAの**広義の極小元**であるといい，その集合を$\mathrm{w}-\min A$で表す。

$$a \in \mathrm{w}-\max A \Longleftrightarrow a \in A,\ A \cap (\{a\}+\mathrm{int}C)=\emptyset$$
$$a \in \mathrm{w}-\min A \Longleftrightarrow a \in A,\ A \cap (\{a\}-\mathrm{int}C)=\emptyset$$

である。

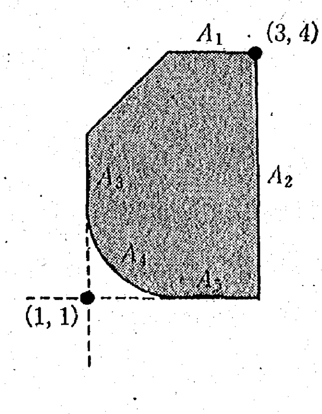
〔例1〕 R^2 において，$C=\{(x,\ y) \mid x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$とする。

次の不等式を満たす$(x,\ y)$の集合をAとする。

$$\begin{cases} 1 \leqq x \leqq 3,\ 1 \leqq y \leqq 4 \\ 2 \leqq xy,\ x+2 \geqq y \end{cases}$$

$\sup A = \mathrm{grt}\,A = \max A = (3,\ 4)$，$\inf A = (1, 1)$

$\mathrm{lst}\,A$ は存在しない。右の図で，$A_1 \cup A_2$ の元が $\mathrm{w}-\max A$で，$A_3 \cup A_4 \cup A_5$ の元が $\mathrm{w}-\min A$，A_4 の元が $\min A$ である。



もし，$(L, C)=(R, R^{\oplus})$ ならば，次が成り立つ。

$$\operatorname{grt} A=\max A=\text{w}-\max A$$

$$\operatorname{lst} A=\min A=\text{w}-\min A$$

定理1　Aをクライン空間 (L, C) の閉凸集合とすると，次の2つの条件は同値である。

(1)　$a \in \text{w}-\min A$

(2)　$\exists p^* \in C^*;\ \langle a, p^*\rangle=\min\limits_{x \in A}\langle x, p^*\rangle$

同様に，次の条件(3)，(4)は同値である。

(3)　$a \in \text{w}-\max A$

(4)　$\exists p^* \in C^*;\ \langle a, p^*\rangle=\max\limits_{x \in A}\langle x, p^*\rangle$

〔証明〕　(1)$\Longrightarrow$(2)：—— $a \in \text{w}-\min A$ とすると，

$$a \in A,\ (\{a\}-\operatorname{int} C) \cap A=\emptyset$$

分離定理により，次が成り立つような線形関数 p^* が存在する。

$$x \in A \Longrightarrow \langle a, p^*\rangle \leqq \langle x, p^*\rangle$$

$$y \in\{a\}-\operatorname{int} C \Longrightarrow\langle y, p^*\rangle \leqq\langle a, p^*\rangle$$

上の y は，次のように書ける。

$$y=a-u, \quad u>0$$

したがって，

$$\langle a-u, p^*\rangle \leqq\langle a, p^*\rangle$$

$$\therefore \quad 0 \leqq\langle u, p^*\rangle$$

この u は任意の正の元でよいから，$p^* \in C^*$ である。

(2)$\Longrightarrow$(1)：——もし，$x<a$ となるAの元 x が存在するならば，

$$\forall p^* \in C^*,\ p^* \neq 0\ ;\langle x, p^*\rangle<\langle a, p^*\rangle$$

$$\therefore \quad\langle a, p^*\rangle \neq \min_{x \in A}\langle x, p^*\rangle$$

(3)$\Longleftrightarrow$(4)も同様。　　Q. E. D

系　$\langle a, p^*\rangle=\min\limits_{x \in A}\langle x, p^*\rangle$ となる $p^*>0$ が存在すれば，$a \in \min A$である。

$\langle a, p^*\rangle=\max\limits_{x \in A}\langle x, p^*\rangle$ となる $p^*>0$ が存在すれば，$a \in \max A$ である。

〔証明〕　$a \notin \min A$とすると，$b \leq a$ となるAの元 b が存在する。$p^*>0$ より，

$$\langle b, p^*\rangle<\langle a, p^*\rangle$$

したがって，$\langle a, p^*\rangle \neq \min\limits_{x \in A}\langle x, p^*\rangle$，後半も同様。　　Q. E. D.

この系の逆は成立しない。

§4.3. 集合族と順序

この節では，多意写像の凸性を定義するための準備をする。

(X, P)，(Y, Q) を2つのクライン空間とし，X^*，Y^* をそれぞれ X，Y の双対空間とする。

$$P^*=\{p^* \mid p^*\in X^*,\ 0\leqq p^*\}$$

$$Q^*=\{q^* \mid q^*\in Y^*,\ 0\leqq q^*\}$$

とおく。これらはいずれも公理（K−6）を満たしているとする。

多意写像 $f: X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$ の凸性を定義するためには，Y の部分集合の間に適切な順序を導入しなくてはならない。

まず，空間 Y の部分集合 M と，Y の線形関数 y^* に対して次のようにおく。

$$\langle M,\ y^*\rangle = \inf_{y\in M}\langle y,\ y^*\rangle$$

この場合，$M=\emptyset$ ならば，任意の y^* に対してこの値は $+\infty$ とする。すなわち，

$$\langle \emptyset,\ y^*\rangle = +\infty$$

とする。

定理2　次が成り立つ。

(1)　$y^*\in Q^* \Longleftrightarrow \langle Q,\ y^*\rangle = 0$

(2)　$y^*\notin Q^* \Longleftrightarrow \langle Q,\ y^*\rangle = -\infty$

〔証明〕 (1) $y^*\in Q^*$ ならば，任意の $y\in Q$ に対して，$\langle y,\ y^*\rangle \geqq 0$ である。しかも $0\in Q$ であるから，$\langle Q,\ y^*\rangle = 0$，

逆に，$\langle Q,\ y^*\rangle = 0$ とすれば，任意の $y\in Q$ に対して $\langle y,\ y^*\rangle \geqq 0$ となる。したがって，$y^*\in Q^*$ である。

(2) $y^*\in Q^*$ ならば，$\langle y,\ y^*\rangle < 0$ となる $y\in Q$ が存在する。Q は凸錐であるから，任意の $\lambda > 0$ に対して $\lambda y\in Q$，$\langle \lambda y,\ y^*\rangle = \lambda\langle y,\ y^*\rangle$ より，

$$\langle Q,\ y^*\rangle = \inf_{y\in Q}\langle y,\ y^*\rangle = -\infty$$

逆に，$\langle Q,\ y^*\rangle = -\infty$ ならば，$\langle y,\ y^*\rangle < 0$ となる $y\in Q$ が存在するから，$y^*\notin Q^*$ である。　Q. E. D.

空間 (Y, Q) の下に有界な凸集合全体および空集合 $\emptyset$ からなる集合族を $\mathscr{A}$ とする。明らかに凸錐 Q は $\mathscr{A}$ に含まれており，次が成り立つ。

(a)　$A_1,\ A_2\in\mathscr{A} \Longrightarrow A_1+A_2\in\mathscr{A}$

(b)　$A_1,\ A_2\in\mathscr{A} \Longrightarrow A_1\cap A_2 \Cap \mathscr{A}$，

(c) $A \in \mathscr{A}$, $\lambda \geqq 0 \Longrightarrow \lambda A \in \mathscr{A}$

さらに，次の2つの命題が成り立つ。

定理3 集合族$\mathscr{A}$に属する集合Aを1つ固定した時，写像

$$\langle A, \cdot \rangle : \quad Y^* \longrightarrow \bar{R} \qquad (\bar{R} = R \cup \{+\infty, -\infty\})$$

は次の性質を持つ。

(1) $\alpha \geqq 0$, $y^* \in Y^* \Longrightarrow \langle A, \alpha y^* \rangle = \alpha \langle A, y^* \rangle$

(2) y_1^*, $y_2^* \in Y^* \Longrightarrow \langle A, y_1^* + y_2^* \rangle \geqq \langle A, y_1^* \rangle + \langle A, y_2^* \rangle$

〔証明〕 (1) $\langle A, \alpha y^* \rangle = \inf_{x \in A} \langle x, \alpha y^* \rangle = \alpha \inf_{x \in A} \langle x, y^* \rangle = \alpha \langle A, y^* \rangle$

(2) $$\begin{aligned}\langle A, y_1^* + y_2^* \rangle &= \inf_{x \in B} \langle x, y_1^* + y_2^* \rangle = \inf_{x \in B} \{\langle x, y_1^* \rangle + \langle x, y_2^* \rangle\} \\ &\geqq \inf_{x \in B} \langle x, y_1^* \rangle + \inf_{x \in B} \langle x, y_2^* \rangle \\ &= \langle A, y_1^* \rangle + \langle A, y_2^* \rangle\end{aligned}$$ Q. E. D.

定理4 空間Y^*の凸錐Q^*に属する元q^*を1つ固定した時，写像

$$\langle \cdot, q^* \rangle : \mathscr{A} \longrightarrow \bar{R}$$

は次の性質を持つ。

(1) $\alpha \geqq 0$, $A \in \mathscr{A} \Longrightarrow \langle \alpha A, q^* \rangle = \alpha \langle A, q^* \rangle$

(2) A_1, $A_2 \in \alpha \Longrightarrow \langle A_1 + A_2, q^* \rangle = \langle A_1, q^* \rangle + \langle A_2, q^* \rangle$

〔証明〕 (1) $\langle \alpha A, q^* \rangle = \inf_{x \in A} \langle \alpha x, q^* \rangle = \alpha \inf_{x \in A} \langle x, q^* \rangle = \alpha \langle A, q^* \rangle$

(2) 任意の $x_1 \in A_1$, $x_1 \in A_2$ に対して，

$$\langle A_1 + A_2, q^* \rangle \leqq \langle x_1 + x_2, q^* \rangle = \langle x_1, q^* \rangle + \langle x_2, q^* \rangle$$

$$\therefore \quad \langle A_1 + A_2, q^* \rangle \leqq \langle A_1, q^* \rangle + \langle A_2, q^* \rangle$$

次に任意の$\varepsilon > 0$をとると，A_1の元a_1，A_2の元a_2が存在して，

$$\begin{aligned}\langle A_1 + A_2, q^* \rangle + \varepsilon &\geqq \langle a_1 + a_2, q^* \rangle = \langle a_1, q^* \rangle + \langle a_2, q^* \rangle \\ &\geqq \langle A_1, q^* \rangle + \langle A_2, q^* \rangle\end{aligned}$$

εは任意であるから，

$$\langle A_1 + A_2, q^* \rangle \geqq \langle A_1, q^* \rangle + \langle A_2, q^* \rangle$$

以上の2つの不等式より，

$$\langle A_1 + A_2, q^* \rangle = \langle A_1, q^* \rangle + \langle A_2, q^* \rangle$$ Q. E. D.

多意写像fの点xにおける値 $f(x)$はYの部分集合である。$f(x)$が集合族$\mathscr{A}$に含まれるとしてfの凸性を定義してもよいが，それでは凸関数に特有な性質をfが持つようには出来ない。そこで

集合族$\mathscr{A}$よりも狭い集合族を考えなくてはならないが，その前に双対空間 Y^* との関係について考察する必要がある。

集合族$\mathscr{A}$に属する集合Aは下に有界であるから，

$$u \leqq A$$

となるような元uが存在する。したがって，$q^* \in Q^*$ ならば，

$$\langle u,\ q^* \rangle \leqq \langle A,\ q^* \rangle$$

すなわち，定理3で Y^* を Q^* に制限した関数

$$\langle A,\ \cdot \rangle : Q^* \longrightarrow \bar{R}$$

は，関数として下に有界である。また，定理3から，この関数は Q^* 上においてグラフが凸錐となるような凹関数となる。しかし，命題11から，Q^* には基底が存在するから，この関数の定義域を基底に制限する方が取り扱いやすい。定義域を基底に制限するとは，基底上において関数のグラフの断面を考えているのだと思えばよい。定理3から，基底上における関数の値から，上の関数の Q^* 上における値は完全に定まる。

以下，Q^* の基底を1つ定め，それを S^* で表す。S^* はノルム有界な閉凸集合あるから，w*－compact である。

次に S^* を定義域とする関数 $h : S^* \longrightarrow R$ で次の性質を満たすもの全体の集合を $\mathscr{H}$ とする。

(1)　hは下に有界である。

(2)　hは上半連続な凸関数である。

ここで，上半連続という仮定を入れたのは，境界における関数の行動を吟味するわずらわしさを除く為である。（[13]，§1.3参照）

集合族$\mathscr{H}$に属する関数hに対して次のようにおく。

$$\mathrm{M}(s^*,\ h) = \{ x \mid x \in X,\ s^* \in S^*,\ h(s^*) \leqq \langle x,\ s^* \rangle \}$$

$$\bigcap_{s^* \in S^*} \mathrm{M}(s^*,\ h) = \mathrm{M}(h)$$

集合$\mathrm{M}(s^*,\ h)$は空間Xの閉じた半空間であるから，$\mathrm{M}(h)$は閉凸集合である。また，hは下に有界であるから，$\mathrm{M}(h)$ も下に有界となる。さらに，$\mathrm{M}(h)$ に属する点をaとすれば，$\{a\}+Q$も，$\mathrm{M}(h)$ に含まれている。すなわち，$\mathrm{M}(h)+Q \subset \mathrm{M}(h)$ となっている。

逆に，空間Yにおいて，下に有界な閉凸集合Aで，$A+Q \subset A$を満たすものを考えると，

$$\langle A,\ s^* \rangle = \inf_{x \in A} \langle x,\ s^* \rangle$$

であるから，$h(s^*) = \langle A,\ s^* \rangle$ とおくと，$h \in \mathscr{H}$ であり，

$$\forall x \in s\ ;\ h(s^*) \leqq \langle x,\ s^* \rangle$$

$$\therefore\ \mathrm{M}(s^*,\ h) \supset A \qquad \therefore\ \mathrm{M}(h) \supset A$$

一方，int $A \neq \emptyset$ だから，Aの境界上の各点は支持超平面を持つ。しかも，それは，

$$\langle x, s^* \rangle = k, \quad s^* \in S^*$$

という形をしている。したがって，$\mathrm{M}(h) \subset A$，すなわち$\mathrm{M}(h) = A$となる。

そこで，空間（Y，Q）の部分集合Aで次の条件を満たすもの全体からなる集合族を$\widetilde{\mathscr{A}}$とする。

(1)　Aは下に有界な閉凸集合である。

(2)　$A + Q \subset A$

以上の事から，関数族$\mathscr{H}$と集合族$\widetilde{\mathscr{A}}$とは1対1の対応をしている事がわかる。

定理4から，$\widetilde{\mathscr{A}}$は次の性質を持つ事がいえる。

(a)　$A_1, A_2 \in \widetilde{\mathscr{A}} \Longrightarrow A_1 + A_2 \in \widetilde{\mathscr{A}}$

(b)　$A_1, A_2 \in \widetilde{\mathscr{A}} \Longrightarrow A_1 \cap A_2 \in \widetilde{\mathscr{A}}$

(c)　$A \in \widetilde{\mathscr{A}}, \lambda \geqq 0 \Longrightarrow \lambda A \in \widetilde{\mathscr{A}}$

さらに，空間（Y，Q）の部分集合Bで$B + Q \in \widetilde{\mathscr{A}}$満たすもの全体からなる集合族を$\mathscr{B}$で表し，$B$族という。$\mathscr{B}$には空集合$\emptyset$も含まれているとする。

集合族$\mathscr{B}$は凸錐Qを含み，明らかに次の性質を持っている。

(a)　$B_1, B_2 \in \mathscr{B} \Longrightarrow B_1 + B_2 \in \mathscr{B}$

(b)　$B_1, B_2 \in \mathscr{B} \Longrightarrow B_1 \cap B_2 \in \mathscr{B}$

(c)　$B \in \mathscr{B}, \lambda \geqq 0 \Longrightarrow \lambda B \in \mathscr{B}$

集合族$\mathscr{B}$に含まれている各集合と原点に関して対称な集合よりなる集合族を$-\mathscr{B}$で表す。

$$-\mathscr{B} = \{-B \mid B \in \mathscr{B}\}$$

であって，$-\mathscr{B}$はクライン空間（Y，$-Q$）におけるB族である。

集合族$\mathscr{B}$に属する集合の間に，次のように順序を導入する。

(4.3)　$B_1 \leqq B_2 \Longleftrightarrow B_1 + Q \supset B_2 + Q$

これは，次のようにいっても同じ事である。

$$B_1 \leqq B_1 \Longleftrightarrow B_1 + Q \supset B_2$$

この順序は明らかに次の性質を持っている。

(a)　$\{0\} \leqq B \Longleftrightarrow Q \supset B$

(b)　$\forall B$；　$B \leqq B$

(c)　$B_1 \leqq B_2,\ B_2 \leqq B_3 \Longrightarrow B_1 \leqq B_2$

(d)　$B_1 \leqq B_2,\ \lambda \geqq 0 \Longrightarrow \lambda B_1 \leqq \lambda B_2$

(e)　$C \in \mathscr{B},\ B_1 \leqq B_2 \Longrightarrow B_1 + C \leqq B_2 + C$

定理 5　次の条件は同値である。

(1)　$B_1 \leqq B_2$

(2)　$\forall q^* \geq 0$ ；$\langle B_1, q^* \rangle \leqq \langle B_2, q^* \rangle$

〔証明〕　(1)⟹(2)：――　$B_1 \leqq B_2$ とは $B_1 + Q \supset B_2$ という事であるから，

$$\langle B_1 + Q, q^* \rangle = \inf_{x \in B_1 + Q} \langle x, q^* \rangle \leqq \inf_{x \in B_2} \langle x, q^* \rangle = \langle B_2, q^* \rangle$$

定理4(2)および定理2(1)より，

$$\langle B_1 + Q, q^* \rangle = \langle B_1, q^* \rangle + \langle Q, q^* \rangle = \langle B_1, q^* \rangle$$

$$\therefore \quad \langle B_1, q^* \rangle \leqq \langle B_2, q^* \rangle$$

(2)⟹(1)：――　条件(2)は，次のようにいってもよい。

$$\forall q^* \in S^* ; \ \langle B_1 + Q, q^* \rangle \leqq \langle B_2 + Q, q^* \rangle$$

そこで，

$$h_1(s^*) = \langle B_1 + Q, s^* \rangle = \langle B_1, s^* \rangle$$

$$h_2(s^*) = \langle B_2 + Q, s^* \rangle = \langle B_2, s^* \rangle$$

とおけば，h_1，h_2 は関数族$\mathscr{H}$に属し，次を満たしている。

$$\forall s^* \in S^* ; \quad h_1(s^*) \leqq h_2(s^*)$$

したがって，

$$\mathrm{M}(h_1) \supset \mathrm{M}(h_2)$$

となるが，$\mathrm{M}(h_1) = B_1 + Q$，$\mathrm{M}(h_2) = B_2 + Q$ であるから，

$$B_1 + Q \supset B_2 + Q \qquad \therefore \quad B_1 \leqq B_2$$

Q. E. D.

§4.4　凸多意写像の定義

前節で導入した集合族とその順序を用いて，次のように凸多意写像を定義する。

定義 5　多意写像 $f : X \twoheadrightarrow Y$ が次の条件を満たす時，f を$\mathscr{B}$**－凸多意写像**という。

(1)　空間 X の任意の点 x に対して，$f(x) \in \mathscr{B}$ である。

(2)　空間 X の任意の2点 x_1，x_2 と，$\lambda + \mu = 1$，$\lambda \geqq 0$，$\mu \geqq 0$ である任意の2つの実数 λ，μ に対して，次が成り立つ。

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) \leqq \lambda f(x_1) + \mu f(x_2)$$

また，$-f$ が$\mathscr{B}$－凸多意写像の時，f は$\mathscr{B}$**－凹多意写像**という。

今までの1章～3章（〔13〕，〔14〕）において解説した凸関数，凸写像，凸多意関数は，いずれも上の定義における$\mathscr{B}$－凸多意写像の特別の場合になっている。

定理6　多意写像 $f: X \twoheadrightarrow Y$ について，次の条件は同値である。

(1)　f は $\mathscr{B}$－凸多意写像である。

(2)　$-f$ は $(-\mathscr{B})$－凸多意写像である。

(3)　任意の $q^* \geq 0$ に対して，次の関数が凸関数である。

$$\langle f(\cdot),\ q^* \rangle:\quad X \longrightarrow \bar{R}$$

〔証明〕　(1)$\Longleftrightarrow$(2)：——次の2つの条件が同値である事から直ちに得られる。

$$f(\lambda x_1+\mu x_2)+Q \supset \lambda f(x_1)+\mu f(x_2)+Q$$

$$-f(\lambda x_1+\mu x_2)-Q \supset -\lambda f(x_1)-\mu f(x_2)-Q$$

(1)$\Longleftrightarrow$(3)：——定理5より

$$f(\lambda x_1+\mu x_2) \leqq \lambda f(x_1)+\mu f(x_2)$$

という事と，次は同値になる。

$$\forall q^* \in Q^*;\ \langle f(\lambda x_1+\mu x_2),\ q^* \rangle \leq \lambda \langle f(x_1),\ q^* \rangle + \mu \langle f(x_2),\ q^* \rangle$$

Q. E. D.

同じようにして，次の定理も直ちに導かれる。

定理7　多意写像 $f: X \twoheadrightarrow Y$ について，次の条件は同値である。

(1)　f は $\mathscr{B}$－凹多意写像である。

(2)　f は $(-\mathscr{B})$－凸多意写像である。

(3)　任意の $q^* \geq 0$ に対して，次の関数は凹関数である。

$$\langle f(\cdot),\ q^* \rangle:\quad X \longrightarrow \bar{R}$$

多意写像 $f: X \twoheadrightarrow Y$ の本質的定義域とエピグラフとは，それぞれ次のような集合である。

$$\mathrm{dom}\, f = \{x \mid f(x) \neq \emptyset\} \subset X$$

$$E[f] = \{(x,\ y) \mid x \in \mathrm{dom}\, f,\ f(x) \leqq \{y\}\}$$

$$= \{(x,\ y) \mid x \in \mathrm{dom}\, f,\ y \in f(x)+Q\} \subset X \times Y$$

以下，凸多意写像 f について，最初にあげた5つの性質〔CF－1〕～〔CF～5〕が成り立つかどうかを考察する事にする。

〔CF—1〕　多意写像 f が $\mathscr{B}$－凸多意写像であるための必要十分条件は，f のエピグラフ $E[f]$ が集合 $X \times Y$ の凸集合となる事である。

〔証明〕　(必要性)：——　f が $\mathscr{B}$－凸多意写像であるとする。$E[f]$ に属する任意の2点を $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ とすると，

$$y_1 \in f(x_1)+Q,\quad y_2 \in f(x_2)+Q$$

写像fは$\mathscr{B}$ー凸多意写像であるから，$\lambda+\mu=1$，$\lambda\geqq 0$，$\mu\geqq 0$である任意の2つの実数λ，μに対して，

$$f(\lambda x_1+\mu x_2)+Q\supset\lambda f(x_1)+\mu f(x_2)+Q$$
$$=\lambda\{f(x_1)+Q\}+\mu\{f(x_2)+Q\}$$

$$\therefore\quad f(\lambda x_1+\mu x_2)+Q\ni\lambda y_1+\mu y_2$$

$$\therefore\quad (\lambda x_1+\mu x_2,\ \lambda y_1+\mu y_2)\in E[f]$$

したがって，$E[f]$は凸集合である。

（十分性）：――$E[f]$が凸集合であるとし，$\mathrm{dom}\,f$に属する任意の2点をx_1，x_2とする。$\lambda+\mu=1$，$\lambda\geqq 0$，$\mu\geqq 0$である任意の2つの実数λ，μに対して，$y_1\in f(x_1)+Q$，$y_2\in f(x_2)+Q$ならば

$$(\lambda x_1+\mu x_2,\ \lambda y_1+\mu y_2)\in E[f]$$

$$\therefore\quad f(\lambda x_1+\mu x_2)+Q\ni\lambda y_1+\mu y_2$$

$$\therefore\quad f(\lambda x_1+\mu x_2)+Q\supset\lambda\{f(x_1)+Q\}+\mu\{f(x_2)+Q\}$$

$$\therefore\quad f(\lambda x_1+\mu x_2)\leqq\lambda f(x_1)+\mu f(x_2)$$

したがって，fは$\mathscr{B}$ー凸多意写像である。　　　　Q. E. D.

さて，次は〔CF―2〕であるが，リプシッツ条件というものを多意写像に関して考えるのはいささかやりにくい。そこで定理6(3)を利用して，多意写像の性質を一意関数に移して考える。そのために，やや一般的な考察をする。

凸多意写像$f:X\twoheadrightarrow Y$に対して，

$$H_f(x,\ y^*)=\langle f(x)+Q,\ y^*\rangle$$

とおくと，H_fは2変数x，y^*の一意関数である。

$$H_f: X\times Y^*\longrightarrow\bar{R}$$

定理8　H_fは次の性質を持っている。

(1)　$x\notin\mathrm{dom}\,f\Longrightarrow H_f(x,\ y^*)=+\infty$

(2)　$x\in\mathrm{dom}\,f$，$y^*\notin Q^*\Longrightarrow H_f(x,\ y^*)=-\infty$

〔証明〕　(1)　$x\notin\mathrm{dom}\,f$ならば，$f(x)=\emptyset$，したがって，

$$f(x)+Q=\emptyset+Q=\emptyset$$

$$\therefore\quad H_f(x,\ y^*)=\langle\emptyset,\ y^*\rangle=+\infty$$

(2)　$x\in\mathrm{dom}\,f$ならば，$f(x)\neq\emptyset$，

$$\langle f(x)+Q,\ y^*\rangle=\langle f(x),\ y^*\rangle+\langle Q,\ y^*\rangle$$

$y^* \notin Q^*$だから，定理2より，$\langle Q, y^* \rangle = -\infty$

$\therefore \quad H_f(x, y^*) = -\infty$ Q. E. D.

この定理から，H_fについては，$x \in \mathrm{dom}\, f$，$y^* \in Q^*$ の場合だけを考察すればよいわけであるが，特に $y^* = 0$ となった場合は，

$$H_f(x, 0) = \begin{cases} 0 & (x \in \mathrm{dom}\, f) \\ +\infty & (x \notin \mathrm{dom}\, f) \end{cases}$$

となるから，これは $\mathrm{dom}\, f$ の指標関数となる。この場合も特殊であるから除外すると，結局Q^*の基底 S^* に制限した場合だけを考えればよい事になる。そこで，

$$\tilde{H}_f(x, s^*) = \langle f(x) + Q, s^* \rangle, \quad s^* \in S^*$$

$$\tilde{H}_f : X \times S^* \longrightarrow \bar{R}$$

とおいて，この$\tilde{H}_f$の性質を利用してfの性質を考察する事にする。

まず，定理6よりfが$\mathscr{B}$ー凸多意写像という事と，

$$\tilde{H}_f(\cdot, s^*) : X \longrightarrow \bar{R}$$

が凸関数という事は同値である。また，定理7より，$x \in \mathrm{dom}\, f$の時，

$$\tilde{H}_f(f(x), \cdot) : S^* \longrightarrow \bar{R}$$

は，下に有界な凹関数となるから，これは関数族$\mathscr{H}$に属している。

今の考察より，〔CF—2〕は次のような形に書きかえられる。

〔CF—$\tilde{2}$〕 任意の $s^* \in S^*$ を1つ固定すると，$\mathscr{B}$ー凸多意写像 f の本質的定義域 $\mathrm{dom}\, f$ の内部 $(\mathrm{dom}\, f)^i$ に含まれるある1点の近傍において $H_f(\cdot, s^*)$ が上に有界ならば，$H_f(\cdot, s^*)$ は $(\mathrm{dom}\, f)^i$ において局所的に有界であり，局所的にリプシッツ条件を満たす。したがって，$H_f(\cdot, s^*)$ は $(\mathrm{dom} f)^i$ において連続となり，$(\mathrm{dom} f)^i$ に含まれる任意のコムパクト集合においてfはリプシッツ条件を満たす。

関数$H_f(\cdot, s^*)$が集合Aにおいてリプシッツ条件を満たすとは，

$$\exists k, \forall x_1 \in A, \forall x_2 \in A ; \quad |\langle f(x_1), s^* \rangle - \langle f(x_2), s^* \rangle| \leqq k \| x_1 - x_2 \|$$

が成り立つ事である。

次に支持写像という概念を導入する。そのために，まずXからYへの連続な（一意）線形写像全体のなす集合を$\mathscr{L}(X, Y)$で表す。

多意写像$g : X \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\rightarrow Y$が次の形に表される時，$g$を**アフィン多意写像**という。

$$g(x) = T(x) + B, \quad T \in \mathscr{L}(X, Y), \quad B \in \mathscr{B}$$

また，多意写像 $f: X \longrightarrow\!\!\!\!\to Y$ に対して，

$$\forall x ;\quad g(x) \leqq f(x)$$

となるアフィン多意写像 g を f の**下界写像**という。これは任意の $s^* \in S^*$ に対して，

$$(4.4)\qquad \forall x ; \langle g(x),\ s^*\rangle \leqq \langle f(x),\ s^*\rangle$$

が成り立つという事と同値である。

さらに，下界写像 g に対して，

$$(4.5)\qquad g(a) = f(a), \qquad a \in X$$

となる a が存在する時，g を関数 f の点 a における**支持写像**という。

さて，任意の $s^* \in S^*$ に対して，

$$\langle g(x),\ s^*\rangle = \langle T(x),\ s^*\rangle + \langle B,\ s^*\rangle$$

となり，

$$\langle T(\cdot),\ s^*\rangle :\quad X \longrightarrow R$$

は線形関数であり，$\langle B,\ s^*\rangle$ は定数となるから，

$$\langle g(\cdot),\ s^*\rangle :\quad X \longrightarrow R$$

はアフィン関数となり，この関数は $\tilde{H}_g(\cdot,\ s^*)$ とも書ける。すなわち，(4.4) は $\tilde{H}_g(\cdot,\ s^*)$ が，$\tilde{H}_f(\cdot,\ s^*)$ の下界関数になっている事を示している。

式 (4.5) より，

$$T(a) + B = f(a) \qquad \therefore\quad B = f(a) - T(a)$$

したがって，支持写像は次の形に書ける。

$$(4.6)\qquad g(x) = T(x-a) + f(a)$$

これで，一般的な支持写像が定義出来たわけであるが，これでは一般的過ぎてかえって使いにくい。それよりも値域が R の場合に帰着させて考えたほうがよい。また，多意写像 f が $\mathscr{B}$ ー下半連続とは，すべての x に対して，$f(x) \in \mathscr{B}$ であり，任意の $s^* \in S^*$ に対して，関数 $\langle f(\cdot),\ s^*\rangle$ が下半連続となる事だと定義する。そうすると，〔CF—3〕は次の形に書きかえられる。

〔CF—$\tilde{3}$〕 $\mathscr{B}$ ー下半連続な多意写像 f が $\mathscr{B}$ ー凸多意写像となるための必要十分条件は，任意の $s^* \in S^*$ に対して，dom f の任意の内点において，$\langle f(\cdot),\ s^*\rangle$ の支持関数が存在する事である。

次に劣微分について考察する。式 (4.6) より，$\mathscr{B}$ ー凸多意写像 f に対して，

$$\forall x,\ T(x-a) + f(a) \leqq f(x)$$

が成り立つようなTの集合を a における劣微分といい，$\partial f(a)$ で表す。

$$\partial f: X \twoheadrightarrow \mathscr{L}(X, Y)$$
$$x \mapsto\!\!\twoheadrightarrow \partial f(x)$$

である。しかし，これも使いにくいので次のような概念を導入する。

写像fは凸多意写像とし，$x \in \mathrm{dom}\, f$，$s^* \in S^*$とする。この時，凸関数$\tilde{H}_f(\cdot, s^*)$の点$a \in X$における劣微分を$\partial \tilde{H}_f(a, s^*)$で表す。すなわち，

(4.7)　$\forall x;\ \langle x-a, x^* \rangle + \tilde{H}_f(a, s^*) \leqq \tilde{H}_f(x, s^*)$

が成り立つようなx^*の集合である。ところが

$$\tilde{H}_f(a, s^*) = \langle f(a)+Q, s^* \rangle = \langle f(a), s^* \rangle + \langle Q, s^* \rangle$$
$$= \langle f(a), s^* \rangle = (s^* \circ f)(a)$$

であるから，(4.7) は次のようにも書ける。

$$\forall x;\ \langle x-a, x^* \rangle + \langle f(a), s^* \rangle \leqq \langle f(x) \cdot s^* \rangle$$

あるいは，次のように書いてもよい。

$$\partial \tilde{H}_f(a, s^*) = \partial(s^* \circ f)(a)$$

また，aを変数とすれば，

$$\partial \tilde{H}_f(\cdot, s^*):\ X \twoheadrightarrow X^*$$
$$x \mapsto\!\!\twoheadrightarrow \partial \tilde{H}_f(x, s^*)$$

であって，〔CF—4〕は次のように書きかえられる。

〔CF—$\tilde{4}$〕　$\mathscr{B}$−凸多意写像fが下半連続ならば，任意の$s^* \in S^*$に対して，$\partial \tilde{H}_f(\cdot, s^*)$は極大単調増加写像である。

次に共役関数について考察する。共役関数では sup を考えなくてはならないから，凸多意写像では具合が悪い。そこで最初から$\tilde{H}_f(\cdot, s^*)$について考える。

$\mathscr{B}$−凸多意写像fの共役関数を次の式により定義する。

(4.8)　$\tilde{H}_f^*(x^*, s^*) = \sup_{x \in X} \{ \langle x, x^* \rangle - \tilde{H}_f(x, s^*) \}$

このようにすれば〔CF—5〕は次のように書きかえられる。

〔CF—$\tilde{5}$〕　$\mathscr{B}$−凸多意写像fが下半連続ならば，任意の$s^* \in S^*$に対してその共役関数$\tilde{H}_f^*(\cdot, s^*)$も下半連続な凸関数であって，次が成り立つ

(1)　$\forall x, \forall x^*;\ \langle x, x^* \rangle \leqq \tilde{H}_f(x, s^*) + \tilde{H}_f^*(x^*, s^*)$

(2)　$\langle x, x^* \rangle = \tilde{H}_f(x, s^*) + \tilde{H}_f^*(x^*, s^*) \Longleftrightarrow x^* \in \partial \tilde{H}_f(x, s^*)$

(3)　$\partial(\tilde{H}_f^*(\cdot, s^*)) = (\partial \tilde{H}_f(\cdot, s^*))^{-1}$

(4)　$\tilde{H}_f^{**}(\cdot, s^*) = \tilde{H}_f(\cdot, s^*)$

定理6より，fが$\mathscr{B}$－凸多意写像になるという事と，$\widetilde{H}_f(\cdot, s^*)$ が凸関数になるという事は同値なのだから，fのいろいろな性質は$\widetilde{H}_f(\cdot, s^*)$について考えればよいというわけである。

〔例2〕　$\varphi: X \longrightarrow Y$を一意凸写像とし，簡単のため $\mathrm{dom}\,\varphi = X$ とする。

$$f(x)=\{y \mid \varphi(x) \leqq y\}=\varphi(x)+Q$$

とすれば，これは$\mathscr{B}$－凸多意写像となる。任意の $s^* \in S^*$ に対し，

$$\widetilde{H}_f(x, s^*) = \langle f(x), s^* \rangle = \langle \varphi(x), s^* \rangle$$

となる。したがって，

$$\partial f(a)=\partial\varphi(a)$$

$$\partial\widetilde{H}_f(a, s^*)=\partial(s^*, \varphi)(a)$$

$$\widetilde{H}_f^*(x^*, s^*)=\sup_x\{\langle x, x^* \rangle - \langle \varphi(x), s^* \rangle\}$$

$$=(s^* \circ \varphi)^*(x^*)$$

〔例3〕　クライン空間(X, P)，(X, Q) が与えられたとする。これらの直積$(X \times Y, P \times Q)$はまたクライン空間となる。関数$\varphi: X \times Y \longrightarrow \bar{R}$は，次の式が成り立つ時凸であるという。

$$\forall(x_1, y_1), (x_1, y_2) \in X \times Y, \quad \forall\lambda, \mu \geqq 0, \lambda+\mu=1;$$

$$\varphi(\lambda x_1+\mu x_2, \lambda y_1+\mu y_2) \leqq \lambda\varphi(x_1, y_1)+\mu\varphi(x_2, y_2)$$

この不等式で，$x_1=x_2=x$とすると，

$$\varphi(x, \lambda y_1+\mu y_2) \leqq \lambda\varphi(x, y_1)+\mu\varphi(x, y_2)$$

次に，凸関数φに対して，

$$f(x)=\{y \mid \varphi(x, y) \leqq 0, y \geqq 0\}$$

とおく。$y \geqq 0$という仮定は $f(x)$ を下に有界にするための仮定である。明らかに，$f(x)$は下に有界な凸集合となる。

次に$f: X \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow Y$が$\mathscr{B}$－凸多意写像となる事を示そう。それには，

$$f(\lambda x_1+\mu x_2)+Q \supset \lambda f(x_1)+\mu f(x_2)$$

となる事を示せばよい。

$$y_1 \in f(x_1), \quad y_2 \in f(x_2)$$

とすると，

$$\varphi(x_1, y_1) \leqq 0, \quad \varphi(x_1, y_2) \leqq 0$$

仮定から，

$$\varphi(\lambda x_1+\mu x_2, \lambda y_1+\mu y_2) \leqq \lambda\varphi(x_1, y_1)+\mu\varphi(x_2, y_2) \leqq 0$$

$$\therefore\quad \lambda y_1+\mu y_2 \in f(\lambda x_1+\mu x_2)$$

$$\therefore\quad f(\lambda x_1+\mu x_2) \supset \lambda f(x_1)+\mu f(x_2)$$

したがって，fは$\mathscr{B}$−凸多意写像となる。

この場合，$s^* \in S^*$ならば，

$$\tilde{H}_f(x,\ s^*)=\langle f(x)+Q,\ s^*\rangle=\inf_{y\geqq 0}\{\langle y,\ s^*\rangle \mid \varphi(x,\ y)\leqq 0\}$$

であり，$x^* \in \partial\tilde{H}_f(a,\ s^*)$ならば，

$$\langle x-a,\ x^*\rangle+H_f(a,\ s^*)\leqq H_f(x,\ s^*)$$

となっている。

多意写像fが，このような形で与えられる場合は多い。特に$u: X \longrightarrow R$を凹関数，$v: Y \longrightarrow R$を凸関数として；$\varphi=v-u$とおくと，

$$f(x)=\{y \mid v(y)\leqq u(x),\ y\geqq 0\}$$

となる。凸計画法における附帯条件などは，大部分この形をしている。

今まで，多意写像と凸性という2つの概念を結びつけるにはどのようにしたらよいかという事について論じてきた。凸多意写像の応用としては，ラグランジュ乗数法の一般化，凸計画法やダイナミック・モデルへの応用など種々考えられる。その場合に，凸多意写像が有効な働きをするのは，不等式と等式とを同時に取り扱えるという点である。

応用例についても言及すべきであろうが，上記のような問題にはそれぞれ独特の数学的な構造があり，それを論ずるとなると余りにも長くなるので，この論文は一応ここで終りとする。

References

〔1〕 *Barbu, V., and Th. Precupanu:* Convexity and optimization in Banach spaces, *Sijthoff and Noordhoff, 1978.*

〔2〕 *Borwein, J.: Multivalued convexity and optimization, Math. Prog., 13(1977), 183-199.*

〔3〕 *Holmes, R. B.*; Geometric Functional Analysis and its applications, *Springer-Verlag.*

〔4〕 *Jameson, G.*: Ordered linear spaces, *Lecture notes in Math., 141, Springer-Verlag.*

〔5〕 *Krasnoselskii, M. A.:* Positive Solution of Operator equations, *P. Noordhoff, 1960.*

〔6〕 *Krein, M. G., and M. A. Rutman: Linear operators leaving invariant a cone in a Banach spaces, Am. Math. Soc. Transl., 26(1956).*

〔7〕 *Pshenichnyi, B. N.: Convex multi-valued mappings and their conjugates,* in "Mathematical models in economics,"(Lós, J., and M. W. Lós, eds).

〔8〕 *Pshenichnyi, B. N.:*Necessary Conditions for an Extremum, *1971, New York;Dekker.*

〔9〕 *Robinson, S. M.: Regularity and stability for convex multivalued functions, Math. Op. Res., 1(1976), 130-143.*

〔10〕 *Rockafellar, R. T.: Convex algebra and duality in dynamic models of production,* in "Mathematical models in economics,".

〔11〕 *Rockafellar, R. T.: On the maximal monotonicity of subdifferential mappings, Pac. J. Math., 33(1970), 209-216.*

〔12〕 *Yau-Chuen Wong, and Kung-Fu NG.:* Partially ordered topological vector spaces, *Clarendon press, Oxford, 1973.*

〔13〕 渡部隆一：多意写像の凸性について（その1）「三田学会雑誌」72巻3号（1979).

〔14〕 渡部隆一：多意写像の凸性について（その2）「三田学会雑誌」72巻4号（1979).

（法学部助教授）